D. V. Sivuchin

CORSO DI FISICA GENERALE

1

MECCANICA

EDEST
EDIZIONI
MIR

D. V. Sivuchin

CORSO DI FISICA GENERALE

1

MECCANICA

Dmitrij Vasiljevič Sivuchin, dottore in scienze fisico — matematiche, professore della cattedra di Fisica generale dell'Istituto di fisica tecnica di Mosca, autore di parecchie opere di fisica tra le quali *Questioni di fisica dei plasmi* e *Problemi di fisica generale* che sono state più volte tradotte in lingue straniere.
Per il *Corso di fisica generale* in cinque volumi presentato all'Esposizione delle realizzazioni dell'economia nazionale dell'URSS è stato insignito nel 1978 della Medaglia d'oro. Per le sue ricerche di fisica D. Sivuchin ha ricevuto il Premio di Stato.

Dmitrij Sivuchin

Corso di fisica generale

in 5 volumi

Edizioni Estere   Edizioni Mir

Dmitrij Sivuchin

Meccanica

volume I

Edizioni Estere   Edizioni Mir

INDICE

PREFAZIONE

La presente opera è il risultato di circa vent'anni di lavoro svolto con gli studenti dell'Istituto di fisica applicata di Mosca.

Durante questo periodo il piano generale del corso, come pure la trattazione degli argomenti fondamentali, non ha subìto modifiche rilevanti. Tuttavia ogni anno abbiamo avvertito l'esigenza di introdurre nuovi argomenti e nuovi esempi in sostituzione di altri eliminati per mancanza di tempo.

In questa opera il lettore troverà non solo la quasi totalità delle problematiche affrontate nel corso di questi anni, ma anche vari altri problemi che non sono stati trattati. Nel libro inoltre sono stati inclusi numerosi problemi con l'indicazione della risposta o del procedimento di soluzione.

Speriamo che il nostro lavoro possa risultare utile per l'allievo desideroso di approfondire le proprie conoscenze di fisica e contribuire alla sua formazione professionale nonché per i professori nei loro lavori pratici con gli studenti. Il nostro obbiettivo è di mettere lo studente in grado di formulare da solo le questioni di principio e i problemi di base e di trovarne la soluzione.

Sia ben chiaro che il programma obbligatorio sarà solo una parte di ciò che è incluso in questo testo perché giudicato utile.

L'insegnamento orale è sempre stato accompagnato da dimostrazioni pratiche che, assieme alle esercitazioni di laboratorio, costituiscono il metodo più efficace per iniziare lo studente alla fisica. Nessuna descrizione, neppure la più precisa ed esauriente, potrebbe sostituirle. Le dimostrazioni pratiche come pure le esercitazioni di laboratorio, fornendo i primi dati sperimentali permettono di introdurre nuove nozioni, di procedere per generalizzazioni alla formulazione delle leggi e dei principi della fisica. Per di più rompono la monotonia dell'esposizione orale e rendono il corso più interessante.

Lo scopo di quest'opera è necessariamente diverso; le descrizioni delle esperienze pratiche sono poco numerose e piuttosto schematiche. Ciò che qui importa è di riuscire a spiegare il significato di concetti e nozioni fondamentali della fisica. Un'attenzione particolare è rivolta a fissare i limiti di validità delle leggi fisiche e dei modelli matematici ipotizzati.

Nel primo volume il lettore troverà un'esposizione sistematica dei fondamenti fisici della meccanica classica non relativistica. Tuttavia vista l'impossibilità di esporre questi fondamenti senza fare riferimento ad altri settori di questa scienza, già dal primo volume daremo qualche nozione sulla teoria della relatività e sulla meccanica quantistica. Sarebbe altrimenti impossibile precisare il limite di validità della meccanica classica non relativistica. Saranno date alcune nozioni di meccanica quantistica, molto brevemente e senza lunghe spiegazioni. Saremo invece più precisi sulla meccanica relativistica o meccanica della teoria della relatività. Il rapporto massa-velocità viene presentato come un fatto sperimentale. Ci pare che questo sia sufficiente non solo per uno studio qualitativo, ma anche per uno studio quantitativo dei problemi di fisica più semplici. L'esposizione sistematica della meccanica relativistica e quantistica sarà trattata negli altri volumi, quando saranno studiati i fenomeni elettrici ed ottici.

I volumi successivi saranno dedicati alla termodinamica, alla fisica molecolare, all'elettricità, all'ottica ed alla fisica atomica e nucleare.

Abbiamo adottato come unità di misura quelle del sistema CGS. In meccanica, queste unità praticamente non si distinguono dalle unità del sistema internazionale SI. La differenza è unicamente quantitativa: cambia solamente l'unità di lunghezza e di massa (nel sistema SI il metro sostituisce il centimetro, il chilogrammo sostituisce il grammo). Queste differenze non alterano né la sostanza dei concetti né le formule fisiche in quanto tali; per la meccanica i due sistemi sono equivalenti. Il problema si complica per l'elettrodinamica. Nel sistema SI lo stato elettrico del vuoto è caratterizzato da quattro vettori: l'intensità **E** *e l'induzione* **D** *del campo elettrico; l'intensità* **H** *e l'induzione* **B** *del campo magnetico. Si tratta di una complicazione assurda ed inutile. Sono sufficienti due soli vettori a caratterizzare il vuoto, quelli usati nel sistema CGS. In quest'ultimo i quattro vettori* **E, B, H, D** *hanno le stesse dimensioni, mentre nel sistema SI queste sono differenti, il che è un assurdo, poiché campi elettrici e magnetici sono intimamente legati tra loro. Nell'elettrodinamica relativistica questo legame viene stabilito nella forma più ampia, giacché vengono associati i vettori* **E** *e* **B**, *nonché i vettori* **H** *e* **D** *nei tensori quadridimensionali antisimmetrici. Per costruire questi tensori nel sistema SI, è necessario ricorrere a fattori dimensionali speciali per rendere omogenee le equazioni rispetto alle dimensioni delle loro componenti. Anche questa è una complicazione inutile.*

Il solo vantaggio del sistema SI rispetto al CGS si riduce al fatto che il primo incorpora in sé ampère, volt, ohm e tutti i loro derivati che, per ragioni storiche, vengono largamente utilizzati nel campo dell'elettrotecnica. Si tratta tuttavia di un vantaggio veramente pratico, non di principio. Ma dato che il problema dell'unità di misura ha nel nostro corso un'importanza secondaria, non vale la pena di sacrificare a bisogni puramente pratici la logica di concetti e formule fisiche quali quelli del sistema CGS.

Questa opera non avrebbe mai visto la luce se il professor G. S. Gore-

lik, titolare della cattedra di fisica dell'Istituto di fisica applicata di Mosca non mi avesse incaricato di tenere un corso di fisica generale. L'autore ha discusso con lui vari problemi di fisica e del suo insegnamento. Le dimostrazioni per le lezioni sono state preparate e realizzate dai miei assistenti M. I. Maklakov, V. A. Kuznetsov, E. N. Morozov, V. P. Molčanov, L. D. Kudrjašova, G. N. Freiberg. Anche se non tutte di queste dimostrazioni sono descritte nel presente corso, esse hanno fornito materiale prezioso utilizzato nella stesura del libro.

Una parte notevole dei problemi citati in questo corso è stata proposta agli studenti durante gli esami per iscritto e utilizzata dopo negli studi pratici. All'elaborazione di questi problemi hanno preso parte molti professori della cattedra di fisica dell'Istituto di fisica e tecnica di Mosca.

Il manoscritto del presente volume è stato in parte rivisto dagli accademici V. L. Ginzburg, B. B. Kadomtsev, M. A. Leontovič, R. Z. Sagdeev e dai professori S. S. Gerstejn e J. A. Jakovlev ed è stato oggetto di una approfondita analisi da parte della cattedra di fisica generale della facoltà di meccanica e matematica dell'Università di Mosca, diretta dal professor S. M. Strelkov.

Le osservazioni critiche, i consigli e i suggerimenti delle persone citate hanno dato un notevole contributo alla realizzazione di quest'opera. Esprimo loro la mia più profonda gratitudine.

D. V. Sivuchin

INTRODUZIONE

1. Ogni volta che si vuole studiare un insieme di fenomeni naturali è necessario precisare le leggi o i principi fondamentali che permettono di spiegare fenomeni già noti e prevedere l'esistenza di nuovi. Tale approccio viene definito *metodo dei principi fondamentali.* Questo metodo che risale al grande Newton (1643-1727) si è trasformato nelle mani di un altro grande fisico Einstein (1879-1955) in uno straordinario strumento di progresso.

Le leggi o i principi fondamentali non si lasciano dimostrare attraverso ragionamenti logici e la loro validità viene verificata solo attraverso l'esperienza. L'esperienza importante non è tanto quella che tende a confermare la giustezza dei principi in sé stessi, quanto quella che serve a verificare le conseguenze che ne derivano. Si potrebbe affermare che i principi fondamentali sono *generalizzazioni di fatti sperimentali.* Dato che le esperienze non abbracciano tutte le possibili condizioni di evoluzione di un fenomeno e ogni esperienza è soggetta ad errori, *il metodo sperimentale* (che d'altronde è il solo a nostra disposizione) *ci permette di confermare la validità dei principi fondamentali soltanto entro i limiti noti a meno degli errori sperimentali.* Non appena si estende il campo di investigazione dei fenomeni naturali e si migliora la precisione delle misure, i limiti di validità dei principi possono essere estesi. Può capitare che oltrepassando limiti noti certi principi fondamentali cessino di essere validi. Si deve procedere quindi ad una loro generalizzazione o all'introduzione di altri che possiedano un campo di validità più estesa. I vecchi principi conservano tutto il loro valore nel campo in cui erano stati definiti. La validità e la potenza del metodo dei principi fondamentali consiste nel fatto che tutti i dati che se ne possono trarre con procedimenti logici o calcoli matematici sono validi nei limiti in cui i principi stabiliti dall'esperienza sono verificati, con la stessa precisione quindi con cui è stato eseguito l'esperimento.

2. *La meccanica,* sviluppatasi prima delle altre branche della fisica, *ha per oggetto lo studio del moto e dell'equilibrio dei corpi. In senso lato si può affermare che il moto della materia corrisponde ai cambiamenti che può subire. In meccanica per moto si intende la sua forma più semplice, cioè lo spostamento di un corpo rispetto ad altri.* I principi della meccanica sono stati formulati inizialmente da Newton nel suo trattato intitolato

Principi matematici della filosofia naturale, la cui prima edizione risale al 1687. È vero che Newton ha avuto grandi predecessori: Archimede (287-212 a. C.), Keplero (1571-1630), Galilei (1564-1642), Huygens (1629-1695) ed altri ancora, studiosi che riuscirono a trovare soluzione a molti problemi particolari di statica e di dinamica. Newton però fu il primo a formulare un sistema completo di principi della meccanica e a costruire su questa base un edificio coerente. L'enorme successo riportato dalla meccanica di Newton e l'autorità del suo nome fecero sì che per ben due secoli nessun studioso osò criticarne l'impostazione. Soltanto nella seconda metà del XIX secolo si procedette ad una revisione critica della sua opera.

Dopo Newton lo sviluppo della meccanica fu rapido, benché fino all'inizio del XX secolo gli sforzi degli studiosi fossero tutti rivolti a perfezionare i procedimenti matematici nel tentativo di applicare le leggi di Newton a nuovi campi della scienza. Ma i principi di base e i concetti fisici della meccanica, formulati da Newton, restarono immutati, tant'è che fino all'inizio del XX secolo non ne furono introdotti di nuovi. Solo alle soglie del XX secolo la situazione cominciò a cambiare.

La meccanica di Newton si avvale di una solida base sperimentale, tuttavia tratta movimenti lenti di corpi macroscopici. *Macroscopici* vengono chiamati i corpi di dimensioni ordinarie che ci circondano nella vita quotidiana, costituiti quindi da quantità enormi di atomi o di molecole. Il *moto* viene definito *lento* o *non relativistico* se la sua velocità è piccola rispetto a quella della luce nel vuoto, $c = 300\,000$ km/s. Ogni moto la cui velocità si avvicini a quella della luce nel vuoto viene detto *rapido* o *relativistico.* Secondo questo criterio il moto di una nave spaziale con una velocità di spostamento di 8 km/s deve essere considerato molto lento. Lenti sono anche — rispetto al Sole — i moti dei pianeti del sistema solare, dei loro satelliti e delle comete. L'applicazione dei principi della meccanica newtoniana allo studio dei moti di questi corpi dimostra l'ampiezza della sua validità. Anche il moto dei satelliti artificiali e delle navi spaziali risponde perfettamente ai risultati dei calcoli basati sulla meccanica di Newton.

3. Sorgono allora delle domande: è possibile estrapolare fino a grandi velocità i principi della meccanica newtoniana, che erano stati stabiliti per i moti lenti dei corpi macroscopici? È possibile applicare le concezioni e i principi fondamentali di questa meccanica allo studio dei fenomeni del microcosmo, ai cosiddetti fenomeni, concernenti particelle isolate quali molecole, atomi, elettroni, protoni, neutroni ed altre particelle dette elementari? Il ragionamento logico non ci dà una risposta soddisfacente. La risposta la si può ottenere solo tramite esperimenti fatti con corpi dotati di grandi velocità ed esperimenti con molecole, atomi, elettroni, ecc., isolati. Questi esperimenti furono realizzati soltanto nel XX secolo ed i risultati ottenuti hanno dimostrato che le risposte a queste domande sono generalmente negative.

La teoria della relatività di Einstein afferma che la meccanica newtonia-

na non può essere applicata ai moti delle particelle la cui velocità è vicina a quella della luce nel vuoto, e l'esperienza conferma questa asserzione. Sulla base della teoria della relatività furono stabiliti i principi di una nuova meccanica: la *meccanica relativistica* (o *meccanica della teoria della relatività*) che è valida sia per basse velocità che per le più grandi possibili. Secondo i principi della meccanica di Newton la velocità che può acquisire un corpo è teoricamente illimitata, mentre nella nuova meccanica relativistica la velocità dei corpi ha un limite insormontabile — la velocità della luce nel vuoto c. La velocità della luce è dunque una velocità *limite* che nessun corpo è in grado di raggiungere, ma si può avvicinare a meno di quantità piccole quanto si vuole. Negli acceleratori di particelle si possono produrre protoni che si muovono ad una velocità che è solo percentualmente di qualche decimo o centesimo inferiore alla velocità della luce. Si possono ottenere elettroni la cui velocità è inferiore alla velocità della luce solo di qualche metro o di qualche decina di metri al secondo. Negli sciami di raggi cosmici si registra la presenza di protoni la cui velocità non è inferiore a quella della luce che di 10^{-8} cm/s circa. È assolutamente impossibile applicare la meccanica di Newton per calcolare il moto di corpi che si spostano a così alte velocità. Per progettare questi acceleratori si deve ricorrere alla meccanica relativistica di Einstein. Il fatto che i risultati pratici corrispondono ai calcoli è la riprova sperimentale, diretta ed irrefutabile, della correttezza della meccanica relativistica.

4. La teoria della relatività fissa alla meccanica di Newton un limite: quello delle *grandi velocità*. Un'altra limitazione a questa teoria come pure a quella relativistica è stata posta dallo studio del *microcosmo,* del mondo cioè degli atomi, delle molecole, degli elettroni ecc.

All'inizio gli studiosi hanno cercato di applicare al microcosmo i concetti e le leggi elaborate per i corpi macroscopici. Veniva assimilato, per esempio, l'elettrone ad una palla rigida o, al contrario, deformabile, nel cui volume si trovava distribuita in qualche modo la carica elettrica, e si ammetteva che il suo comportamento fosse soggetto alle leggi della meccanica e dell'elettrodinamica verificate per i corpi macroscopici carichi. Questa ipotesi portava ad affermare che tutti i concetti e le leggi della fisica macroscopica rimanevano validi anche se applicati ai corpi e agli intervalli di tempo infinitamente piccoli. Si riteneva che per imparare a conoscere il microcosmo non fossero necessari concetti e leggi diversi da quelli della fisica macroscopica. Questa teoria portava a considerare il microcosmo una copia pura e semplice del macrocosmo. Tale approccio allo studio dei fenomeni naturali e le teorie fisiche corrispondenti vengono definiti *classici.*

Il semplice ragionamento non è sufficiente quando si tratta di decidere se si possa applicare il metodo classico allo studio dei problemi del microcosmo; bisogna ricorrere all'esperienza. L'esperienza ha dimostrato che *l'approccio classico allo studio dei fenomeni del microcosmo non è valido,* o meglio, *ha validità limitata.* Si è arrivati a una adeguata descrizione del

microcosmo (applicabile, certo, in limiti determinati) facendo uso della *meccanica quantistica,* che è sostanzialmente diversa da quella classica. La meccanica quantistica ha modificato radicalmente le nostre idee sul moto. L'immagine classica del moto di una particella che si sposta lungo una traiettoria, ed in ogni punto della quale possiede una velocità ed una posizione ben determinata, non è più applicabile nel caso in cui si tratti di una microparticella. Nel microcosmo il moto assume una forma più complicata di quella dello spostamento meccanico dei corpi nello spazio. Insomma, la descrizione dei fenomeni del microcosmo non gode di comprensione immediata dato che vengono introdotti concetti e metodi *essenzialmente nuovi,* non paragonabili a quelli in uso nello studio di oggetti macroscopici. E poiché il presente corso di meccanica ha per oggetto il moto dei corpi macroscopici è inopportuno fare a questo punto delle digressioni sulla meccanica quantistica. Sarà più che sufficiente precisare i limiti di validità dei concetti e delle leggi che noi dovremo utilizzare, il che sarà fatto al paragrafo 5.

5. Risulta dunque che *la meccanica di Newton è una meccanica classica, non relativistica, che studia il moto lento dei corpi macroscopici.*

La meccanica relativistica e quantistica sono teorie più generali di quella di Newton, che vi è contenuta come caso limite e approssimato. La meccanica relativistica ci porta agli stessi risultati della meccanica newtoniana nel caso in cui il moto preso in esame sia lento. La meccanica quantistica viene ricondotta alla meccanica di Newton nel caso in cui i corpi studiati abbiano masse sufficientemente grandi e si muovano in campi di forza lentamente variabili. Ciò non significa tuttavia che la meccanica di Newton abbia perso la sua importanza. In numerosi casi le correzioni reali apportate dalla teoria della relatività e dalla meccanica quantistica ai risultati forniti dalla meccanica hanno scarso valore. Sono chiamate correzioni *relativistiche* e *quantistiche.* Nei casi di moto lento di corpi macroscopici, queste correzioni sono talmente piccole da risultare inferiori alla precisione delle misure fisiche più sofisticate. D'altronde, i problemi semplici sul moto dei corpi macroscopici, che la meccanica classica risolve facilmente, diverrebbero a tal punto ardui nell'ambito della meccanica relativistica o quantistica da far sentire l'esigenza di introdurre ogni sorta di semplificazioni e di ricorrere a metodi di calcolo approssimato: semplificazioni e approssimazioni che ci fanno ritrovare le formule della meccanica di Newton.

Prendiamo il caso del calcolo classico del moto di una nave spaziale; ponendo che la sua velocità sia $v = 8$ km/s, l'errore commesso per aver trascurato gli effetti relativistici sarà dell'ordine di $\left(\frac{v}{c}\right)^2 = \left(\frac{8}{300\,000}\right)^2 \sim 10^{-9}$. L'applicazione della meccanica di Newton garantisce dunque una precisione di calcolo a meno del 10^{-7} percento. È chiaro che è

perfettamente illusorio tentare di compiere delle correzioni relativistiche perché i dati iniziali del problema sono di una precisione incomparabilmente minore. Oltre a ciò da un punto di vista pratico le correzioni sono perfettamente inutili [1].

La meccanica di Newton dunque resta valida per un gran numero di casi di importanza pratica, mantenendo tutto il suo valore scientifico e pratico entro i limiti fissati. È lecito rinunciare alla meccanica di Newton solo là dove essa risulta inapplicabile oppure quando essa porta a dei risultati erronei o non sufficientemente precisi. Per esempio, il problema del moto di particelle cariche negli acceleratori dovrà essere risolto con la meccanica relativistica. Analogamente il problema del movimento degli elettroni negli atomi non può essere risolto che dalla meccanica quantistica.

---

[1] Va notato che già nel XIX secolo, lo studio dei pianeti del sistema solare (Mercurio, Venere, Terra, Marte) aveva permesso di scoprire lievi discordanze rispetto alla meccanica newtoniana; più tardi, nell'ambito della teoria della relatività generale, queste discordanze sono state identificate con la correzione relativistica $\sim v^2/c^2$ (indicando con v la velocità del pianeta). Si è rilevato che il perielio di un pianeta ruota lentamente nello stesso senso del pianeta. Questo spostamento risulta in sostanza determinato dall'influenza perturbatrice degli altri pianeti. Il calcolo di questa rotazione del perielio secondo i principi della meccanica newtoniana ha fornito un valore minore di quello osservato. La deviazione più importante si osserva giustamente nel caso di Mercurio la cui traiettoria è la più allungata e la cui velocità v è la più grande; questa deviazione è di circa 43 secondi d'angolo al secolo ed è il risultato di un effetto puramente relativistico di cui non si è tenuto conto. Questo effetto sussisterebbe lo stesso anche in assenza delle perturbazioni apportate dagli altri pianeti, come se nel sistema solare esistessero solo il Sole e il Mercurio. Attualmente, con la diffusione sempre più larga delle tecniche laser si possono studiare ulteriori correzioni relativistiche da apportare alla meccanica celeste classica.

La meccanica di Newton dunque resta valida per un gran numero di casi di importanza pratica, mantenendo tutto il suo valore scientifico e pratico entro i limiti fissati. Oltre questi limiti, i risultati forniti saranno erronei o non sufficientemente precisi. Per esempio, il problema del moto di particelle cariche negli acceleratori dovrà essere risolto con la meccanica relativistica. Analogamente il problema del movimento degli elettroni negli atomi non può essere risolto che dalla meccanica quantistica.

I. CINEMATICA

§ 1. *Lo spazio e il tempo*

1. In meccanica per *moto* si intende il cambiamento nel tempo della posizione spaziale di un corpo. La posizione del corpo preso in esame è una *posizione relativa,* definita in rapporto ad altri corpi. Il concetto di posizione assoluta, cioè la posizione di un corpo in uno «spazio assoluto», senza riferimento ad altri corpi, è privo di significato.

Il corpo o il sistema di corpi rispetto ai quali viene definita la posizione di altri corpi è designato sotto il nome di *sistema di riferimento.*

È privo di significato affermare che due avvenimenti differenti e non simultanei sono avvenuti nello stesso punto dello spazio se non è precisato il sistema di riferimento utilizzato. Supponiamo che un viaggiatore trovandosi su un treno in movimento in un istante dato tiri fuori un oggetto dalla sua valigia, e poi lo rimetta al suo posto. Si può dire che queste due azioni del viaggiatore sono avvenute nello stesso luogo se come sistema di riferimento era stata scelta la vettura del treno in movimento. Ma se noi avessimo scelto come punto di riferimento la strada ferrata i due avvenimenti in questione sarebbero avvenuti in luoghi differenti, per esempio, l'uno a Mosca e l'altro a Leningrado.

2. Si può scegliere come sistema di riferimento un corpo solido al quale saranno fissati gli *assi delle coordinate,* per esempio, un sistema cartesiano di coordinate ad angolo retto costituito da tre aste rigide. In questo sistema di riferimento la posizione di ogni punto può essere definita da tre numeri che sono le *coordinate x, y e z di questo punto;* queste coordinate rappresentano rispettivamente le distanze di questo punto da tre piani YZ, ZX e XY del nostro sistema di riferimento (fig. 1). Le tre coordinate x, y, z possono essere combinate per definire un *raggio vettore* $\boldsymbol{r}$, che è un segmento di retta che ha inizio nell'origine ed arriva nel punto considerato. Le coordinate x, y, z sono le misure delle proiezioni del raggio vettore sugli assi di coordinate, perciò

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}, \tag{1.1}$$

dove $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ sono dei vettori unitari orientati lungo gli assi X, Y, Z.

Esistono due tipi di sistemi di coordinate (due sistemi cartesiani di coordinate ad angolo retto) che si distinguono applicando la *regola del succhiel-*

lo. Prendiamo un succhiello normale (filettatura a destra) e facciamolo ruotare in modo che il manico sia nel piano XY. In un sistema di riferimento di senso diretto (fig. 1) il succhiello avanza nel senso di Z positivo e in un sistema di riferimento di senso inverso (fig. 2) esso avanza nel senso di Z negativo. Nessuna rotazione permette di fare coincidere questi due sistemi che si distinguono l'uno dall'altro come la mano sinistra da quella destra. Però si può trasformare un sistema di senso diretto in uno di senso inverso

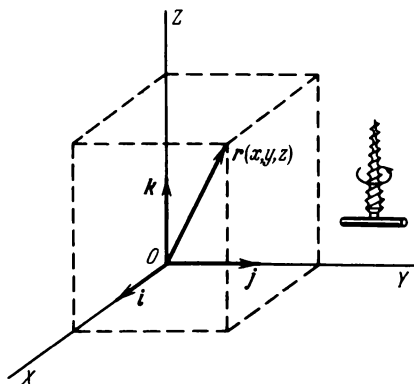
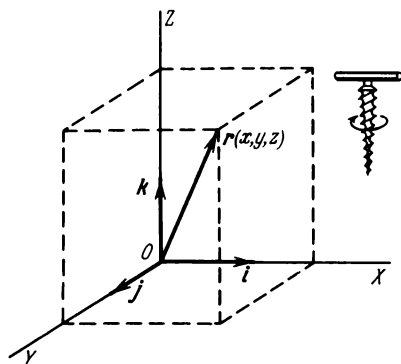



Fig. 1. Fig. 2.

invertendo il senso di un solo asse delle coordinate o di tutti e tre. In quest'ultimo caso viene effettuata una *inversione degli assi delle coordinate* oppure una *riflessione rispetto all'origine*. Per esempio, l'immagine in uno specchio piano di un sistema di senso diretto è un sistema di senso inverso. Nella fisica si utilizza solo il sistema di riferimento diretto.

3. Le coordinate x, y, z, che servono a definire la posizione di un punto nel sistema di riferimento scelto, sono dei numeri. *Determinare quantitativamente le coordinate di un punto implica, come per qualsiasi grandezza fisica, la definizione di un principio di misura.* È importante sottolineare che si tratta del *principio* del metodo di misurazione e non del procedimento *pratico* della determinazione del valore della grandezza considerata. Questi metodi di misurazione non devono che chiarire il senso o, meglio, il principio della determinazione di x, y, z o dei numeri che servono a caratterizzare quantitativamente tutte le altre grandezze fisiche. È lecito supporre che i procedimenti pratici di misurazione utilizzati siano *perfetti* e i risultati ottenuti siano di assoluta precisione. Le coordinate x, y, z sono misure di lunghezza, ne segue che la loro determinazione si riduce alla misurazione delle lunghezze, cioè ai numeri che caratterizzano le lunghezze. Per misurazione delle lunghezze, intendiamo la seguente operazione. Adoperiamo per convenzione un campione di lunghezza costituito da un'asta rigida, la lunghezza della quale è assunta come unità di lunghezza. Per misurare la di-

mensione di un corpo noi cerchiamo il numero che indichi di quante volte questa dimensione del corpo è più grande di quella nostra asta campione. È questo il numero che noi chiamiamo dimensione del corpo lungo una direzione data. Se questo numero non è intero noi dobbiamo dividere preliminarmente la nostra asta campione in parti più piccole: decimi, centesimi, ecc., dell'unità di lunghezza. Noi possiamo utilizzare ora l'unità campione, con le sue suddivisioni, per caratterizzare qualsiasi dimensione con un numero decimale o con un numero intero seguito da decimali.

4. Il procedimento pratico che consiste nel determinare la dimensione di un corpo applicando il suddetto campione o le sue suddivisioni viene chiamato *misurazione diretta,* ma non sempre è possibile effettuarla. È impossibile, per esempio, eseguire tale procedimento quando si tratta di determinare la distanza di corpi estremamente lontani come i pianeti, le stelle e gli altri corpi celesti. La misurazione diretta è inapplicabile alle più piccole dimensioni con le quali lavorano i fisici che studiano gli atomi, i nuclei atomici o le particelle elementari. Quindi, dobbiamo ricorrere a *metodi di misurazione indiretta.* La validità e corretezza di questi metodi dev'essere verificata con metodi diretti (quando, ovviamente, questo sia possibile). Quando però i metodi diretti cessano di essere applicabili, vengono sostituiti da quelli indiretti. In tutti i metodi indiretti le operazioni di misurazione diretta, per mezzo delle quali è stato inizialmente introdotto il concetto quantitativo di lunghezza, prendono un carattere astratto; mentre quelle di misurazione indiretta assumono il ruolo di operazioni di misurazione fondamentalmente suscettibili di spiegare il significato delle lunghezze stesse o, più esattamente, di quei numeri che caratterizzano le lunghezze misurate.

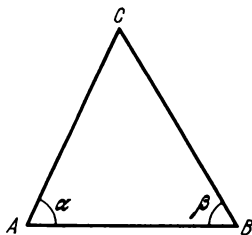



Fig. 3.

Un esempio del metodo di misurazione indiretta è la *triangolazione, che è un procedimento generalmente utilizzato per determinare le distanze degli oggetti lontani. Con il metodo diretto determiniamo la lunghezza della «base»* AB (fig. 3); collocandoci alle estremità di questa base AB eseguiamo dei puntamenti, per esempio, con un cannocchiale, in direzione dell'oggetto C, allo scopo di misurare gli angoli α e β formati dalle rette AC e BC con la base AB. Disponendo di questi dati numerici, la distanza incognita alla quale si trova il punto C può essere calcolata attraverso una

costruzione o con un calcolo geometrico. Se la base scelta AB è troppo grande perché la sua lunghezza possa essere determinata per misurazione diretta adottiamo allora una base più piccola, misuriamo la sua lunghezza e poi determiniamo la lunghezza della base AB con il procedimento della triangolazione. In linea di principio questo non cambia nulla nel nostro operato. È assai più importante stabilire le basi teoriche del metodo considerato, il quale presuppone che i lati del triangolo ABC siano delle *rette che soddisfano gli assiomi della geometria di Euclide.* Però dobbiamo ancora stabilire fisicamente da cosa sono costituiti i lati di questo triangolo: sono i raggi luminosi che partono dall'oggetto C ed arrivano nei punti A e B. Dunque, il nostro metodo poggia sull'ipotesi che i raggi luminosi siano rigorosamente rettilinei e soddisfino agli stessi assiomi della geometria di Euclide che valgono per le rette geometriche. Questa ipotesi non è affatto evidente e il solo modo di confermarla o di confutarla è l'esperienza. La propagazione dei raggi luminosi va intesa nel vuoto e non nell'atmosfera terrestre dove essi si incurvano a causa delle variazioni locali dell'indice di rifrazione dell'aria. Si può calcolare questa deviazione dei raggi luminosi e questo viene fatto nelle misurazioni di alta precisione.

Ci si deve porre un'altra questione: in che modo ci si può assicurare che la geometria euclidea è applicabile in circostanze reali? Il metodo diretto che si può utilizzare per rispondere a questa domanda consiste nel sottoporre ad una verifica sperimentale i corollari degli assiomi della geometria euclidea, per esempio, il teorema che afferma che la somma degli angoli interni di un triangolo è uguale a 180°. Il celebre matematico Gauss (1777-1855) dal 1821 al 1823 ha misurato con precisione gli angoli interni di un triangolo individuato da tre picchi di montagna, lontani circa 100 km l'uno dall'altro. La conclusione è stata che, nei limiti di errori di misurazione, non venivano osservate deviazioni da questo teorema. Questo metodo non può però essere utilizzato per misurare le distanze nel sistema solare e a maggior ragione su più vasta scala perché tutte le misurazioni si effettuano sulla Terra; non possiamo perciò misurare direttamente i tre angoli interni di un triangolo i cui vertici si trovano uno sulla Terra, ma gli altri su due pianeti o su due stelle qualsiasi. In questo caso noi stabiliamo l'applicabilità della geometria euclidea servendoci di dati indiretti, come la coincidenza di risultati ottenuti da applicazioni diverse di questa geometria. Possiamo, per esempio, prevedere attraverso calcoli il moto dei pianeti del sistema solare per alcuni anni e verificare poi la validità dei risultati. Nel caso in cui i risultati del calcolo fossero errati, potremmo spiegare tale fatto con una ipotesi di inadeguatezza della geometria euclidea se applicata a spazi molto estesi, come quelli del sistema solare. Al contrario, se i calcoli e l'osservazione forniscono risultati in buon accordo (come in effetti è) allora non c'è ragione di mettere in dubbio la validità della geometria euclidea. Senza più soffermarci su questo problema, noteremo semplicemente che la geometria euclidea non porta a deviazioni apprezzabili se applicata in regioni di spa-

zio della grandezza della nostra *Galassia* ($\sim 10^{20}$ m) e persino della *Metagalassia,* che è la regione dell'Universo accessibile all'osservazione per mezzo dei più possenti telescopi ($\sim 10^{26}$ m). Inoltre non c'è nessun motivo per mettere in dubbio la geometria euclidea quando si tratta di grandezze subatomiche dell'ordine, diciamo, di 10^{-15} m.

Nelle misurazioni della posizione dei corpi lontani i raggi luminosi assumono la funzione di oggetti materiali che costituiscono il sistema di riferimento reale. Poiché non è possibile costruire aste infinitamente lunghe, queste non possono essere usate per marcare gli assi delle coordinate che si prolungano nello spazio. A questo scopo vengono allora impiegati i raggi luminosi che proseguono lungo gli assi delle coordinate inizialmente realizzati con aste rigide.

5. Questa considerazione spinge a fare qualche osservazione sui legami tra la fisica e la matematica. La matematica ha un ruolo talmente importante nella fisica che senza di essa non esisterebbe la fisica moderna. È importante però collocare correttamente la matematica nella fisica; questo problema ci sembra di tale importanza che ne riparleremo in varie occasioni. La matematica pura studia concetti e nozioni astratti retti da un sistema assiomatico. La sola condizione cui devono soddisfare le nozioni e gli assiomi della matematica è di essere *logicamente consistenti.* La matematica pura trae tutte le affermazioni dagli assiomi mediante il ragionamento logico, che si basa sulle regole della logica formale. È evidente che il risultato non potrà superare il quadro dei legami logici esistenti tra i diversi concetti e nozioni da cui si è partiti. Si può dire che la matematica pura costituisce una disciplina logicamente coerente. Formando un sistema chiuso dove tutto è logicamente coerente, la matematica pura ha una propria estetica alla quale i matematici sono assai sensibili.

Non dobbiamo tuttavia dimenticare che la matematica pura, rigorosamente chiusa in sé stessa, è staccata dal mondo reale e non può essere direttamente utilizzata dalle altre scienze o nella pratica. Affinché la matematica pura diventi un potente mezzo di studio e di descrizione dei fenomeni naturali, bisogna stabilire dei legami tra le nozioni e i concetti astratti della matematica da una parte e i concetti e i fenomeni naturali dall'altra. Nella fisica le nozioni e i concetti matematici devono figurare non come categorie puramente logiche, ma come *astrazioni di concetti reali o di processi naturali.* Così, il punto è l'astrazione di un corpo fisico di piccole dimensioni, la retta è l'astrazione di un'asta rigida di sezione sottile o di un fascio luminoso che si propaga in un mezzo omogeneo. Il problema della legittimità della matematica si riduce a quello dei suoi assiomi. La legittimità degli assiomi invece non può essere stabilita che attraverso l'esperienza.

È vero che non si possono sottoporre a sperimentazione i concetti matematici stessi, perché essi sono oggetti ideali che non troviamo in Natura mentre ogni esperienza ha a che fare con oggetti reali. Il rigore di cui non a torto sono così fieri i matematici deve essere interpretato come concordan-

za logica delle conclusioni alle quali noi arriviamo e non come giustificazione degli assiomi di partenza.

Il solo rigore matematico non può bastare né alla fisica né alle altre scienze poiché trattano corpi reali e fenomeni naturali. *Qualsiasi studio teorico, anche se matematicamente rigoroso, non può essere considerato rigoroso dal punto di vista della fisica,* e ciò per le ragioni seguenti. In primo luogo, tutte queste ricerche o studi si basano su leggi, il cui dominio di validità viene definito solo con l'esperienza; però ogni sperimentazione ed ogni misura fisica è affetta da errori ed è effettuata con un certo grado di precisione. Al di là del grado di precisione raggiunto in un esperimento, la legge fisica di cui si tratta può cessare di essere valida. In secondo luogo, ogni corpo fisico reale possiede un'infinità di caratteristiche. È impossibile esplicitare tutte le determinazioni di un corpo reale, perché da un lato esse sono numericamente infinite, e dall'altro, sono in maggioranza sconosciute. *Nel costruire le teorie, i fisici hanno sostituito ai corpi reali i loro modelli, con un numero ristretto di caratteristiche essenziali per affrontare il problema in esame. Solo la sperimentazione permette di scegliere le caratteristiche necessarie per passare dal corpo reale al suo modello, ed è sempre l'esperienza che risolve il problema della esattezza di una teoria fisica ed i suoi limiti di validità.* Qualsiasi applicazione di una legge fisica al di fuori del suo campo di validità e di un modello che non specifichi il complesso di tutte le caratteristiche del corpo reale che interessano per un dato studio, conduce a vizi teorici che non potranno essere corretti con il ragionamento e il calcolo matematico, per quanto rigorosi essi siano.

Questa asserzione è valida anche nella pratica. È chiaro che una volta costruito il modello, è possibile effettuare gli ulteriori calcoli con tutto il rigore voluto, sebbene le relative leggi fisiche non siano che approssimate. Tuttavia, il calcolo rigoroso è spesso troppo lungo e arduo per essere eseguito. Il grado di precisione, cui aspira, è già svalutato dal carattere approssimativo delle leggi fisiche e dall'imperfezione del modello teorico posto alla base dei calcoli. In questa situazione si può e si deve ricorrere a calcoli approssimati. Il calcolo approssimato è valido quanto il calcolo esatto, a condizione che gli errori introdotti non superino gli errori dovuti all'imperfezione delle leggi fisiche applicate e dei modelli teorici.

Numerose nozioni e scoperte che i matematici giudicano fondamentali diventano prive di senso quando si tratta di applicarle ai corpi reali. Un esempio ce lo forniscono i numeri irrazionali. Dire che una grandezza fisica assume un valore irrazionale è un controsenso, perché tale asserzione non può esser verificata. I numeri razionali sono più che sufficienti a rappresentare le misure con tutta la precisione richiesta. Inoltre, la nozione stessa di grandezza fisica perde ogni significato qualora si esiga che le misurazioni vengano effettuate con un grado esagerato di precisione. Per esempio, non si saprà più dire di che cosa si tratta se si cerca di misurare la lunghezza di un'asta rigida, a meno di un atomo. Una precisione illimitata per la misura

delle lunghezze è utile per i segmenti di retta astratti, considerati in geometria, ma non più per i corpi reali, caratterizzati da una struttura atomica.

6. Esaminiamo adesso il problema della misurazione del *tempo.* Come tutte le altre grandezze fisiche anche il tempo è misurato da valori numerici. Bisogna prima di tutto precisare in linea di principio quali misure possono determinare i valori numerici richiesti; è la condizione necessaria perché questi valori abbiano un senso preciso.

Per «tempo» si intede — nel senso quantitativo della parola — le indicazioni di un orologio qualsiasi. Sarà quindi più esatto parlare non di tempo, ma di *intervalli di tempo* che separano due eventi o due istanti. Si definisce intervallo di tempo la *differenza* delle indicazioni fornite da un orologio negli istanti considerati. Quando si parla di tempo, senza indicare gli istanti che ne delimitano la durata, si ammette implicitamente che uno di questi istanti sia stato definito e scelto come origine dei tempi. In questo contesto si dà al termine orologio un senso più largo che nella vita quotidiana. *Per orologio si intende ogni corpo o sistema di corpi, sede di un processo periodico utilizzato per misurare il tempo.* Come esempi si possono prendere in esame le oscillazioni di ampiezza costante di un pendolo, la rotazione della Terra attorno al suo asse rispetto al Sole o a una stella, le oscillazioni di un atomo appartenente ad un reticolo cristallino, le oscillazioni di un campo elettromagnetico corrispondente a una riga spettrale sufficientemente fine, ecc. Se tra i due eventi la Terra avrà effettuato, rispetto alle stelle, una rotazione completa, si dirà che l'intervallo di tempo che separa questi due eventi è uguale a un *giorno siderale.* Se, tra i due eventi considerati, la Terra avrà effettuato 10 rotazioni, l'intervallo di tempo che li separa sarà uguale a 10 giorni siderali. Se nel corso di un giorno siderale un pendolo effettua 86 164 oscillazioni, si dice che il periodo di oscillazione è di un *secondo,* ecc. Va notata la differenza tra il giorno siderale e quello *solare* definito come l'intervallo di tempo durante il quale la Terra effettua una rotazione completa attorno al suo asse, valutata rispetto al Sole. Dato che la Terra si muove attorno al Sole su una orbita ellittica e non circolare, il suo moto non è perfettamente uniforme (si veda § 55). Ne deriva che la durata del giorno solare varia da un giorno all'altro nel corso dell'anno solare. Come misura di tempo, dunque, si utilizza il *giorno solare medio* che consta di 24 ore $= 24 \cdot 60 =$ 1440 minuti $= 1440 \cdot 60 =$ $=$ 86 400 secondi.

Ogni orologio deve avere un andamento «*regolare*». Ma che cosa si intende per regolare? Si dice talvolta che il processo periodico utilizzato per scandire il tempo si debba riprodurre ad intervalli di tempo rigorosamente identici. Ora questa definizione non risponde al problema posto, dato che per controllare che gli intervalli di tempo che si susseguono siano uguali tra loro, si deve già disporre di un orologio con marcia perfettamente regolare. Non si può rompere questo circolo vizioso se non introducendo una definizione ad hoc perché non esiste a priori nessuna concezione dello scorrere

regolare del tempo. Si deve dunque *per convenzione* prendere un certo orologio come *campione,* stabilire che esso ha una marcia regolare e servirsene per il campionamento di tutti gli orologi in uso.

In generale non importa quale sia l'orologio scelto come campione. Sembra tuttavia ragionevole pretendere che l'orologio scelto come campione sia di «buona qualità» e soprattutto *facilmente riproducibile.* Questo significa che qualora si costruiscano con cura una grande quantità di orologi campioni, dovrebbero tutti funzionare in maniera identica, indipendentemente dalla data di fabbricazione. Per esempio, la riproducibilità di una clessidra è notevolmente minore di quella di un orologio a pendolo.

Fino a qualche tempo fa veniva utilizzato come campione l'«*orologio astronomico*». Per lungo tempo l'orologio di riferimento fu la rotazione della Terra attorno al suo asse rispetto alle stelle; l'unità di tempo era il *giorno.* Recentemente la rotazione della Terra attorno al suo asse è stata sostituita dal moto orbitale attorno al Sole, con unità fondamentale l'*anno tropicale,* definito come l'intervallo di tempo che scorre tra due passaggi successivi del centro del Sole per il *punto vernale.* Questo procedimento assicurò una migliore riproducibilità, ma una riproducibilità ancora migliore fu ottenuta con l'invenzione degli *orologi a quarzo, molecolari* e *atomici.*

Questi tre tipi di orologi sono dispositivi radiotecnici sofisticati. Non è necessario descrivere i principi del loro funzionamento oppure i dettagli tecnici; è sufficiente indicare che le funzioni del bilanciere o del pendolo nell'orologio a quarzo sono svolte dalle vibrazioni del reticolo cristallino del quarzo, nell'orologio molecolare dalle oscillazioni degli atomi nelle molecole e nell'orologio atomico dalle oscillazioni di un campo elettromagnetico nell'intervallo di strette linee spettrali degli atomi di certi isotopi di elementi chimici che si trovano in condizioni ambientali ben determinate e rigorosamente controllate. Le oscillazioni di quest'ultimo tipo sono le più riproducibili e per questo il loro periodo fu adottato come unità fondamentale di tempo, per mezzo della quale viene determinato il secondo. Il *secondo* è definito allora come l'intervallo di tempo durante il quale l'irradiazione elettromagnetica, corrispondente alla transizione tra due livelli iperfini dello stato fondamentale dell'atomo di cesio 133, in assenza di ogni campo esterno, effettua 9 192 631 770 oscillazioni.

L'introduzione degli orologi a quarzo, molecolari e atomici ha permesso di dimostrare che la rotazione della Terra attorno al suo asse *non è perfettamente regolare.*

7. La situazione è del tutto analoga per l'unità di lunghezza. Siccome non esistono corpi perfettamente rigidi, il campione iniziale del metro, realizzato sotto forma di barra in lega platino-iridio, non è sufficientemente affidabile, in quanto è soggetto all'azione di fattori esterni e la sua struttura molecolare interna può modificarsi. Infine, non è del tutto escluso che si possa deteriorare o smarrire. È perciò di gran lunga preferibile scegliere come unità fondamentale una lunghezza naturale, perfettamente riproducibi-

le. Viene scelta la lunghezza d'onda di una stretta riga spettrale, emessa in condizioni ben determinate. Quindi, partendo da una tale unità fondamentale, si assicura la riproduzione dell'unità pratica di lunghezza, il metro. Per definizione, il *metro* corrisponde a 1 650 763,73 lunghezze d'onda nel vuoto della riga di emissione arancione dell'atomo di kripton-86 che corrisponde alle transizioni tra i livelli $2p_{10}$ e $5d_5$ di questo atomo.

Non è escluso che in un futuro i nostri moderni campioni di tempo e di lunghezza possano non soddisfare esigenze di precisione e di riproducibilità più severe. Allora cercheremo di sostituirli con altri più adatti, ma questo non cambia nulla rispetto ai principi.

8. Per dare una descrizione del moto, nonché di ogni altro fenomeno fisico in evoluzione nel tempo, i soli sistemi di riferimento spaziali non sono sufficienti. È necessario trasformarli in sistemi di riferimento *spazio-temporali*. In linea di principio, per effettuare una tale trasformazione, è sufficiente distribuire nel sistema di riferimento spaziale una quantità sufficiente di orologi immobili aventi lo stesso ritmo. Ogni avvenimento potrebbe allora essere caratterizzato dalle coordinate del luogo dove si è prodotto e dall'istante in cui è avvenuto, cioè dall'indicazione dell'orologio locale. Ma procedendo così si può determinare solo il *tempo locale,* che è il tempo in un punto dato dello spazio. I tempi segnati dagli orologi collocati in differenti punti dello spazio non sono in correlazione. In generale una tale correlazione non è necessaria per descrivere i processi fisici. Ci si potrebbe accontentare del tempo locale in differenti punti dello spazio se si adottano tanti tempi differenti quanti sono i punti. La descrizione che ne risulterebbe sarebbe però talmente confusa da risultare incomprensibile. Per avere una descrizione semplice e chiara, si utilizzerà un tempo *unico in ogni sistema di riferimento spazio-temporale.* Per ottenere questo scopo si devono «*sincronizzare*» gli orologi disposti in differenti punti dello spazio, cioè regolarli in modo che indichino tutti la «stessa» ora.

Può sembrare facile a prima vista sincronizzare degli orologi ripartiti nello spazio. Collochiamo, per esempio, due orologi identici prima in un punto A, dove facciamo in modo che diano le stesse indicazioni, poi ne trasportiamo uno in un punto B. Adesso i nostri due orologi, uno posto nel punto A e l'altro in B, sono sincronizzati. Un tale procedimento di sincronizzazione sarebbe corretto se le indicazioni dell'orologio trasportato non dipendessero dal procedimento utilizzato per passare dal punto iniziale A al punto finale B. Per accertare questo fatto, dobbiamo confrontare le indicazioni fornite dall'orologio trasportato con quelle di due orologi fissi uno in A ed uno in B. Tuttavia i due orologi fissi devono essere preventivamente sincronizzati, e questo ci ripropone esattamente lo stesso problema.

Esaminiamo allora il procedimento di *sincronizzazione degli orologi per mezzo di segnali,* che si può realizzare nel modo seguente. Ad un istante arbitrariamente scelto t_A, si invia verso B un segnale contenente l'informazione sull'ora fornita dall'orologio A. Nell'istante in cui il segnale perviene

in *B,* si regola l'orologio *B* in modo che esso indichi il tempo $t_B = t_A + \tau_{AB}$, dove τ_{AB} è la durata della trasmissione del segnale da *A* a *B*. Ora si potrebbe pensare che i nostri orologi *A* e *B* siano ben sincronizzati. Però, perché una tale sincronizzazione sia effettiva bisogna conoscere la durata τ_{AB} della trasmissione del canale, ma si può determinarla solo se gli orologi sono sincronizzati: ci troviamo nuovamente in un circolo vizioso. Einstein ha mostrato che *per uscirne è necessario definire il concetto di simultaneità.* La fisica prerelativistica poneva la simultaneità degli avvenimenti come assoluta e considerava questo concetto perfettamente esplicito. Einstein dimostrò che questa impostazione era errata. Il concetto di simultaneità è esplicito solo quando gli eventi considerati avvengono in uno stesso punto dello spazio. Ma quando succedono in punti diversi, bisogna adottare una convenzione speciale per giudicare quali eventi possano essere considerati simultanei. È ovvio che la questione della simultaneità di eventi che si verificano in punti diversi dello spazio è equivalente a quella della sincronizzazione di orologi distanti nello spazio.

Ogni soluzione di un problema che si basi su una definizione comporta un certo arbitrio: questo è proprio il caso della determinazione della simultaneità di eventi distanti nello spazio. Il carattere oggettivo delle leggi della Natura non può ovviamente dipendere dall'arbitrio delle definizioni adottate. Esse non possono modificare che la forma di espressione delle leggi; conviene quindi adottare delle definizioni che rendano semplice e chiara l'espressione delle leggi. Questo motivo ci induce ad adottare la definizione di simultaneità avanzata da Einstein nella sua teoria della relatività.

Per la sincronizzazione degli orologi, Einstein ricorre a segnali luminosi che si propagano nel vuoto. Il tempo che impiega un segnale per percorrere l'andata e il ritorno tra *A* e *B* è eguale a $\tau = \tau_{AB} + \tau_{BA}$, dove τ_{BA} è la durata del percorso da *B* a *A*. Per misurare il tempo τ l'orologio *A* è sufficiente e non occorre alcuna sincronizzazione preliminare. Però le durate τ_{AB} e τ_{BA} non possono essere determinate che dopo aver sincronizzato gli orologi *A* e *B*. Noi possiamo ora imporre che τ_{AB} e τ_{BA} siano legate da una relazione. Conoscendo questa relazione e il valore $\tau = \tau_{AB} + \tau_{BA}$, si può calcolare le durate τ_{AB} e τ_{BA}. Ne deriva che gli orologi *A* e *B* saranno sincronizzati e il concetto di simultaneità stabilito. *Einstein stabilisce per definizione, che* $\tau_{AB} = \tau_{BA}$, *il che vuol dire che la luce si propaga da A a B alla stessa velocità che da B a A.* Quindi $\tau_{AB} = \tau_{BA} = \tau/2$ e per conseguenza $t_B = t_A + \tau/2$. Per segnali istantanei (velocità di propagazione infinita) $\tau = 0$ e $t_A = t_B$. Nel caso di segnali che si propagano a una velocità infinitamente grande, la simultaneità degli avvenimenti sarà assoluta, tuttavia non esistono segnali istantanei (a una velocità infinitamente grande).

Secondo Einstein, la sincronizzazione degli orologi non comporta necessariamente la determinazione preliminare della velocità della luce e può essere realizzata nel modo seguente. Sia *C* un punto situato a mezza strada tra i punti *A* e *B* (immobili l'uno rispetto all'altro). Facendo partire da *C*

un lampo di luce, *per definizione,* la luce prodotta arriva simultaneamente nei punti A e B. Pertanto, se saranno identiche le indicazioni degli orologi A e B al momento dell'arrivo della luce uscita da C, questi orologi saranno sincronizzati.

Ogni definizione deve essere non contraddittoria. Se si sincronizzano gli orologi A e B, il terzo orologio C può esserlo o rispetto all'orologio A, oppure rispetto all'orologio B. I due procedimenti devono condurre agli stessi risultati, altrimenti ci si troverebbe in presenza di una contraddizione interna. Una verifica diretta del carattere non contraddittorio della definizione di simultaneità non è stata eseguita poiché la nostra convenzione della non contraddittorietà della definizione di Einstein è basata sulla consistenza logica di numerosi corollari, dedotti da questa definizione.

9. *La simultaneità di eventi lontani nello spazio secondo la definizione di Einstein è relativa.* Questo significa che due eventi che sono simultanei in un sistema di riferimento dato possono non esserlo più in un secondo sistema di riferimento in movimento rispetto al primo. Facciamo un esempio. Supponiamo che un sistema di riferimento S sia legato a un'asta rigida AB e che un altro sistema di riferimente S' sia legato a un'asta rigida $A'B'$ che si muove rispetto a AB (fig. 4). Nell'istante in cui i centri C e C' delle due

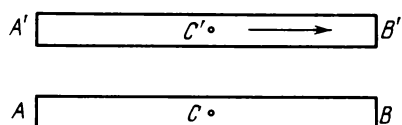



Fig. 4.

aste coincidono tra loro, scaturisce una scintilla in questo punto di coincidenza. Esaminiamo la propagazione di questa luce prima nel sistema di riferimento S. Per definizione di simultaneità, il segnale luminoso arriverà simultaneamente alle due estremità A e B della prima asta. Dunque, siccome l'estremità A' della seconda asta si muove incontro al segnale e la sua estremità B' se ne allontana, il segnale arriverà nel punto A' prima che nel punto B'. Dunque l'esperienza, riferita al sistema S ci porta alla conclusione che il suo arrivo nei punti A' e B' non può esser simultaneo: esso perviene al punto A' prima che al punto B'. La conclusione sarà invece diversa se effettuiamo le nostre osservazioni nel sistema di riferimento S'. Per la definizione adottata, il segnale perverrà nello stesso tempo alle estremità A' e B', ma il suo arrivo al punto B sarà anticipato rispetto al suo arrivo al punto A. Queste conclusioni non sono affatto contraddittorie perché in queste due situazioni la simultaneità viene intesa in senso differente. Vediamo anche che il concetto di simultaneità degli eventi è relativo.

10. *Anche la lunghezza di un corpo è relativa e dipende dal sistema di riferimento in cui viene misurata.* La fisica prerelativistica non si pose l'ob-

biettivo di sapere quale fosse la lunghezza di una asta in moto. La teoria della relatività dimostra che bisogna fare una rigorosa distinzione tra la *lunghezza l_0 di un'asta a riposo,* cioè misurata nel sistema di riferimento rispetto al quale essa è immonile, e la *lunghezza l di una asta in moto,* cioè misurata nel sistema di riferimento rispetto al quale essa si muove. Queste due lunghezze non sono uguali che nel caso limite di movimenti infinitamente lenti. Si determina il valore di l_0 applicando all'asta, quando sia necessario, un campione unitario in quiete rispetto a questa asta. La determinazione di l si riduce alla misura della distanza tra punti immobili. Per stabilirla, si procede nel modo seguente. Si comincerà a segnare nello stesso istante con punti immobili A e B le posizioni delle estremità dell'asta in moto rispetto al sistema di riferimento considerato. Per definizione, la lunghezza dell'asta in moto l sarà uguale alla distanza tra i punti immobili A e B. Se si sceglie un altro sistema di riferimento, dato il carattere relativo del concetto di simultaneità, le estremità dell'asta mobile non passeranno simultaneamente davanti ai punti segnati prima. I punti A e B saranno sostituiti da altri punti A' e B' che risulteranno immobili nel nuovo sistema di riferimento. La distanza l' tra i punti A' e B' sarà in generale differente dal l. In tal modo, *le lunghezze dei segmenti di retta così come gli intervalli di tempo risultano ugualmente relativi.*

11. La fisica prerelativistica considera che gli intervalli di tempo e le lunghezze possono avere solo valori assoluti e che si può parlare di simultaneità degli eventi senza precisare il sistema di riferimento adottato per prenderli in esame. Ugualmente si può parlare della lunghezza di un corpo senza precisare se è immobile o in moto rispetto al sistema di riferimento scelto. Questo punto di vista si basa sulla convinzione implicita che la velocità dei segnali fosse illimitata. Finché si studiano i movimenti lenti, la velocità di propagazione della luce nel vuoto può essere considerata infinitamente grande. In questa approssimazione tutti gli effetti relativistici spariscono. Esporremo in seguito alcuni risultati importanti per la fisica nucleare e la fisica delle particelle elementari. Quanto all'esposizione sistematica della meccanica relativistica, l'affronteremo solo dopo aver studiato i fenomeni elettrici e ottici. Allora saranno esaminati attentamente anche dal punto di vista quantitativo problemi di tempo e di spazio, che noi abbiamo per ora abbozzato solo qualitativamente.

§ 2. *Descrizione cinematica del moto. Il concetto del punto materiale*

1. La *cinematica* è la parte della meccanica dedicata alla descrizione dei moti, senza riferimento alle cause che li determinano. Per descrivere un moto si può utilizzare sistemi di riferimento diversi, ma il moto di uno stes-

so corpo apparirà allora differente a seconda del sistema di riferimento scelto. Nella cinematica la scelta di un sistema di riferimento si basa unicamente su considerazioni suggerite dalle condizioni concrete in cui si effettua il moto considerato. Così, per uno studio del moto dei corpi terrestri sembra più logico legare il sistema di riferimento alla Terra, ed è questo quello che faremo. Quando si tratta del moto della Terra stessa, è comodo legare il sistema di riferimento al Sole e via dicendo. In cinematica non si ha teoricamente nessun vantaggio utilizzando questo o quell'altro sistema di riferimento. Tutti i sistemi di riferimento sono *cinematicamente equivalenti.* Solo nella *dinamica* (parte della meccanica dedicata allo studio dei moti sotto l'azione delle forze che agiscono sui corpi in moto) appaiono i vantaggi di principio di certi sistemi di riferimento o, piuttosto, di certe classi di sistemi di riferimento.

2. Nella meccanica classica l'oggetto più semplice di cui si può studiare il moto è il punto materiale. Si intende per *punto materiale* un corpo macroscopico le cui dimensioni sono sufficientemente piccole da poter essere trascurate nello studio del moto, ciò equivale ad ammettere che la totalità della massa di questo corpo si può considerare concentrata in un punto. Non esistono punti materiali in Natura, e quindi la definizione data è una astrazione, una rappresentazione idealizzata dei corpi reali. Ci si può chiedere quali corpi si possano assimilare a un punto materiale nello studio dei loro moti. La risposta a questa domanda dipende, da una parte, dal carattere proprio del moto e, d'altra parte, dallo scopo perseguito. Le dimensioni assolute importano poco, ciò che conta sono le *dimensioni relative:* il rapporto tra le dimensioni reali dei corpi e le distanze caratteristiche del moto studiato. Per esempio nello studio del moto orbitale della Terra attorno al Sole il nostro pianeta può essere assimilato ad un punto materiale con grandissima precisione. La distanza caratteristica è in questo caso il raggio dell'orbita terrestre $R \approx 1{,}5 \cdot 10^8$ km. Siccome questa lunghezza è molto grande rispetto al raggio della Terra $r \approx 6{,}4 \cdot 10^3$ km, allora nel moto orbitale tutti i punti della Terra si muovono praticamente in maniera identica. È sufficiente, dunque, considerare il moto di un solo punto, per esempio quello del centro della Terra, ed ammettere che tutta la materia della Terra sia, per così dire, concentrata in questo punto. Un tale approccio semplifica notevolmente il problema del moto orbitale della Terra, senza modificarne i tratti essenziali. Ma questa approssimazione non è più valida quando si tratta del moto di rotazione della Terra attorno al proprio asse, perché non ha senso parlare della rotazione di un punto attorno ad un asse quando questo asse passa per il punto considerato.

Abbiamo incluso nella definizione di punto materiale la condizione che questo punto sia un *corpo macroscopico.* Abbiamo introdotto questa condizione allo scopo di utilizzare la meccanica classica. Tuttavia, in un gran numero di casi, anche il moto delle microparticelle può essere trattato dalla meccanica classica. Per esempio, il moto degli elettroni, dei protoni o degli

ioni negli acceleratori di particelle o nei dispositivi elettronici e ionici. Le microparticelle possono allora essere assimilate ai punti materiali della meccanica classica.

3. Nella fisica classica la meccanica del punto materiale o *meccanica del punto* è la base di tutta la meccanica. Dal punto di vista della fisica classica ogni corpo macroscopico oppure ogni sistema di corpi può essere suddiviso mentalmente in parti, in interazione le une con le altre. Ciascuna di queste parti può essere assimilata ad un punto materiale, così che lo studio del moto di un sistema di corpi risulta ricondotto a quello di un sistema di punti materiali che interagiscono tra loro. Quindi, è logico cominciare lo studio della meccanica classica da quello del moto di un punto materiale, per passare in seguito allo studio del moto di un sistema di punti.

Scegliamo un sistema di riferimento e riferiamo a questo sistema il moto del punto materiale. La descrizione di questo moto sarà completa se sapremo in ogni istante la posizione del punto rispetto al sistema di riferimento scelto. Per convenzione, noi definiremo la posizione del punto con sue coordinate cartesiane x, y, z che sono le proiezioni del raggio vettore $\mathbf{r}$ sugli assi delle coordinate. Perché la descrizione del moto del punto sia completa bisogna determinare la variazione delle coordinate x, y e z in funzione del tempo t

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t) \tag{2.1}$$

oppure con notazione vettoriale

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t). \tag{2.2}$$

Per stabilire le leggi fondamentali della meccanica la cui conoscenza permette di determinare con il calcolo la forma di queste funzioni, dobbiamo introdurre due nozioni: la nozione di *velocità* e quella di *accelerazione*.

§ 3. *Velocità ed accelerazione nel caso di un moto rettilineo. Velocità ed accelerazione angolari*

1. Considereremo prima il caso particolare del moto di un punto materiale lungo una retta che noi faremo coincidere con l'asse delle coordinate X la cui origine si trova in un punto O scelto arbitrariamente sulla stessa retta (fig. 5). La posizione del punto materiale è allora determinata da una sola coordinata

$$x = x(t). \tag{3.1}$$

Sia A_1 la posizione del punto a un istante t. La sua coordinata sarà allora $x_1 = x(t)$. A un istante successivo il punto materiale occuperà la posizione A_2 di coordinata $x_2 = x(t + \Delta t)$. Durante l'intervallo di tempo Δt il pun-

to materiale percorre sulla retta un tratto $\Delta x = x_2 - x_1 = x(t + \Delta t) - x(t)$. Questo tratto sarà considerato positivo se il punto si muoverà verso destra, negativo se si sposterà a sinistra. Il rapporto tra il tratto Δx percorso dal punto e l'intervallo di tempo Δt è definito *velocità media del punto materiale tra gli istanti t e $t + \Delta t$.* Per definizione, la velocità media è dunque uguale a

$$v_{\text{med}} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}. \tag{3.2}$$

Una tale definizione di velocità media resta valida qualsiasi sia il valore di Δt; è necessario escludere il valore $\Delta t = 0$ perché la velocità media risulterebbe uguale a 0/0, che non ha significato. Ma si può ridurre l'intervallo di

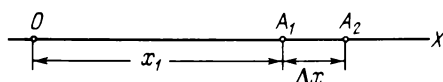



Fig. 5.

tempo Δt quanto si vuole, senza che divenga uguale a zero. La velocità media dipende in generale non soltanto da t, ma anche da Δt. Consideriamo t come fisso e prendiamo degli intervalli di tempo Δt sempre più piccoli facendoli tendere a zero; simultaneamente anche il tratto Δx percorso dal punto tende a zero. L'esperienza mostra che il rapporto $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ tende allora ad un limite ben determinato che non dipende che da t e non da Δt. Questo limite è la *velocità vera o istantanea del punto materiale nell'istante t*

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}. \tag{3.3}$$

Limiti come (3.3) si incontrano spesso nella matematica e nelle sue varie applicazioni. Nella matematica il limite definito dalla formula (3.3) porta il nome di *derivata* della funzione $x(t)$ rispetto alla variabile t. La derivata rispetto al tempo è designata dal simbolo $\dot{x}(t)$ o dx/dt. Quindi si ha per definizione

$$\dot{x} \equiv \frac{dx}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}. \tag{3.4}$$

La nozione di derivata è la nozione fondamentale del *calcolo differenziale*. Utilizzando questa nozione, si può dire che la *velocità vera* (o *istantanea*) v è la derivata della coordinata x rispetto al tempo o ancora la derivata rispetto al tempo dello spazio s percorso dal punto mobile

$$v = \dot{x} = \frac{dx}{dt} = \frac{ds}{dt}. \tag{3.5}$$

La velocità di un punto materiale dipende in generale dal tempo, $v = v(t)$. La derivata della velocità rispetto al tempo porta il nome di *accelerazione del punto materiale* e si denota con a. Quindi per definizione di accelerazione

$$a = \frac{dv}{dt} = \dot{v}(t) \tag{3.6}$$

o meglio

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t}. \tag{3.7}$$

La derivata (3.6) è la *derivata seconda* della coordinata x rispetto al tempo e viene rappresentata dai simboli

$$a = \ddot{x} \equiv \frac{d^2x}{dt^2}. \tag{3.8}$$

In meccanica e in generale in fisica si giustifica l'esistenza delle derivate prima e seconda della coordinata rispetto al tempo non attraverso ragionamenti, ma per via sperimentale.

2. Prendiamo in esame qualche semplice esempio.

Esempio 1. $x =$ cost, il che significa che la coordinata x è invariabile nel tempo. Il punto materiale è quindi immobile e l'incremento Δx della coordinata è nullo. Le velocità media e vera del punto sono nulle: $v = \dot{x} = 0$. Quindi, la derivata di una quantità costante è nulla.

Esempio 2. $x = Bt + C$, dove B e C sono dei coefficienti costanti. Si dice allora che la coordinata x è una *funzione lineare* del tempo t. È evidente che

$$x + \Delta x = B(t + \Delta t) + C = (Bt + C) + B\,\Delta t, \quad \Delta x = B\,\Delta t, \quad v_{med} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = B.$$

La velocità media è costante e uguale a B. Quindi, la velocità vera è anch'essa costante e uguale alla velocità media

$$v = \frac{dx}{dt} = v_{med} = B.$$

Un moto a velocità costante è detto *uniforme*. Chiamando x_0 la coordinata iniziale x all'istante $t = 0$, si ha evidentemente $x_0 = C$. Il tratto s percorso dal punto è determinato dall'incremento della coordinata, $s = x - x_0 = Bt$, ossia

$$s = vt.$$

Esempio 3. $x = At^2 + Bt + C$, dove A, B e C sono dei coefficienti costanti. In questo caso si dice che la coordinata x è una *funzione quadratica* del tempo t. È evidente che

$$x + \Delta x = A(t + \Delta t)^2 + B(t + \Delta t) + C =$$
$$= (At^2 + Bt + C) + (2At + B)\Delta t + A(\Delta t)^2,$$
$$v_{med} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = (2At + B) + A\,\Delta t.$$

Noi vediamo che la velocità media v_{med} dipende non solo da t, ma anche da Δt. Al limite, quando $\Delta t \to 0$, il termine $A\,\Delta t$ s'annulla e la velocità vera del mobile si esprime

$$v = 2At + B.$$

Siccome la velocità vera è una funzione lineare del tempo t, differenziandola noi otteniamo per l'accelerazione un valore costante

$$a = \frac{dv}{dt} = 2A.$$

Il moto ad accelerazione costante è chiamato moto *uniformemente accelerato*. La costante A è uguale alla metà dell'accelerazione: $A = a/2$. Chiariremo ora il significato fisico delle costanti B e C. Avendo $t = 0$ otteniamo dalle nostre formule $v = B$. La velocità del mobile all'istante $t = 0$ si chiama *velocità iniziale* e viene indicata con v_0. Ne deriva che la costante B è uguale alla velocità iniziale v_0, $B = v_0$. Viene dimostrato nello stesso modo che la costante C rappresenta la coordinata iniziale del mobile, $C = x_0$. Introducendo queste grandezze si può scrivere

$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0, \qquad v = at + v_0.$$

Il tratto percorso dal mobile è uguale a $s = x - x_0$, cioè

$$s = \frac{1}{2}at^2 + v_0t.$$

Come esempio di moto uniformemente accelerato citeremo la caduta libera di un corpo ed il rotolamento di un corpo su di un piano inclinato in assenza di attrito.

3. Per analogia con le nozioni di velocità ed accelerazione *lineari* si introducono le nozioni di *velocità* e *accelerazione angolari* che riguardano il moto di un punto materiale lungo una circonferenza. La posizione del pun-

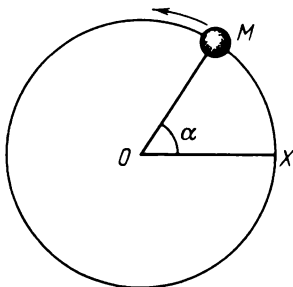



Fig. 6.

to M sulla circonferenza si può definire attraverso l'angolo α che il raggio vettore OM forma con una direzione fissa OX (fig. 6). La derivata rispetto al tempo di questo angolo

$$\omega = \frac{d\alpha}{dt}$$

si chiama *velocità angolare*. La rotazione è detta *uniforme* se la velocità angolare ω è costante. In questo caso $\alpha = \omega t + \text{cost}$. Nel caso di moto circolare uniforme la grandezza ω porta anche il nome di *frequenza angolare* o di pulsazione. Il valore $\nu = \omega/(2\pi)$, che è uguale al numero di giri per unità di tempo, si chiama *frequenza di rotazione*. Il valore $T = 1/\nu$ è la durata di una rotazione e porta il nome di *periodo di rotazione*.

La derivata prima della velocità angolare ω o derivata seconda dell'angolo α rispetto al tempo è detta *accelerazione angolare*

$$\omega = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\alpha}{dt^2}.$$

Detta s la lunghezza dell'arco XM della circonferenza, le derivate di s rispetto al tempo $v = \dfrac{ds}{dt}$ e $a = \dfrac{d^2s}{dt^2}$ rappresentano la velocità lineare e l'accelerazione lineare di un mobile che si sposta lungo una circonferenza. Se r è il raggio della circonferenza, si ha $s = r\alpha$. Differenziando questa relazione rispetto al tempo, si ottengono

$$v = \omega r \quad \text{e} \quad a = \dot{\omega} r.$$

§ 4. *Velocità ed accelerazione nel moto curvilineo*

1. Le nozioni di velocità e di accelerazione possono essere estese senza difficoltà al caso del moto di un punto materiale lungo una *traiettoria curvilinea*. Noi definiremo la posizione del punto mobile sulla traiettoria con raggio vettore $\boldsymbol{r}$ che collega il punto mobile con un punto fisso O che si prende per convenzione come origine delle coordinate (fig. 7). Supponiamo che all'istante t il punto materiale si trovi nella posizione M definita dal raggio vettore $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t + \Delta t)$. A seguito di questo spostamento si ha un incremento del raggio vettore dato dalla differenza geometrica $\Delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}$. La grandezza

$$\boldsymbol{v}_{\text{med}} = \frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t} = \frac{\boldsymbol{r}(t + \Delta t) - \boldsymbol{r}(t)}{\Delta t} \tag{4.1}$$

è la *velocità media del punto durante l'intervallo di tempo* Δt, *compreso tra gli istanti* t *e* $t + \Delta t$. Questa è una grandezza *vettoriale* poiché si ottiene dividendo il vettore $\Delta\boldsymbol{r}$ per lo scalare Δt. La direzione della velocità media $\boldsymbol{v}_{\text{med}}$ coincide con quella della corda MM_1, cioè con quella di $\Delta\boldsymbol{r}$.

Il limite della velocità media con $\Delta t \to 0$, che è ia derivata del raggio vettore $\boldsymbol{r}$ rispetto al tempo

$$\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{r}} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}, \tag{4.2}$$

è la *velocità vera del punto materiale. La velocità vera è un vettore diretto lungo la tangente alla traiettoria del punto mobile.*

Si definisce nello stesso modo l'accelerazione nel moto curvilineo. *L'accelerazione a è un vettore che è uguale alla derivata prima del vettore velocità v o alla derivata seconda del raggio vettore r rispetto al tempo*

$$a = \dot{v}(t) = \frac{dv}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}, \tag{4.3}$$

$$a = \ddot{r}(t) = \frac{d^2 r}{dt^2}. \tag{4.4}$$

2. Esiste un'analogia formale tra la velocità e l'accelerazione. Dal punto O_1 fissato arbitrariamente tracciamo i vettori equivalenti ai vettori velocità v del *punto mobile*, ad ogni istante (fig. 8). Il luogo geometrico delle

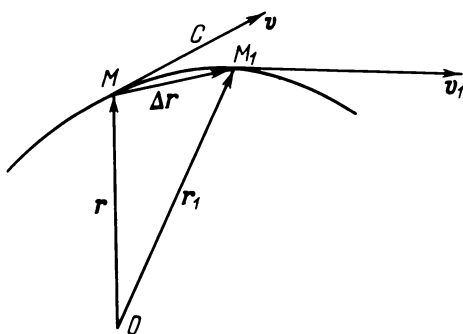



Fig. 7.

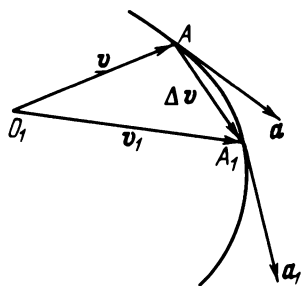



Fig. 8.

estremità dei vettori è una curva chiamata *curva odografa del moto*. Quando il punto mobile descrive la sua traiettoria, l'estremità dei vettori equivalenti ai vettori velocità dello stesso punto si sposta lungo la curva odografa. Dunque le curve delle figure 7 e 8 non si distinguono l'una dall'altra tranne che per i simboli utilizzati. Sulla figura 8 il vettore velocità v sostituisce il raggio vettore r della figura 7, l'estremità del vettore velocità sostituisce il punto mobile, e l'odografo sostituisce la traiettoria. Le operazioni matematiche sul raggio vettore r, che si effettuano per calcolare la velocità del mobile, sono identiche a quelle che si applicano ai vettori velocità v per calcolare l'accelerazione. Dal punto di vista della matematica il significato fisico che possano avere le grandezze che figurano nei calcoli o i simboli con i quali vengono rappresentate importano poco. Per calcolare la velocità v del mobile bisogna derivare il raggio vettore r e per calcolare la sua accelerazione si esegue la derivata del vettore velocità v. Siccome la velocità v è diretta lungo la tangente alla traiettoria, *l'accelerazione a sarà tangente*

all'odografo. Ne deriva dunque che *tutte le relazioni e tutti i teoremi che si possono stabilire per la velocità resteranno validi per l'accelerazione, a condizione di effettuare le sostituzioni seguenti:*

Punto mobile → Estremità del vettore velocità
Raggio vettore → Vettore velocità
Traiettoria → Odografo
Velocità → Accelerazione

3. A titolo di semplice esempio determiniamo l'accelerazione di un punto in moto uniforme su una traiettoria circolare di raggio r (fig. 9, *a*). La velocità v è diretta lungo la tangente al cerchio e ha per valore

$$v = \omega r = \frac{2\pi r}{T}. \tag{4.5}$$

L'odografo sarà un cerchio di raggio v (fig. 9, *b*). Quando il punto materiale M descrive nel tempo T il cerchio di raggio r l'estremità del vettore

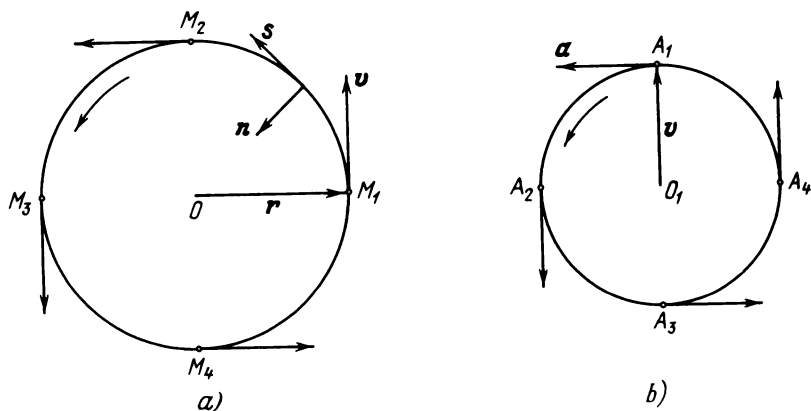



Fig. 9.

velocità A gira nello stesso senso e percorre un cerchio di raggio v nello stesso tempo T. Alle posizioni successive M_1, M_2, M_3, M_4 del mobile sulla traiettoria corrispondono le posizioni A_1, A_2, A_3, A_4 dell'estremità del vettore v sull'odografo. L'accelerazione $\boldsymbol{a}$ è diretta secondo la tangente all'odografo, che è un cerchio di raggio v, ed è diretta inoltre verso il cento O della traiettoria circolare del mobile M. Per analogia con la formula (4.5) il valore dell'accelerazione si esprime attraverso la formula

$$\boldsymbol{a} = \omega v = \frac{2\pi v}{T} = \frac{v^2}{r}. \tag{4.6}$$

È la formula ben nota dell'*accelerazione centripeta* che in forma vettoriale si scrive

$$\boldsymbol{a} = -\omega^2 \boldsymbol{r}. \tag{4.7}$$

Il segno «meno» indica che i vettori $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{r}$ sono di senso opposto, cioè che l'accelerazione $\boldsymbol{a}$ è diretta verso il centro della traiettoria circolare del punto mobile. Per ogni posizione del punto mobile si può esprimere la sua accelerazione con l'espressione

$$\boldsymbol{a} = \frac{v^2}{r}\boldsymbol{n}, \tag{4.8}$$

dove $\boldsymbol{n}$ è il vettore unitario normale alla traiettoria circolare e diretto verso il centro O (si veda fig. 9, a).

In previsione di generalizzazioni, che spiegheremo più avanti, rappresentiamo il vettore velocità nella forma $\boldsymbol{v} = v\boldsymbol{s}$, dove $\boldsymbol{s}$ è un vettore unitario diretto secondo la tangente al cerchio. Il fattore v determina il modulo della velocità e il fattore $\boldsymbol{s}$ determina la sua direzione ed il suo verso. Per un moto circolare uniforme, il modulo v della velocità è costante, mentre varia la direzione del vettore unitario $\boldsymbol{s}$. Quindi eseguendo la derivata ed essendo v costante, l'accelerazione viene espressa da $\boldsymbol{a} = v\frac{d\boldsymbol{s}}{dt}$. Paragonando questa espressione con la (4.8) si trova

$$\frac{d\boldsymbol{s}}{dt} = \frac{v}{r}\boldsymbol{n}. \tag{4.9}$$

Chiamiamo ds la lunghezza percorsa dal punto mobile (su una traiettoria circolare) nell'intervallo di tempo dt. Questa è una quantità positiva uguale a $ds = vdt$; quindi la formula (4.9) si può riscrivere

$$\frac{d\boldsymbol{s}}{ds} = \frac{1}{r}\boldsymbol{n}. \tag{4.10}$$

Quest'ultima formula non racchiude alcuna quantità cinematica, poiché non vi figurano che quantità geometriche caratterizzanti il cerchio. Si può quindi dimostrarla attraverso una costruzione puramente geometrica senza ricorrere ai concetti della cinematica. Questa formula determina la derivata del vettore unitario $\boldsymbol{s}$ tangente ad un arco di cerchio. I vettori $\boldsymbol{s}$ e $\frac{d\boldsymbol{s}}{ds}$ $\left(\text{o } \frac{d\boldsymbol{s}}{dt}\right)$ sono ortogonali, poiché il modulo di $\boldsymbol{s}$ è costante, e solo la sua direzione varia. Il triangolo costruito con i vettori $\boldsymbol{s}$, $\boldsymbol{s} + \Delta\boldsymbol{s}$ e $\Delta\boldsymbol{s}$ (fig. 10) è un triangolo isoscele. Quando l'elemento d'arco Δs tende a zero, l'angolo al centro α tende a zero. Quindi, la direzione del vettore $\frac{\Delta\boldsymbol{s}}{\Delta s}$ diventa,

al limite, normale a quella del vettore $\boldsymbol{s}$. Questa proprietà non è certo una proprietà specifica del vettore unitario $\boldsymbol{s}$. La derivata di ogni vettore $\boldsymbol{A}$, di lunghezza costante, rispetto ad ogni variabile scalare è un vettore normale al vettore $\boldsymbol{A}$.

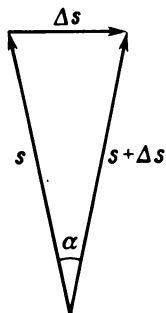



Fig. 10.

4. Si può generalizzare la formula (4.10) ad ogni curva differenziabile. Conserviamo la notazione $\boldsymbol{s}$ per indicare il vettore unitario tangente alla curva e la notazione ds per l'elemento d'arco di questa curva. La derivata $\frac{d\boldsymbol{s}}{ds}$ è un vettore normale alla concavità della curva. Questa derivata può essere espressa con la formula (4.10) supponendo che la quantità $1/r$ sia un fattore di proporzionalità tra i vettori $\frac{d\boldsymbol{s}}{ds}$ e $\boldsymbol{n}$. Questa formula esprime semplicemente il fatto che la derivata $\frac{d\boldsymbol{s}}{ds}$ è un vettore normale alla curva. D'altronde, questa formula permette di definire due nozioni nuove: il fattore $1/r$ e il vettore unitario $\boldsymbol{n}$. La quantità $1/r$ è la *curvatura*, r è il *raggio di curvatura* ed $\boldsymbol{n}$ è il *vettore unitario della normale principale* alla curva. Si stabilisce che la curvatura $1/r$ sia una quantità essenzialmente positiva e, quindi, il vettore unitario $\boldsymbol{n}$ sia sempre diretto verso la concavità della curva. Questa terminologia è giustificata poiché intuitivamente in ogni studio di curvatura si può assimilare un arco elementare di curva ad un arco di cerchio. Questa approssimazione è tanto più valida quanto più l'elemento d'arco Δs è piccolo. Per un cerchio la curvatura $1/r$ è costante in ogni punto. Per una curva differenziabile di forma arbitraria, la curvatura varia da un punto all'altro e pertanto variano senza discontinuità la direzione e il senso del vettore unitario $\boldsymbol{n}$ della normale principale. La formula cinematica (4.9) resta valida per descrivere il moto di un punto lungo qualsiasi curva, la velocità v potendo essere sia costante che variabile nel tempo. In effetti la formula (4.10) si deduce dalla (4.9) ponendo $ds = vdt$.

Si sa che le curve si suddividono in curve piane ed in curve sghembe. Quando tutti i punti di una curva giacciono su di un solo piano, si dice che

la curva è *piana,* quando invece questo non accade, si dice che la curva è *sghemba.* Il cerchio, l'ellisse, l'iperbole, la parabola, la sinusoide, ecc., sono delle curve piane, mentre l'elica è una curva sghemba. Si chiama «piano osculatore» ad una curva in un suo punto il piano definito dalla tangente e dalla normale principale nel punto considerato. Nel caso di una curva piana, il piano osculatore in un punto qualsiasi coincide con il piano della curva stessa. La nozione di piano osculatore si deduce dalle considerazioni intuitive seguenti. È ben chiaro che nessun elemento d'arco finito di una curva sghemba può essere contenuto in un piano. Più l'elemento d'arco è piccolo, minore è l'errore che si commette approssimandolo con la sua proiezione su di un piano. Così si arriva alla nozione approssimata di piano osculatore. Questa rappresentazione intuitiva si può trasformare in una definizione esatta per mezzo di un passaggio al limite. Sia M un punto qualunque della curva (fig. 7) e siano MC la tangente alla curvatura in M e MM_1 una corda. Queste due rette definiscono un piano CMM_1. Se si avvicina indefinitamente il punto M_1 al punto M, otteniamo per questo piano una posizione limite che è proprio quella del piano osculatore. La normale al piano osculatore in M è chiamata binormale alla curva in questo punto.

5. Nel caso di una rotazione uniforme del punto mobile lungo un cerchio, l'accelerazione è diretta verso il centro del cerchio, quindi normalmente alla traiettoria. Qualsiasi sia la forma della traiettoria, l'accelerazione del mobile sarà normale alla traiettoria se il modulo della sua velocità è costante. Vediamo che cosa accade se il modulo della velocità varia lungo la traiettoria. Scriviamo il vettore velocità nella forma $\boldsymbol{v} = v\boldsymbol{s}$. Applicando a questa uguaglianza la regola di derivazione di un prodotto, otteniamo

$$\boldsymbol{a} = \frac{d}{dt}(v\boldsymbol{s}) = \frac{dv}{dt}\boldsymbol{s} + v\frac{d\boldsymbol{s}}{dt},$$

e tenendo conto della (4.9)

$$\boldsymbol{a} = \frac{dv}{dt}\boldsymbol{s} + \frac{v^2}{r}\boldsymbol{n}. \tag{4.11}$$

Questo risultato dimostra che *il vettore accelerazione* $\boldsymbol{a}$ *è contenuto nei piani definiti dai vettori* $\boldsymbol{s}$ *e* $\boldsymbol{n}$ *e questo piano è il piano osculatore. Il vettore* $\boldsymbol{a}$ *non ha nessuna componente sulla binormale alla traiettoria.* Nel caso generale il vettore $\boldsymbol{a}$ forma un angolo con la traiettoria. Il primo termine che figura nella (4.11)

$$\boldsymbol{a}_t = \frac{dv}{dt}\boldsymbol{s} \tag{4.12}$$

è un vettore diretto secondo la tangente alla traiettoria, viene chiamato *accelerazione tangenziale.* Il secondo termine

$$\boldsymbol{a}_n = \frac{v^2}{r}\boldsymbol{n} \tag{4.13}$$

è un vettore diretto secondo la normale principale e rivolto verso la concavità della traiettoria, viene chiamato *accelerazione normale.* Quindi, nel caso generale, *l'accelerazione a può essere rappresentata sotto forma di somma geometrica dell'accelerazione normale e dell'accelerazione tangenziale*

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_t + \boldsymbol{a}_n. \tag{4.14}$$

L'accelerazione tangenziale non fa variare che il modulo della velocità, mentre l'accelerazione normale non fa variare che la sua direzione.

La figura 11 illustra la decomposizione dell'accelerazione totale di un punto mobile in accelerazione tangenziale e normale. Sia $\boldsymbol{v}$ la velocità del

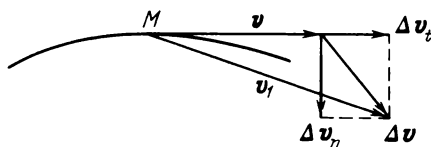



Fig. 11.

punto mobile che si trova in M nell'istante t. In un istante successivo $t + \Delta t$ la velocità del mobile che si trova ora in M_1 (non indicato sulla figura) sarà $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v} + \Delta\boldsymbol{v}$. Conduciamo dallo stesso punto M i due vettori $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{v}_1$ e decomponiamo l'incremento $\Delta\boldsymbol{v}$ della velocità in due componenti: la componente $\Delta\boldsymbol{v}_t$ diretta lungo il vettore $\boldsymbol{v}$ e la componente $\Delta\boldsymbol{v}_n$ diretta lungo la normale a questo vettore. Quando facciamo tendere Δt a zero, i rapporti $\frac{\Delta\boldsymbol{v}_t}{\Delta t}$ e $\frac{\Delta\boldsymbol{v}_n}{\Delta t}$ tendono a limiti determinati. Il limite del primo rapporto è l'accelerazione tagenziale e quello del secondo è l'accelerazione normale.

Nei calcoli della velocità di un punto mobile, l'elemento d'arco infinitamente piccolo di traiettoria può essere sostituito da un segmento di retta infinitamente corto la cui direzione è quella della tangente alla traiettoria nel punto considerato. Tale approssimazione non è più utilizzabile nei calcoli dell'accelerazione. Le considerazioni che precedono dimostrano però che un elemento d'arco infinitamente piccolo di traiettoria può essere sostituito da un arco del cerchio che è contenuto nel piano osculatore e il cui raggio è uguale al raggio di curvatura della traiettoria nel punto considerato. Tale approssimazione diviene inaccettabile per il calcolo delle derivate superiori del raggio vettore: $\dddot{\boldsymbol{r}}$, $\ddddot{\boldsymbol{r}}$ ecc.

Problemi

1. Sia data una palla in movimento, con una velocità orizzontale v, che cade da un'altezza h su di un piano orizzontale. L'urto della palla contro il piano si accompagna ad una perdita di velocità (il rapporto della componente verticale della velocità dopo l'urto al suo valore prima dell'urto è una costante α).

Calcolare a che distanza x dal punto di caduta la palla non rimbalzerà più. Si supponga che non vi sia attrito: ciò implica che la componente orizzontale della velocità della palla non varia.

Risposta: $x = v\sqrt{\frac{2h}{g}}\,\frac{1+\alpha}{1-\alpha}$.

2. Prendiamo un punto che si muove in un piano; le coordinate cartesiane del punto mobile siano definite dalle equazioni

$$x = A\cos\omega t, \qquad y = B\sin\omega t, \tag{4.15}$$

dove A, B, ω sono delle costanti. Determinare la traiettoria del punto mobile e la sua accelerazione.

Soluzione. Eliminando il tempo t dalle equazioni (4.15) si ottiene

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1.$$

Il punto si muove lungo un'ellissi. Il suo raggio vettore è $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}$ e la sua accelerazione è $\boldsymbol{a} = \ddot{x}\boldsymbol{i} + \ddot{y}\boldsymbol{j}$. Differenziamo due volte le equazione (4.15)

$$\dot{x} = -\omega A\sin\omega t, \qquad \ddot{x} = -\omega^2 A\cos\omega t = -\omega^2 x,$$

$$\dot{y} = \omega B\cos\omega t, \qquad \ddot{y} = -\omega^2 B\sin\omega t = -\omega^2 y.$$

Quindi

$$\boldsymbol{a} = -\omega^2(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}) = -\omega^2\boldsymbol{r}. \tag{4.16}$$

L'accelerazione è diretta verso il centro dell'ellisse ed è proporzionale a $\boldsymbol{r}$. Nel caso particolare in cui $A = B$ l'ellisse si riduce a un cerchio e la formula (4.16) si riconduce alla formula conosciuta dell'accelerazione centripeta in un moto circolare uniforme.

3. Determinare la relazione esistente tra il giorno solare medio e il giorno siderale. L'*anno siderale*, che è l'intervallo di tempo che trascorre fra due passaggi consecutivi del Sole nello stesso punto dell'orbita apparente, vale 365, 2564 giorni solari medi. (Si deve distinguere l'anno siderale e l'*anno tropicale* che è l'intervallo del tempo che separa due equinozi di primavera consecutivi e che vale 365, 2422 giorni solari medi.)

Soluzione. Supponiamo che nella posizione *1* della figura 12 il piano AB del meridiano terrestre passi per il centro C del Sole e di una stella D che si trova all'infinito. Quando la Terra, durante il suo moto orbitale, si troverà nella posizione *2* il piano del meridiano considerato sarà ruotato di un angolo α rispetto alla direzione della stella e di un angolo β rispetto alla retta che lo collega al centro del Sole. Gli angoli α e β possono divenire superiori a 2π, ma soddisfano sempre la relazione $\alpha = \beta + \gamma$, dove γ è l'angolo tra le posizioni *1* e *2* rispetto al centro del Sole. Trascorso un anno siderale, quando la Terra tornerà nel piano iniziale *1CD*, l'angolo γ diventerà 2π e, quindi, in questa posizione $\alpha = \beta + 2\pi$. A questo intervallo di tempo corrispondono $N_{sid} = \alpha/2\pi$ giorni siderali e $N_{sol} = \beta/2\pi$ giorni solari medi. Quindi $N_{sid} = N_{sol} + 1$. Se si indica con T_{sid} la durata del giorno siderale e con T_{sol} la durata del giorno solare medio, è evidente che $N_{sid}\cdot T_{sid} = N_{sol}\cdot T_{sol}$, poiché questi due prodotti rappresentano ambedue l'anno siderale. Per mezzo dell'uguaglianza $N_{sid} = N_{sol} + 1$ si ottiene

$$T_{sid} = \frac{N_{sol}}{N_{sol}+1}T_{sol}, \qquad T_{sol} - T_{sid} = \frac{1}{N_{sol}+1}T_{sol}.$$

Sostituendo i valori $T_{sol} = 24\cdot 60\cdot 60 = 86\,400$ s, $N_{sol} = 365,2564$ si ottiene

$$T_{sol} - T_{sid} = 235{,}9003 \text{ s} \approx 236 \text{ s}, \qquad T_{sid} \approx 86\,164 \text{ s}.$$

Si noterà che per questo calcolo non è stato necessario supporre che il moto della Terra lungo la sua orbita sia uniforme.

4. Determinare la velocità di spostamento dell'ombra della Luna sulla superficie terrestre durante un'eclisse totale di Sole.

Soluzione. Ammettiamo per semplificare che l'eclisse sia osservato all'equatore e che l'asse terrestre sia perpendicolare ai piani delle orbite del Sole e della Luna. Consideriamo la velocità della luce infinitamente grande in confronto a tutte le altre velocità che figurano nel nostro problema. Supponiamo che a un istante dato la retta che passa per il Sole e la Luna sia perpendicolare alla supperficie terrestre nel punto di osservazione A (fig. 13). Possiamo am-

Fig. 12.

Fig. 13.

mettere che in vicinanza del punto A la superficie della Terra sia piana. Effettueremo i nostri calcoli adottando un sistema di riferimento rispetto al quale la Terra è in stato di quiete. Siano ω_S e ω_L le velocità angolari del Sole e della Luna attorno al centro della Terra, R_S e R_L le loro distanze proprio dal centro della Terra e, infine, r il raggio della Terra. In un secondo il Sole e la Luna si sposteranno da est a ovest a una distanza $SS' = \omega_S R_S$ e $LL' = \omega_L R_L$. Collegando con una retta le nuove posizioni del Sole e della Luna, noi troveremo che il bordo dell'ombra della Luna si sposta sulla superficie terrestre nel senso ovest-est a una distanza $v = AA'$. Questa distanza è la velocità del moto dell'ombra della Luna. Dalla figura 13 risulta che

$$\frac{v}{\omega_S R_S} = \frac{x}{OS} \approx \frac{x}{R_S},$$

poiché la distanza Terra-Luna è piccola rispetto alla distanza Terra-Sole si può porre $OS = R_S$. Quindi, $v = \omega_S x$. Per trovare x prenderemo i rapporti

$$\frac{\omega_S R_S}{\omega_L R_L} = \frac{SS'}{LL'} = \frac{OS}{OL}.$$

Ponendo $OS = R_S$, $OL = R_L - x - r$, troveremo l'equazione per x

$$x = \frac{\omega_S - \omega_L}{\omega_S} R_L - r.$$

La velocità di spostamento dell'ombra della Luna dall'ovest verso l'est è dunque

$$v = \omega_S x = (\omega_S - \omega_L) R_L - \omega_S r.$$

Noi abbiamo $\omega_S = \dfrac{2\pi}{T_g}$, $\omega_S - \omega_L = \dfrac{2\pi}{T_{mens}}$, con $T_g = 86\,400$ s, la durata del giorno solare e $T_{mens} = 29{,}6\ T_g$, la durata di un mese. Utilizzando questa relazione e sostituendo i valori numerici $R_L = 3{,}8 \cdot 10^5$ km, $r = 6400$ km, noi otterremo

$$v = \frac{2\pi R_L}{T_{mens}} - \frac{2\pi r}{T_g} \approx 0{,}47 \text{ km/s}. \tag{4.17}$$

Per meglio apprezzare il significato di questo risultato, conviene passare al sistema di riferimento rispetto al quale il Sole è immobile. Supponendo che il Sole si trovi a una distanza infinita, noi possiamo ignorare il moto del centro della Terra e badare solo alla sua rotazione attorno al proprio asse e al moto della Luna attorno alla Terra. La Luna percorre la sua orbita nel senso ovest-est a una velocità $v_L = \dfrac{2\pi R_L}{T_{mens}}$. Se la Terra non girasse attorno al suo asse l'ombra della Luna si sposterebbe sulla superficie terrestre alla medesima velocità e nel medesimo senso. Ma siccome essa gira, i suoi punti equatoriali si muovono nel senso ovest-est alla velocita $v_T = \dfrac{2\pi r}{T_g}$. Per trovare la velocità dell'ombra lunare si deve sottrarre quest'ultima quantità da v_L, ciò che è stato fatto nella formula (4.17).

§ 5. *Limiti di validità della descrizione classica del moto*

Nella meccanica classica lo stato di moto di una particella è determinato in ogni istante dalla sua posizione (detta coordinata x per il moto rettilineo) *e dalla sua velocità v.* Al posto della velocità si può ugualmente utilizzare l'*impulso* $p = mv$, grandezza uguale al prodotto della *massa della particella* m per la sua velocità [1]. Generalmente si immagina una particella elementare come un punto geometrico che descrive nel tempo una traiettoria continua. La meccanica quantistica dimostra che questo procedimento di descrizione del moto ha generalmente un'applicazione limitata. È ancora prematuro impegnarsi in una discussione su questo problema, ma si possono esporre brevemente i risultati fondamentali a cui porta la meccanica quantistica, senza giustificarli in alcun modo.

Secondo la meccanica quantistica, lo stato di una particella non può essere determinato in nessun momento dai valori precisi della sua coordinata e del suo impulso determinati contemporaneamente. Anche se per un certo stato della particella si conoscesse il valore della sua coordinata con un'indeterminazione δx e quello del suo impulso con un'indeterminazione δp, sarebbe impossibile rendere simultaneamente queste due quantità piccole quanto si vuole, poiché sono legate l'una all'altra dalla relazione

$$\delta x \cdot \delta p \gtrsim h, \tag{5.1}$$

---

[1] Si suppone che il lettore conosca già il concetto di massa. I concetti di massa e di impulso saranno trattati minuziosamente al § 10.

dove h è una costante universale chiamata *costante di Planck* (1858-1947). Questa costante svolge un ruolo di primo piano in tutti i fenomeni quantistici; il suo valore numerico è

$$h = 6{,}63 \cdot 10^{-27}\ \text{erg} \cdot \text{s}. \tag{5.2}$$

La relazione (5.1) esprime il *principio di indeterminazione di Heisenberg* (nato nel 1901) che fissa un limite di principio alla precisione di una misura simultanea delle coordinate e dell'impulso di una particella; questo limite non può essere superato neppure perfezionando gli apparecchi ed i procedimenti di misurazione. Non si tratta di errori di misurazione: è una manifestazione della reale natura delle particelle le cui caratteristiche di moto non si possono determinare con il procedimento classico, cioè attraverso i valori esatti delle loro coordinate e del loro impulso. Le particelle hanno un comportamento più complesso di quello dei punti materiali della meccanica classica. L'immagine classica del moto lungo una traiettoria continua non riflette che approssimativamente le leggi della natura. I limiti di validità della meccanica classica sono fissati dalla relazione di indeterminazione (5.1) secondo cui lo stato di moto di una particella non può essere descritto in un istante dato attraverso i valori esatti delle sue coordinate e della sua velocità. L'indeterminazione di queste grandezze deve soddisfare la condizione

$$\delta x \cdot m \delta v \gtrsim h. \tag{5.3}$$

Per quanto riguarda i corpi macroscopici, il procedimento di descrizione classica non viene messo in dubbio. Supponiamo, per esempio, che si tratti del moto di una palla avente una massa $m = 1$ g. In condizioni normali la posizione della sferetta può essere determinata a meno di 0,1 o 0,01 mm circa. Più in generale sarebbe privo di senso voler precisare la posizione della palla con una precisione inferiore alla dimensione dell'atomo. Si pone dunque $\delta x = 10^{-8}$ cm. L'applicazione della relazione di indeterminazione (5.1) ci fornisce il valore

$$\delta v \gtrsim \frac{6{,}63 \cdot 10^{-27}}{10^{-8}} \approx 10^{-18}\ \text{cm/s}.$$

Dall'esempio fatto si nota che le indeterminazioni δx e δv sono entrambe molto piccole, ne consegue quindi che il procedimento classico è sempre utilizzabile per la descrizione del moto di corpi macroscopici. Il discorso è completamente rovesciato quando si devono trattare fenomeni atomici che implicano particelle di massa molto piccola e si verificano in regioni di spazio molto piccole. Consideriamo, per esempio, il moto dell'elettrone nell'atomo di idrogeno. La massa dell'elettrone è $m = 9{,}11 \cdot 10^{-28}$ g. L'errore commesso nella determinazione della posizione dell'elettrone non deve essere superiore alla dimensione dell'atomo, deve quindi essere $\delta x < 10^{-8}$ cm. Ne deriva dalla relazione di indeterminazione che

$$\delta v > \frac{h}{m\delta x} = \frac{6{,}63\cdot 10^{-27}}{9{,}11\cdot 10^{-28}\cdot 10^{-8}} \approx 7\cdot 10^{8}\ \mathrm{cm/s}.$$

L'incertezza sul valore della velocità è maggiore della velocità dell'elettrone in seno all'atomo, che risulta essere di circa 10^8 cm/s. In questa situazione la descrizione classica del moto è priva di senso.

§ 6. *Il significato della derivata e dell'integrale in fisica*

1. Il procedimento di passaggio al limite (3.4) che serve a definire la derivata prende il nome di *derivazione.* La nozione di derivata è correntemente impiegata in meccanica e negli altri campi della fisica. È proprio lo studio del problema della determinazione della velocità in un moto qualunque, che ha portato Newton a definire la nozione di derivata; Newton e Leibniz (1646-1716) sono i fondatori del calcolo differenziale e integrale. Il simbolo $\frac{dx}{dt}$ di derivata è stato introdotto da Leibniz. In matematica il simbolo $\frac{dx}{dt}$ deve essere pensato come un'entità a se stante e non il rapporto di due incrementi «infinitamente piccoli» dx e dt. Il significato di derivata $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ è definito dalla relazione (3.4). Per ottenere la derivata si comincia con lo stabilire un rapporto tra incrementi finiti $\frac{\Delta x}{\Delta t}$, supponendo che Δt sia diverso da zero. Quindi, trasformando opportunamente questo rapporto, se necessario, se ne deve determinare il limite. Ma in nessun caso si potrà ammettere di effettuare prima un passaggio al limite di Δx e di Δt e ricavare le quantità «infinitamente piccole» dx e dt, chiamate *differenziali* della funzione x e della variabile t, per ottenere poi il rapporto $\frac{dx}{dt}$ tra questi differenziali. Tuttavia quest'ultimo approccio alla derivata era in vigore nella fase iniziale di sviluppo del calcolo differenziale. Osserviamo intanto che esso non può soddisfare la condizione di chiarezza dei concetti matematici ed è completamente privo di senso, benché si possano determinare i differenziali dx e dt, in modo tale che il loro rapporto sia uguale alla derivata $\dot{x}$. In matematica il differenziale dt viene definito come un incremento qualunque della variabile t, e il differenziale dx viene espresso dalla relazione $dx = \dot{x}\, dt$. Con questa ultima definizione l'asserzione che la derivata è il rapporto di due quantità finite dx e dt diventa evidente, poiché si tratta semplicemente di un'altra maniera per esprimere una nozione. La nozione primaria è sempre quella di derivata e non quella di differenziale.

Tuttavia nelle applicazioni della matematica bisogna tener conto del fatto che la conoscenza delle grandezze fisiche risulta da misure concrete: misure comunque affette da errori e la cui esecuzione perturba l'evoluzione naturale dei fenomeni. È questa circostanza che, a rigore, non permette il passaggio al limite $\Delta t \to 0$, $\Delta x \to 0$, che in matematica porta alla definizione di derivata. Supponiamo, per esempio, che si cerchi di misurare la velocità di un proiettile sparato da un'arma da fuoco. Si tratta di misurare la distanza Δx percorsa dal proiettile nell'intervallo di tempo Δt. Se si prende un intervallo di tempo Δt troppo lungo, la velocità del proiettile può diminuire notevolmente a causa della resistenza dell'aria, e il rapporto $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ può avere un valore più piccolo della velocità reale del proiettile nell'istante considerato. Se si diminuisce Δt si nota che a partire da un certo valore il rapporto $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ resta costante a meno degli errori sperimentali che ogni misurazione comporta. È inutile ridurre maggiormente Δt perché altrimenti il rapporto $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ ricomincerà a variare e in maniera sempre più irregolare assumendo ogni sorta di valori, grandi e piccoli. Ciò dipende dal fatto che in ogni misura l'errore relativo è tanto più grande quanto più è piccola la grandezza misurata. È, per esempio, assai facile misurare una lunghezza di 1 m a meno di 1 mm, quindi con una precisione relativa dello 0,1%. Ma misurare con questa stessa precisione relativa lunghezza di 1 mm è assai più difficile. Più Δt è piccolo, più l'errore commesso nel calcolo di $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ è grande. Se si diminuisce indefinitamente Δt, i valori calcolati di $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ non tenderebbero verso un limite determinato. Queste osservazioni dimostrano che nel nostro esempio, a causa degli errori di misurazione, non si può realizzare il passaggio al limite $\Delta t \to 0$ nel senso matematico del termine. Partendo dai risultati di misure fisiche, non si può calcolare la velocità vera o la derivata $v = x$ che in maniera approssimata, identificandola con il rapporto degli incrementi finiti $\frac{\Delta x}{\Delta t}$. L'intervallo di tempo Δt optimum, per cui potremmo ottenere la massima precisione nel calcolo della velocità reale, non si può determinare che tenendo conto delle condizioni concrete. Gli incrementi piccoli ma finiti Δx e Δt, il cui rapporto fornisce con sufficiente approssimazione il valore della derivata x, sono per i fisici quantità *infinitamente piccole* o più precisamente *quantità fisicamente infinitamente piccole*. Il fisico le indica con dx e dt e le tratta come differenziali matematici. Dunque, *in fisica, la derivata risulta essere il rapporto degli incrementi finiti e piccoli della variabile e della funzione e non il limite di questo rapporto.*

Non sono solo gli errori di misurazione che si oppongono a che si possa

realizzare nella pratica il passaggio al vero limite matematico; non è escluso che questo passaggio al limite sia impossibile per ragioni di principio, per ragioni inerenti alla natura delle grandezze o per leggi fisiche. Un passaggio al limite può non essere rigoroso a causa della relazione di indeterminazione (5.1). Se l'intervallo di tempo Δt tende verso lo zero, anche il cammino percorso Δx tenderà verso lo zero. L'indeterminazione δx sulla misura del cammino percorso non deve superare Δx, altrimenti il calcolo della velocità media, a causa dell'applicazione della formula $v_{med} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$, diverrebbe privo di senso. Perciò quando $\Delta t \to 0$ anche l'indeterminazione sulla coordinata δx dovrebbe tendere verso lo zero. Ma secondo la relazione (5.1) l'indeterminazione sulla velocità δv dovrebbe tendere verso l'infinito; ciò significa che l'errore che commettiamo applicando la formula (3.3) per calcolare la velocità v, è infinitamente grande in confronto alla velocità v del mobile.

2. Queste considerazioni sono valide non soltanto per il calcolo della derivata della coordinata, ma anche alle derivate di tutte le altre grandezze fisiche. Se dobbiamo determinare, per esempio, la densità di una sostanza in un punto dello spazio, possiamo procedere nel modo seguente. Circondiamo il punto scelto con una superficie chiusa che delimiti un volume ΔV. Sia Δm la massa della sostanza contenuta in questo volume. Il rapporto

$$\rho_{med} = \frac{\Delta m}{\Delta V}$$

è chiamato *densità media della sostanza nel volume* ΔV. Poiché la densità media dipende, in generale, dalla dimensione e dalla forma del volume ΔV, si introduce la nozione di *densità vera* che si determina facendo tendere ΔV a zero. Si dice che la densità media ρ_{med} tende verso un limite determinato ρ che è la densità vera della sostanza nel punto considerato

$$\rho = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{dm}{dV}. \quad (6.1)$$

La *densità vera viene,* dunque, *definita come la derivata della massa rispetto al volume.* Essa dipende solo dalla posizione del punto considerato. Tuttavia, se si volesse applicare alla formula (6.1) il concetto matematico di passaggio al limite non si potrebbe farlo a causa della struttura atomica della materia. Facendo tendere ΔV a zero, ci potremmo ritrovare con un volume che non contiene che un piccolo numero di molecole, una per esempio, o persino nessuna. D'altra parte, siccome le molecole sono animate da un moto disordinato dovuto all'agitazione termica, alcune molecole possono sfuggire dal volume ΔV, mentre altre vi penetrano. Quindi il numero di molecole contenuto in un piccolo volume ΔV invariabile varia rapidamente ed in maniera disordinata. Quando poi venisse diminuito il volume ΔV, il

rapporto $\frac{\Delta m}{\Delta V}$ subirà variazioni rapide fra il valore zero, se il volume ΔV non contiene alcuna molecola, e un valore molto grande, se questo stesso volume contiene una o parecchie molecole. È chiaro che nel caso venga diminuito indefinitamente il volume ΔV, il rapporto $\frac{\Delta m}{\Delta V}$ non tenderà verso un limite ben determinato. Quindi, per determinare la densità vera di una sostanza, non si dovranno rendere infinitamente piccole le quantità Δm e ΔV. Il volume ΔV dovrà essere macroscopico e contenere perciò un numero molto grande di molecole, ma dovrà essere anche sufficientemente piccolo perché si possa considerare la sostanza che esso contiene come macroscopicamente omogenea. Se si soddisferanno queste due condizioni, il rapporto $\frac{\Delta m}{\Delta V}$ prenderà un valore ben determinato che non cambierà neppure se diminuisce ancora il volume macroscopico ΔV. È questo rapporto che in fisica viene usato come derivata della massa m rispetto al volume V. Le quantità Δm e ΔV che soddisfano le due condizioni sopra indicate sono considerate come delle quantità *fisicamente infinitamente piccole,* ed assimilate ai differenziali matematici. Dal punto di vista della matematica questo procedimento equivale a sostituire ai corpi reali un modello ideale dotato di una distribuzione continua di massa.

3. La situazione è esattamente la stessa per ciò che concerne la nozione di integrale. In matematica l'integrale è definito attraverso il passaggio al limite

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum f(x_i)\Delta x_i .$$

L'intervallo numerico (a, b) è diviso in n intervalli più piccoli Δx_1, Δx_2, ... Δx_n. La lunghezza di ogni intervallo Δx_i va moltiplicata per il valore che prende la funzione $f(x)$ in un punto qualunque situato all'interno del piccolo intervallo dei valori della variabile. Poi si fa la somma $\sum f(x_i)\Delta x_i$ e si passa al limite per $n \to \infty$ ammettendo che la lunghezza di ognuno dei piccoli intervalli tenda verso lo zero. Ma in fisica, a causa di errori di misura o di questioni di principio (quali la natura atomica della materia), la suddivisione dell'intervallo (a, b) in intervalli più piccoli di una data lunghezza (dipendente da condizioni concrete) è privo di senso. Ne deriva che il passaggio al limite $\Delta x_i \to 0$ non può essere interamente realizzato e si deve arrestare ad un certo valore. Quindi, *in fisica, l'integrale risulta essere non il limite di una somma, ma la somma di un gran numero di termini sufficientemente piccoli* $\sum f(x_i) \Delta x_i$.

§ 7. *Osservazioni sui vettori e sulla composizione dei moti*

1. Diamo per acquisita la conoscenza della nozione di vettore e dei fondamenti del calcolo vettoriale. Ci proponiamo invece di precisare alcune questioni di principio importanti in fisica. Tra le grandezze fisiche alcune sono definite completamente dal loro valore, altre richiedono che venga definita anche la loro direzione. Le prime portano il nome di grandezze *scalari,* e sono: massa, energia, temperatura, carica elettrica, ecc. Le grandezze orientate sono chiamate *vettori* e sono, ad esempio, velocità, accelerazione, forza, intensità del campo magnetico o elettrico, ecc. È uso rappresentare i vettori con segmenti di retta orientati o con delle frecce indicandoli con lettere in grassetto ($\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$, ...) o impiegando i segni → al di sopra delle lettere ($\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$, ...).

Talvolta la definizione di grandezza vettoriale viene completata precisando che tra le grandezze orientate sono da considerarsi vettori solo quelle che possono essere sommate *geometricamente* secondo la *regola del parallelogramma.* Ma questo enunciato resta impreciso se non si stabilisce cosa si intende per addizione di grandezze fisiche. Il significato di addizione di grandezze fisiche non è determinato dalla loro natura fisica. Prima di stabilire le regole di addizione bisogna precisare quello che si intende per addizione di due grandezze fisiche; fatto questo potremo determinare il significato dell'enunciato che completa la definizione di vettore. Non di rado per stabilire se le grandezze fisiche considerate siano o meno vettori, viene attribuito alla loro addizione un significato errato.

2. In meccanica si attribuisce all'addizione delle velocità il significato seguente. Consideriamo un punto che si sposti a una velocità v_1 rispetto ad un sistema di riferimento S_1 (per esempio, un passeggero che cammini sul ponte di una nave). Supponiamo che il sistema di riferimento S_1 si sposti a una velocità v_2 rispetto a un altro sistema di riferimento S_2 che si ammette fisso per convenzione (la nave è in movimento rispetto alla costa). Per composizione dei moti si intende un'operazione che permetta di trovare, partendo dai dati iniziali, la velocità v del punto materiale (il passeggero) rispetto al sistema di riferimento fisso S_2 (la costa). Nella cinematica relativistica, si dovrebbe ancora precisare che le velocità v_1 e v_2 sono misurate per mezzo della riga graduata e dell'orologio posti nel sistema di riferimento rispetto al quale viene studiato il moto. Nella cinematica non relativistica questa precisazione è inutile poiché si postula l'assolutezza delle lunghezze e degli intervalli di tempo, e quindi indipendenti dal sistema di riferimento scelto. Ne deriva che l'addizione dei moti secondo la cinematica non relativistica si effettua applicando la regola del parallelogramma e che nella meccanica relativistica questa regola non è valida. Tuttavia nelle due cinematiche la velocità del punto è un vettore. Questo esempio dimostra che la rego-

la dell'addizione delle velocità applicata allo studio del moto composto non dipende dal fatto che la velocità sia o meno un vettore [1].

Nella cinematica non relativistica si possono trovare delle grandezze vettoriali la cui addizione secondo la regola del parallelogramma non sarà sempre possibile se si attribuisce alla loro somma lo stesso significato dato alla composizione delle velocità dell'esempio sopraindicato. L'accelerazione ne è un esempio. Consideriamo un punto che si sposti rispetto al sistema di riferimento S_1 con una accelerazione $\boldsymbol{a}_1$ e supponiamo che il sistema di riferimento S_1 abbia un'accelerazione $\boldsymbol{a}_2$ rispetto ad un sistema di riferimento «fisso» S_2. Sulla base di questi dati non si può determinare l'accelerazione $\boldsymbol{a}$ del punto mobile rispetto al sistema di riferimento S_2 se non nel caso che i moti che si cercano di addizionare siano moti di traslazione. In quest'ultimo caso l'accelerazione $\boldsymbol{a}$ viene determinata attraverso la regola del parallelogramma. In ogni altro caso conoscere le accelerazioni $\boldsymbol{a}_1$ e $\boldsymbol{a}_2$ non basta a calcolare $\boldsymbol{a}$ come accelerazione risultante, per questo serve invece una regola più complessa che noi daremo al § 64.

3. Questi esempi dimostrano come la nozione di vettore debba essere precisata, il che viene confermato anche dalle considerazioni che seguono. Non sempre è evidente che direzione attribuire a questa o quella grandezza fisica. Nel caso di un segmento geomentrico AB il problema della sua direzione non si pone: sia il senso $A \to B$, che il senso opposto $B \to A$ sono possibili. Ugualmente non sorge alcun dubbio a proposito della direzione dello spostamento, della velocità o dell'accelerazione di un punto nonché della direzione della forza che su di esso agisce. D'altra parte la direzione di una velocità angolare o di una superficie geometrica, soprattutto se curva, non è affatto evidente a priori. È importante dunque dare una definizione precisa di vettore al fine di poter generalizzare questa nozione nel caso di uno *spazio multidimensionale.* Consideriamo quindi il vettore più semplice, cioè un segmento di retta debitamente orientato. Rappresentiamo questo segmento di retta orientato $\boldsymbol{a}$ con una freccia. Prendiamo un qualunque sistema di coordinate rettangolari o oblique e proiettiamo il nostro segmento di retta $\boldsymbol{a}$ sugli assi X, Y, Z. Effettueremo questa proiezione per mezzo di piani paralleli ai piani delle coordinate; per esempio, per trovare la proiezione sull'asse X si faranno passare per le estremità del segmento $\boldsymbol{a}$ i piani paralleli al piano YZ. L'intersezione di questi piani con l'asse X definirà un

---

[1] Se tutte le velocità fossero misurate rispetto al medesimo sistema di riferimento «fisso» S_2, la regola del parallelogramma sarebbe ugualmente valida nella cinematica relativistica. Il significato della velocità v_1 sarebbe però tutt'altro. Si dovrebbe intendere per v_1 la velocità del punto rispetto al sistema di riferimento mobile S_1, *misurata nel sistema di riferimento «fisso»* S_2. Nell'esempio sopracitato v_1 è definita come velocità del punto rispetto al sistema di riferimento mobile S_1 *misurata nel medesimo sistema di riferimento.* Si tratta cioè di una grandezza essenzialmente differente. Solo nel caso limite di un moto infinitamente lento le due velocità si trovano a coincidere. Questi problemi saranno esaminati minuziosamente quando esporremo la teoria della relatività.

segmento di retta a_x che è la proiezione del segmento orientato a sull'asse X. Saranno trovate allo stesso modo le due altre proiezioni a_y e a_z. In generale si utilizzano delle coordinate rettangolari e in questo caso a_x, a_y e a_z saranno le *proiezioni ortogonali* del segmento a. Se si conoscono le proiezioni a_x, a_y e a_z in un sistema di coordinate S, si possono determinare le componenti di a rispetto ad ogni altro sistema di coordinate S' le cui assi formino un angolo qualunque con quelli del sistema S. È sufficiente per questo riavere nel sistema S il segmento a, costruendo con a_x, a_y e a_z un parallelepipedo la cui diagonale è il segmento a. Poi si proietterà questo segmento a sugli assi X', Y', Z' del nuovo sistema S'. Si ottengono di nuovo tre valori $a_{x'}$, $a_{y'}$, $a_{z'}$ che sono le proiezioni del segmento a nel nuovo sistema di coordinate S'. Possiamo dare ora la seguente definizione di vettore.

Si chiama *vettore* a un insieme ordinato di tre valori a_x, a_y, a_z dati in un sistema di coordinate qualsiasi (dire che i numeri a_x, a_y, a_z sono ordinati, vuol dire che il primo numero a_x corrisponde all'asse X, il secondo a_y corrisponde all'asse Y e il terzo a_z corrisponde all'asse Z). Questi valori sono le *proiezioni del vettore* a sugli assi di coordinate e si chiamano *componenti del vettore. A seguito di uno spostamento dell'origine o ad una rotazione degli assi di coordinate, le componenti* a_x, a_y *e* a_z *si trasformano secondo la regola di trasformazione delle proiezioni di segmenti geometrici.*

In breve, si intende per *vettore* un insieme ordinato di tre numeri, riferiti ad un sistema di coordinate; questi numeri, a causa di uno spostamento dell'origine o di una rotazione degli assi di coordinate, mutano come la differenza delle coordinate dei punti estremi di un segmento geometrico.

Riportando questi valori sugli assi di coordinate X, Y, Z, stacchiamo su questi assi tre segmenti di retta. Se costruiamo con questi tre segmenti un parallelepipedo, la diagonale di quest'ultimo, considerata come segmento orientato, ci rappresenta il vettore. Questo segmento sarà sempre lo stesso, non importa quale sistema di coordinate sia stato utilizzato per costruirlo. Questo fatto è una conseguenza dell'invarianza dei vettori, termine con cui si indica che ogni vettore è indipendente dal sistema di coordinate utilizzate per rappresentarlo. In differenti sistemi di coordinate, le componenti a_x, a_y, a_z di un vettore sono differenti, ma il vettore a resta sempre lo stesso. Un'uguaglianza vettoriale $a = b$ riferita ad un sistema di coordinate equivale a tre uguaglianze $a_i = b_i$ $(i = x, y, z)$. Quando si passa ad un altro sistema di coordinate (con l'apice), i due termini di queste ugualianze subiscono le stesse trasformazioni, in modo che nel nuovo sistema conservano la loro forma, cioè: $a_{i'} = b_{i'}$ $(i' = x', y', z')$. Quando, dopo il cambiamento delle coordinate, i due termini di una equazione si trasformano allo stesso modo e si presentano quindi nella stessa espressione nei due sistemi, si dice che questa equazione è *invariante* rispetto al cambiamento delle coordinate considerato. Ne deriva che *l'equazione vettoriale* $a = b$ *è invariante rispetto ad uno spostamento dell'origine e ad una rotazione degli assi di coordinate. Essendo invarianti, le equazioni che esprimono le leggi fisi-*

che sotto forma vettoriale sono indipendenti dalla scelta degli assi di coordinate. L'utilizzazione dei vettori permette di formulare le leggi fisiche in forma semplice, che non resta tale se queste leggi sono espresse in termini di proiezioni di vettori sugli assi di un sistema qualunque.

Occorre notare che una rotazione non implica necessariamente la rotazione simultanea di tutti gli assi come quelle di un corpo solido. La nostra definizione ammette i casi in cui gli assi X, Y, Z ruotano indipendentemente gli uni dagli altri. Per mezzo di tale rotazione si assicura il passaggio da un sistema rettangolare qualsiasi ad un altro sistema rettangolare diretto o inverso, i cui assi sono orientati in modo arbitrario. Per mezzo di tale rotazione è possibile effettuare una inversione degli assi, cioè, invertire i sensi positivi di tutti e tre gli assi.

Nel caso in cui i due sistemi siano rettangolari, le formule di trasformazione delle proiezioni di un vettore sono del tipo

$$\begin{aligned} a_{x'} &= \alpha_{x'x}a_x + \alpha_{x'y}a_y + \alpha_{x'z}a_z, \\ a_{y'} &= \alpha_{y'x}a_x + \alpha_{y'y}a_y + \alpha_{y'z}a_z, \\ a_{z'} &= \alpha_{z'x}a_x + \alpha_{z'y}a_y + \alpha_{z'z}a_z, \end{aligned} \tag{7.1}$$

dove $\alpha_{x'x}$, $\alpha_{x'y}$, ... sono i coseni degli angoli tra gli assi corrispondenti nei due sistemi di coordinate. Per esempio, l'angolo $\alpha_{y'z}$ è il coseno dell'angolo formato dalle direzioni positive degli assi Y' e Z.

4. Si chiama *scalare* o *invariante* ogni numero, dato in un qualsiasi sistema di coordinate, che resta immutabile sia che si sposti l'origine delle coordinate sia che ruotino gli assi coordinati. Quindi questa definizione, così come quella di vettore, non si riferisce che a uno spostamento dell'origine ed a una rotazione degli assi coordinati, e sottintende che i due sistemi siano fissi l'uno rispetto all'altro. Come esempi di grandezze scalari, citiamo il tempo, la massa, la carica elettrica, ecc. L'ascissa x di un punto immobile non è uno scalare, poiché il suo valore numerico varia secondo il sistema di coordinate scelto. Uno scalare può essere formato a partire da vettori. Per esempio, la *lunghezza del vettore* e il suo *quadrato* che in un sistema rettangolare è data dall'espressione $a_x^2 + a_y^2 + a_z^2$, sono delle grandezze scalari. Il *prodotto scalare di due vettori* $\boldsymbol{a}$ *e* $\boldsymbol{b}$, *sia* $(\boldsymbol{ab}) = ab \cos \vartheta$, dove ϑ è l'angolo tra i vettori, *è uno scalare.* Nel sistema rettangolare il prodotto scalare è dato dalla ben nota espressione

$$(\boldsymbol{ab}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

(si vedano problemi 1 e 3 alla fine di questo paragrafo).

5. Ne risulta chiaramente che per stabilire il carattere vettoriale di una grandezza fisica orientata è sufficiente chiedersi come si determinano le sue componenti lungo gli assi coordinati e come queste componenti si trasformano nel passaggio da un sistema di coordinte ad un altro, i cui assi non coincidono con quelli del primo sistema senza rotazione. Si suppone implicitamente che i due sistemi siano fissi l'uno rispetto all'altro.

Se si prendono, per esempio, due vettori $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ con componenti a_x, a_y, a_z e b_x, b_y, b_z si può farli corrispondere in ogni sistema di coordinate a una triade ordinata di numeri come $c_x = a_x + b_x$, $c_y = a_y + b_y$, $c_z = a_z + b_z$. È facile rendersi conto che questi tre numeri definiscono un vettore, dato che essi rispondono alle medesime regole di trasformazione delle componenti dei vettori $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$. Si dice che il vettore $\boldsymbol{c}$ (c_x, c_y, c_z) è la *somma dei vettori* $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$. Si dimostra facilmente che il vettore $\boldsymbol{c}$ può essere ottenuto a partire dai vettori $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ con una costruzione geometrica (regola del parallelogramma). Viene definita nello stesso modo l'operazione di *sottrazione dei due vettori.* La *differenza di due vettori* $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ è un vettore $\boldsymbol{d}$, definito da tre numeri ordinati: $d_x = a_x - b_x$, $d_y = a_y - b_y$, $d_z = a_z - b_z$. Per costruire questo nuovo vettore, si deve dapprima invertire il senso del vettore $\boldsymbol{b}$, indi costruire il parallelogramma sui vettori $\boldsymbol{a}$ e $-\boldsymbol{b}$.

Con questo procedimento, abbiamo introdotto la somma e la differenza dei vettori per mezzo di una *definizione matematica.* Quindi, possiamo introdurre altre operazioni che possono essere effettuate sui vettori: prodotto di uno scalare per un vettore, ad esempio, oppure prodotto scalare e prodotto vettoriale di due vettori. Diremo che queste sono operazioni *matematiche,* poiché le loro proprietà sono conseguenze di teoremi matematici. È inutile sottoporre a una verifica sperimentale i risultati ottenuti per mezzo di queste operazioni matematiche. Di una operazione di addizione di vettori, conforme alla definizione data, si dirà che è una *addizione matematica.* Ma quando i vettori rappresentano una grandezza fisica, la loro addizione o la loro sottrazione ha ancora un altro significato. In effetti, per trovare la somma o la differenza, i vettori vengono sottoposti a certe *operazioni fisiche,* anche se non sono che operazioni immaginarie. Stabiliamo che in questo caso si tratta di una addizione o di una sottrazione *fisica.* Non si può giudicare in anticipo se una addizione fisica concreta coinciderà con il risultato di una addizione matematica (regola del parallelogramma) e se il risultato dell'addizione darà un nuovo vettore; queste questioni esigono uno studio più dettagliato, soprattutto sperimentale.

6. Analizziamo, per esempio, il problema seguente. Prendiamo un punto che si sia spostato dapprima da A a B lungo un segmento della retta $\overrightarrow{AB}$ (fig. 14), indi da B a C lungo un segmento della retta $\overrightarrow{BC}$. Se si chiede lungo quale segmento di retta questo punto deve spostarsi per passare da A a C, è chiaro che la risposta sarà questa: lungo il segmento della retta $\overrightarrow{AC}$; si può considerare che $\overrightarrow{AC}$ è la somma geometrica di $\overrightarrow{AB}$ e di $\overrightarrow{BC}$. L'addizione degli spostamenti si effettua secondo la regola del parallelogramma e coincide con l'addizione matematica di vettori. La medesima regola si applica all'addizione delle velocità, nel senso che ora spiegheremo. Un punto mobile si sposta in un secondo da A a B a una velocità costante $\boldsymbol{v}_1$. Nel corso del secondo successivo si sposta da B a C a una velocità costante $\boldsymbol{v}_2$. A quale velocità costante $\boldsymbol{v}$ deve spostarsi il punto per passare in un secondo da A

a C? Tuttavia la composizione delle velocità di solito viene intesa in senso differente che spiegheremo con l'esempio seguente. Sul ponte di una nave un punto mobile passa da A a B lungo un segmento di retta, a una velocità costante v_1. Nello stesso intervallo di tempo la nave si sarà spostata rispetto alla costa di un segmento di retta BC con una velocità costante v_2. Qual'è la velocità v del punto mobile rispetto alla costa? Qui la composizione dei moti e delle velocità prende un senso *differente,* poiché i due moti sono considerati in sistemi di riferimento *diversi* che si muovono uno rispetto all'altro. Un sistema di riferimento è la nave e la velocità v_1 del punto mobile è misurata rispetto alla nave per mezzo di righe graduate e di orologi. L'altro sistema di riferimento è la costa ed è in questo sistema che vengono misurate, per mezzo di righe graduate e di orologi, le velocità v_2 e v. Considerato sotto questo aspetto, il problema del risultato dell'addizione delle velocità non può essere risolto definitivamente che per via sperimentale. La

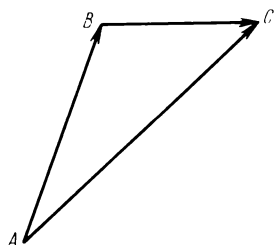



Fig. 14.

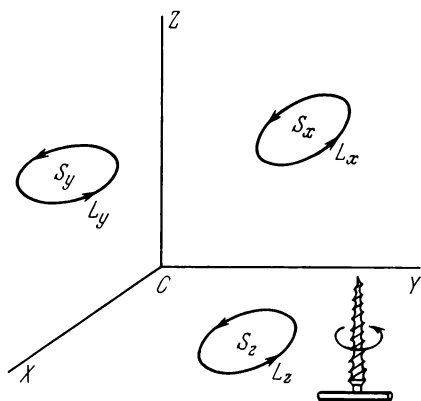



Fig. 15.

cinematica prerelativistica affermava che il risultato dell'addizione deve essere lo stesso in ambedue i casi. Questa asserzione risulta dal fatto che nella fisica prerelativistica le lunghezze dei segmenti e gli intervalli di tempo non dipendono dal sistema di riferimento nel quale erano misurate. Si effettuava quindi l'addizione delle velocità del secondo esempio per la medesima regola del parallelogramma e il risultato coincideva con l'addizione matematica dei vettori. Diverso è il problema in cinematica relativistica. *Presa nel suo secondo senso, la composizione delle velocità non ubbidisce più alla regola del parallelogramma.* Questa regola è approssimativamente vera solo quando le due velocità da addizionare sono molto piccole rispetto alla velocità della luce.

7. Ad ogni vettore $\boldsymbol{a}$ (a_x, a_y, a_z) e ad ogni scalare λ si può far corrispondere a priori un oggetto $\lambda\boldsymbol{a}$ definito dai tre numeri λa_x, λa_y, λa_z. È facile rendersi conto che questo oggetto è un vettore che si chiama *prodotto dello*

scalare λ *per il vettore* $\boldsymbol{a}$. Un incremento infinitamente piccolo $d\boldsymbol{a}$ del vettore è un vettore. Un incremento infinitamente piccolo di ogni scalare t è uno scalare dt. A queste due grandezze si può fare corrispondere il vettore $\frac{1}{dt}d\boldsymbol{a} = \frac{d\boldsymbol{a}}{dt}$, chiamato *derivata del vettore* $\boldsymbol{a}$ *rispetto allo scalare* t.

8. Dopo queste considerazioni preliminari siamo in grado di dimostrare il carattere vettoriale di numerose grandezze fisiche, importanti per la meccanica. Prima di tutto, lo *spostamento di un punto da una posizione A ad una posizione B lungo il segmento di retta AB è un vettore.* Questa affermazione è evidente poiché per definizione in ogni traslazione dell'origine e in ogni rotazione degli assi delle coordinate, le componenti dei vettori dovrebbero esser trasformate esattamente come le proiezioni di un segmento di retta orientata. Indichiamo con $\boldsymbol{r}$ il segmento della retta e deriviamolo rispeto al tempo t supponendo che l'origine del segmento sia fissa. La *derivata* $\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$ *sarà un vettore* poiché il tempo è uno scalare. Ma una tale derivata rappresenta la velocità $\boldsymbol{v}$ di un punto mobile. Quindi anche la *velocità* $\boldsymbol{v}$ *è un vettore.* Derivando di nuovo $\boldsymbol{v}$ rispetto a t si ottiene *un altro vettore, l'accalerazione* cioè *del punto mobile* $\boldsymbol{a} = \frac{d\boldsymbol{v}}{\mathrm{dt}}$. *La massa m del punto materiale* è uno scalare; se lo moltiplichiamo per la velocità $\boldsymbol{v}$, si ottiene il *vettore* $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$, chiamato *impulso del punto.* Calcolando il suo differenziale rispetto al tempo, otteniamo la *forza* $\boldsymbol{F} = \frac{d\boldsymbol{p}}{dt}$ applicata al punto. Perciò la *forza è un vettore.*

9. Consideriamo ora alcuni esempi di vettori più complessi. Tracciamo nello spazio *un contorno orientato L,* cioè una curva chiusa, senza intersezioni con se stessa e che può essere percorsa in un senso determinato. Proiettiamo questo contorno sui piani delle coordinate di un sistema rettangolare di coordinate XYZ. Quindi otteniamo tre contorni chiusi, piani e orientati L_x, L_y e L_z, che si trovano rispettivamente nei piani YZ, ZX e XY (nella figura 15 il contorno L non è indicato, ci sono solo le sue proiezioni). Denotiamo con S_x, S_y e S_z le aree limitate dai contorni chiusi L_x, L_y, L_z. Consideriamo queste aree positive se i contorni L_x, L_y, L_z sono descritti nelle *direzioni positive,* e negative in caso contrario. Le direzioni positive dei contorni L_x, L_y, L_z dipendono dal sistema di coordinate in esame: destrorso o sinistrorso. Un triedro nel trirettangolo è destrorso quando un cavatappi normale, ruotando nel senso che porta l'asse x positivo sull'asse y positivo con una rotazione di 90°, si avvita in direzione dell'asse Z positivo; se avanza verso Z negativo il triedro è sinistrorso. Nel sestema destrorso il senso di circolazione sui contorni L_x, L_y ed L_z sarà definito positivo quando coincide con il senso di rotazione del cavatappi. Lo stesso vale per il sistema sinistrorso: il senso positivo di percorrenza corrisponde al senso

in cui occorre far ruotare il cavatappi perché avanzi nella direzione positiva dell'asse Z. Con questa convenzione sui segni, le aree S_x, S_y, S_z sono date dagli integrali

$$S_x = \int_{L_x} y\,dz, \quad S_y = \int_{L_y} z\,dx, \quad S_z = \int_{L_z} x\,dy, \tag{7.2}$$

presi lungo i contorni L_x, L_y, L_z nei diversi sistemi di coordinate.

Benché vi sia ancora una condizione da soddisfare, che verrà esaminata più avanti, affermiamo che i tre numeri S_x, S_y, S_z definiscono un vettore. Per dimostrarlo prendiamo il caso particolare di un contorno L piano. Stacchiamo sulla normale al piano del contorno un segmento orientato A la cui lunghezza è numericamente uguale all'area S limitata dal contorno L e la cui direzione corrisponde alla regola della vite che abbiamo appena enunciato (fig. 16). Utilizziamo dapprima un sistema di coordinate di un ti-

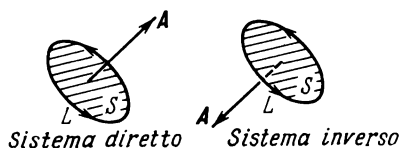



Fig. 16.

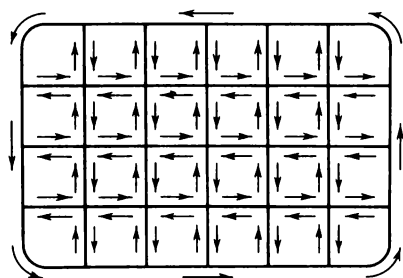



Fig. 17.

po dato, destrorso o sinistrorso. Il segmento A, che abbiamo appena definito e che è assolutamente indipendente dalla scelta degli assi delle coordinate, è un vettore. Le sue proiezioni sugli assi sono: $A_x = A\cos(A, X)$, $A_y = A\cos(A, Y)$, $A_z = A\cos(A, Z)$. D'altra parte, secondo un noto teorema geometrico, si ha

$$S_x = S\cos(A, X), \quad S_y = S\cos(A, Y), \quad S_z = S\cos(A, Z).$$

Dato che abbiamo scelto per segmento A una lunghezza numericamente uguale a S, si deve avere in ogni sistema di coordinate $S_x = A_x$, $S_y = A_y$, $S_z = A_z$. Ne deriva che in seguito a una rotazione degli assi S_x, S_y, S_z si trasformano come le componenti del vettore A. Quindi, S_x, S_y, S_z definiscono un vettore che indicheremo con S e chiameremo *vettore della superficie* limitata dal contorno orientato L. Con questa definizione si può dire che la superficie è un vettore, come è appena stato dimostrato per il caso di contorni piani e di superficie piane.

L'estensione di questo risultato a contorni e a superfici non piani non presenta difficoltà. Sia L un contorno non piano qualunque. Prendiamo una superficie qualunque limitata da questo contorno e suddividiamola in un numero n di elemento di superfici orientati nel modo indicato nella figura 17. Proiettando questi elementi di superfici sui piani delle coordinate, si ottengono

$$S_x = \sum_{i=1}^{n} S_{ix}, \quad S_y = \sum_{i=1}^{n} S_{iy}, \quad S_z = \sum_{i=1}^{n} S_{iz},$$

dove S_{ix}, S_{iy}, S_{iz} sono le proiezioni dell'i-esimo elemento di superficie sui piani stessi. Si può rendere n grande quanto si vuole e considerare che ogni elemento di superficie S_i sia piano. In virtù dei risultati ottenuti si può quindi affermare che S_{ix}, S_{iy} e S_{iz} definiscono un vettore. Quindi i tre numeri S_x, S_y e S_z definiscono un vettore poiché questi numeri sono il risultato dell'addizione delle componenti dei vettori S_i.

10. I tre numeri S_x, S_y, S_z si distinguono però da un vettore per la caratteristica seguente. A seguito di *una rotazione d'insieme del sistema di coordinate,* restando quest'ultimo costantemente destrorso o sinistrorso, cioè quale era prima della rotazione, i tre numeri ordinati S_x, S_y e S_z si trasformano nello stesso modo delle componenti di un vettore. Ma se si modifica il sistema di coordinate, per esempio per *inversione degli assi,* per determinare la direzione di S si deve passare da una vite ordinaria ad una vite rovesciata. Se in un sistema di coordinate destrorso la quantità S viene indicata con una freccia (un segmento di retta orientata), dopo il passaggio in un sistema di coordinate sinistrorso si dovrà invertire la direzione di orientamento della freccia (del segmento di retta). Le quantità che si comportano in questo modo sono chiamate pseudo-vettori o *vettori assiali* mentre noi finora avevamo esaminato solo *vettori polari. A seguito di una rotazione d'insieme del sistema di coordinate i vettori assiali si comportano esattamente come i vettori polari. A seguito di un'inversione degli assi le componenti dei vettori polari cambiano di segno, mentre le componenti dei vettori assiali conservono i loro segni.*

Si sarebbe potuto fare a meno di introdurre i vettori assiali, ma allora nei sistemi di coordinate destrorsi e sinistrorsi certe formule avrebbero avuto forme differenti. Se, per esempio, in un sistema destrorso avessimo definito i tre numeri S_x, S_y, S_z per mezzo delle formule (7.2), poi per mezzo delle stesse formule avessimo invertito i segni, allora questa stessa triade avrebbe definito anche un vettore polare. L'introduzione dei vettori assiali permette per l'appunto di conservare la stessa forma delle formule nei sistemi di coordinate destrorsi e sinistrorsi.

Nello stesso modo accanto agli *scalari veri* vengono introdotte delle quantità chiamate *pseudo-scalari.* Uno *scalare* o *invariante* è un numero che resta immutabile in tutti i sistemi di coordinate, siano essi destrorsi o sinistrorsi. *Uno pseudo-scalare o pseudo-invariante resta immutabile se pas-*

sa da un sistema destrorso (sinistrorso) ad un altro sistema destrorso (sinistrorso), ma passando da un sistema destrorso ad un sistema sinistrorso, o viceversa, cambia di segno, restando immutato il suo valore assoluto. Il prodotto di uno pseudo-scalare per un vettore polare è un vettore assiale. Il prodotto di uno pseudo-scalare per un vettore assiale è un vettore polare. Nel caso in cui si utilizzasse un solo sistema di coordinate, sia esso destrorso o sinistrorso (in fisica si utilizza quasi esclusivamente il sistema destrorso) sarebbe superfluo suddividere i vettori in assiali e polari e gli scalari in veri e pseudo-scalari.

L'addizione di due vettori ha senso solo nei casi in cui siano ambedue o assiali o polari. La somma $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ in cui un vettore sia assiale e l'altro polare non ha alcun senso, perché una tale somma non si trasforma né secondo la regola dei vettori polari, né secondo la regola dei vettori assiali e non rappresenta alcuna classe di vettori.

11. Il *prodotto vettoriale* di due vettori $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ è un caso particolare di vettori che rappresentano una superficie o un'area. Viene definito come il vettore dell'area del parallelogramma costruito coi vettori $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$. Per orientare il parallelogramma si deve percorrere il suo perimetro prima dall'origine del vettore $\boldsymbol{a}$ verso la sua estremità, poi da questa estremità parallelamente al vettore $\boldsymbol{b}$, ecc., finché non si ritorna all'origine del vettore $\boldsymbol{a}$ (fig. 18). In

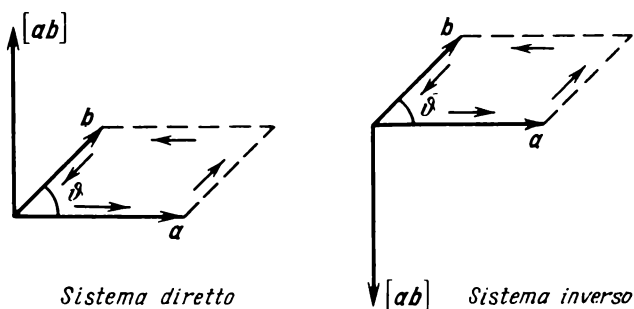



Fig. 18.

breve, il primo vettore $\boldsymbol{a}$ viene percorso nel senso diretto e il secondo vettore $\boldsymbol{b}$ nel senso opposto. In conformità alle considerazioni esposte sopra ogni prodotto vettoriale si può rappresentare con un segmento orientato perpendicolare al piano del parallelogramma il cui perimetro viene percorso nel senso corrispondente ad un sistema destrorso o sinistrorso. La lunghezza del segmento è numericamente uguale all'area del parallelogramma, quindi $ab \sin\vartheta$, dove ϑ è l'angolo tra i vettori $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$. Indicheremo il prodotto vettoriale con la notazione $\boldsymbol{c} = [\boldsymbol{ab}]$; quindi i vettori $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ devono essere posti tra parentesi quadre. Si utilizza anche il simbolo $\times$: $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$. *Se i vettori **a** e **b** sono polari, il loro prodotto vettoriale sarà un vettore assiale. Il prodotto vettoriale di un vettore polare per un vettore assiale è un vettore polare. Il prodotto vettoriale di due vettori assiali è un vettore assiale.*

Problemi

1. Dimostrare che se $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ sono due vettori polari o assiali, l'espressione $a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$ è un'invariante in un sistema di coordinate rettangolari. (Questa espressione si dice *prodotto scalare* dei vettori $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ e viene indicata con il simbolo $(\boldsymbol{ab})$ o $\boldsymbol{ab}$.)

Indicazione. Per fare la dimostrazione si utilizzeranno gli invarianti $a_x^2 + a_y^2 + a_z^2$, $b_x^2 + b_y^2 + b_z^2$ e $(a_x + b_x)^2 + (a_y + b_y)^2 + (a_z + b_z)^2$.

2. Dimostrare che il prodotto scalare di un vettore polare per un vettore assiale è uno pseudo-scalare (pseudo-invariante).

3. Dimostrare che il prodotto scalare di due vettori qualsiasi $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ ha per espressione $(\boldsymbol{ab}) = ab\cos\vartheta$, dove ϑ è l'angolo tra questi due vettori.

Dimostrazione. Dirigiamo l'asse X lungo il vettore $\boldsymbol{a}$. Si ha allora $a_y = a_z = 0$, $b_x = b\cos\vartheta$. Dato che il prodotto scalare $(\boldsymbol{ab}) \equiv a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$ è un'invariante, si ha $(\boldsymbol{ab}) = a_x b_x = ab\cos\vartheta$.

4. Il prodotto scalare di un vettore $\boldsymbol{a}$ per il prodotto vettoriale $[\boldsymbol{bc}]$ di due altri vettori è chiamato prodotto misto dei tre vettori $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{c}$. Viene denotato con $(\boldsymbol{a}[\boldsymbol{bc}])$. Mostrare che questo prodotto misto sarà uno pseudo-scalare se i tre vettori o uno di essi sono polari. Se nessuno

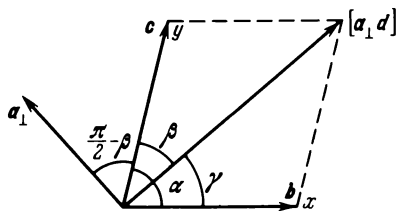



Fig. 19.

o due vettori sono polari il prodotto misto deve essere una grandezza scalare (invariante). Dimostrare che il prodotto misto è numericamente uguale al volume del parallelepipedo costruito con i vettori $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{c}$. Partendo da quest'ultimo risultato dimostrare che

$$(\boldsymbol{a}[\boldsymbol{bc}]) = (\boldsymbol{b}[\boldsymbol{ca}]) = (\boldsymbol{c}[\boldsymbol{ab}]) = -(\boldsymbol{a}[\boldsymbol{cb}]) = -(\boldsymbol{b}[\boldsymbol{ac}]) = -(\boldsymbol{c}[\boldsymbol{ba}]), \tag{7.3}$$

cioè *il prodotto misto non cambia nel caso di una permutazione ciclica dei termini*, ma cambia di segno se la permutazione non è ciclica.

5. Verificare la formula

$$[\boldsymbol{a}[\boldsymbol{bc}]] = (\boldsymbol{ac})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{ab})\boldsymbol{c}. \tag{7.4}$$

Dimostrazione. Presentiamo il vettore $\boldsymbol{a}$ nella forma $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_\parallel + \boldsymbol{a}_\perp$, dove $\boldsymbol{a}_\parallel$ è la componente del vettore $\boldsymbol{a}$ lungo il vettore $\boldsymbol{d} \equiv [\boldsymbol{bc}]$ e $\boldsymbol{a}_\perp$ è la componente perpendicolare a $\boldsymbol{d}$. Quindi

$$[\boldsymbol{a}[\boldsymbol{bc}]] \equiv [\boldsymbol{ad}] = [\boldsymbol{a}_\perp \boldsymbol{d}].$$

I tre vettori $\boldsymbol{a}_\perp$, $\boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{c}$ sono contenuti in un medesimo piano che è il piano della figura 19. Il vettore $\boldsymbol{d}$ è perpendicolare a questo piano e la sua lunghezza è uguale a $bc \sin\alpha$, dove α è l'angolo tra i vettori $\boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{c}$. Ne deriva che la lunghezza del vettore $[\boldsymbol{a}_\perp \boldsymbol{d}]$ è uguale a $a_\perp bc \sin\alpha$. Dato che questo vettore è contenuto nel piano della figura, si può decomporlo lungo i vettori $\boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{c}$ e presentarlo nella forma

$$[\boldsymbol{a}_\perp \boldsymbol{d}] = x\boldsymbol{b} + y\boldsymbol{c}.$$

Vengono determinati x e y attraverso il teorema dei seni

$$\frac{xb}{a_\perp bc \sin\alpha} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}, \quad \frac{yc}{a_\perp bc \sin\alpha} = \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha},$$

quindi

$$x = a_\perp c \sin\beta = a_\perp c \cos(a_\perp, c) = (a_\perp c) = (ac),$$
$$y = a_\perp b \sin\gamma = -a_\perp b \cos(a_\perp, b) = -(a_\perp b) = -(ab).$$

6. Verificare la formula

$$([ab]\,[cd]) = (ac)\,(bd) - (ad)\,(bc).$$

7. Mostrare che ogni prodotto vettoriale $[ab]$ può essere espresso sotto forma di un determinante simbolico

$$[ab] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}, \tag{7.5}$$

a condizione di decomporlo secondo gli elementi della prima riga che sono i vettori unitari $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ e $\boldsymbol{k}$ degli assi di un sistema di coordinate rettangolare. L'espressione (7.5) è valida nei sistemi destrorsi e sinistrorsi; nei due sistemi di coordinate rettangolari le componenti del prodotto vettoriale vengono determinate dalle medesime formule. È appunto questo che determina il carattere assiale del prodotto vettoriale.

8. Dimostrare che in un sistema di coordinate rettangolare si ha

$$(A\,[BC]) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}. \tag{7.6}$$

9. Siano e_1, e_2, e_3 tre vettori arbitrariamente scelti e che non siano nello stesso piano. I vettori

$$e_1^* = \frac{[e_2 e_3]}{(e_1\,[e_2 e_3])}, \quad e_2^* = \frac{[e_3 e_1]}{(e_1\,[e_2 e_3])}, \quad e_3^* = \frac{[e_1 e_2]}{(e_1\,[e_2 e_3])} \tag{7.7}$$

vengono chiamati vettori *reciproci* dei vettori e_1, e_2, e_3. È evidente che questi vettori non sono nello stesso piano. Dimostrare che

$$e_1 = \frac{[e_2^* e_3^*]}{(e_1^*[e_2^* e_3^*])}, \quad e_2 = \frac{[e_3^* e_1^*]}{(e_1^*[e_2^* e_3^*])}, \quad e_3 = \frac{[e_1^* e_2^*]}{(e_1^*[e_2^* e_3^*])}. \tag{7.8}$$

Dimostrare inoltre che

$$(e_i e_k^*) = \delta_{ik}, \tag{7.9}$$

dove δ_{ik} è il simbolo di Kronecker, il che vuol dire che

$$\delta_{ik} = 1 \quad \text{se} \quad i = k \quad \text{e} \quad \delta_{ik} = 0 \quad \text{se} \quad i \neq k.$$

Siano A e B due vettori qualsiasi che si presentino nella forma

$$A = A_1 e_1 + A_2 e_2 + A_3 e_3, \quad B = B_1^* e_1^* + B_2^* e_2^* + B_3^* e_3^*.$$

Dimostrare che

$$(AB) = A_1 B_1^* + A_2 B_2^* + A_3 B_3^*. \tag{7.10}$$

§ 8. *Gradi di libertà e coordinate generalizzate*

1. La posizione di un punto nello spazio può essere determinata da tre coordinate rettangolari *x, y, z*. Invece di coordinate rettangolari si possono prendere coordinate *polari* o qualsiasi altro sistema di coordinate. Qualun-

que sia il sistema in esame, è importante notare che il numero delle coordinate indipendenti richieste per determinare univocamente la posizione del punto che si muove nello spazio in modo qualunque è uguale a *tre*. Il punto così definito possiede *tre gradi di libertà*.

In certe condizioni il moto di un punto non può essere libero. Consideriamo, per esempio, una palla attaccata a un'estremità di un filo rigido, che abbia l'altra estremità fissata (pendolo matematico). Quando il filo è teso, la palla non può spostarsi che sulla superficie di una sfera che ha per centro il punto in cui il filo è fissato. Esistono numerosi altri esempi in cui il punto materiale è soggetto a restare su una superficie data. In tutti questi casi si dice che il moto è *vincolato*. Le coordinate x, y, z di un tale punto devono verificare un'equazione del tipo $f(x, y, z) = 0$ che non è altro che l'equazione della superficie considerata. Quindi, due coordinate soltanto risultano indipendenti, per esempio x e y. La terza coordinata z può essere calcolata risolvendo l'equazione del vincolo $f(x, y, z) = 0$. Si dice in questi casi che il punto possiede *due gradi di libertà*.

Se il punto non può spostarsi che lungo una curva data, il numero di coordinate indipendenti necessarie per caratterizzare la sua posizione si riduce ad uno. Per coordinata, si può prendere, per esempio, la distanza del punto materiale da un punto della curva considerata e valutarla lungo questa curva. In questi casi si dice che il punto possiede un *solo grado di libertà*.

2. È facile estendere queste considerazioni ad un sistema meccanico costituito da un numero qualunque n di punti materiali. Se tutti questi punti possono spostarsi senza alcuna restrizione, si dovranno fissare $3n$ coordinate per caratterizzare le loro posizioni istantanee (3 coordinate per punto). Si dice allora che il sistema possiede $3n$ *gradi di libertà*. In certi problemi vengono imposte delle restrizioni ai moti dei punti materiali, vengono cioè imposte alle $3n$ coordinate condizioni supplementari chiamate *vincoli*. Per determinare univocamente le posizioni di tutti i punti materiali del sistema, è sufficiente conoscere un numero minore di coordinate che noi diremo f. Le altre $3n - f$ coordinate si calcolano attraverso l'equazione del vincolo. Non è necessario scegliere come coordinate indipendenti quelle rettangolari. Si possono scegliere non importa come f quantità $q_1, q_2, \ldots, q_f$ la cui conoscenza determina univocamente le posizioni dei punti materiali del sistema. Queste quantità portano il nome di *coordinate generalizzate*. Il moto del sistema sarà interamente definito se si determina la variazione in funzione del tempo delle coordinate generalizzate. Le derivate delle coordinate generalizzate rispetto ai tempi $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n$ portano il nome di *velocità generalizzate*. Nel moto di un punto materiale su di un cerchio la posizione può essere definita dal valore dell'angolo al centro φ formato dal raggio vettore del punto mobile e la posizione del raggio vettore in un istante dato ($t = 0$ per esempio). In questo caso la velocità generalizzata $\omega = \dot{\varphi}$ è la velocità angolare del punto in rotazione.

Le coordinate generalizzate $q_1, q_2, \ldots, q_f$ possono essere scelte in modo qualunque, ma in ogni istante devono determinare completamente lo stato

del sistema meccanico. In tutti i casi il numero f delle coordinate generalizzate indipendenti sarà lo stesso: questo è il *numero di gradi di libertà del sistema.*

3. Determiniamo, per esempio, il numero di gradi di libertà di un *solido perfetto*. Nella meccanica si intende per *solido perfetto* un sistema di punti materiali le cui mutue distanze rimangono invariabili quando il solido è in moto. Dimostreremo che ogni *solido perfetto il cui moto non è sottoposto ad alcuna restrizione possiede sei gradi di libertà*. In effetti, per determinare univocamente la posizione di un corpo solido, è sufficiente conoscere tre punti A, B, C non allineati (fig. 20). Per dimostrare questo enunciato,

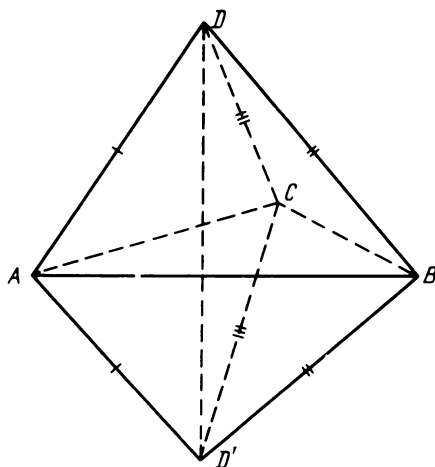



Fig. 20.

prendiamo a scelta un quarto punto D del corpo solido. Ammettiamo che le distanze AD, BD e CD del corpo solido dato siano note poiché le distanze che separano i punti devono rimanere invariabili qualunque sia il moto del corpo solido. Inoltre, per ogni moto del corpo solido, il punto D deve trovarsi sempre dallo stesso lato del piano del triangolo ABC. Per determinare la posizione del punto D nello spazio, costruiamo sulle lunghezze fissate AC, AD e CD il triangolo ADC. La sua base AC è fissata nello spazio. Facciamo girare il triangolo ADC attorno alla sua base AC fino a che il suo vertice D si trovi a una distanza data dal terzo punto B. I due punti D e D' soddisfano questa condizione. Il punto D' non soddisfa le condizioni del problema, poiché si trova dall'altro lato del piano ABC. Quindi, conosciute le posizioni di tre punti A, B, C, si può trovare la posizione di ogni altro punto del corpo solido per mezzo di una costruzione geometrica semplice.

Si possono individuare le posizioni dei tre punti A, B e C per mezzo delle loro coordinate rettangolari: x_A, y_A, z_A; x_B, y_B, z_B; x_C, y_C, z_C. Queste

nove coordinate non sono indipendenti, essendo legate tra loro dalle relazioni

$$(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2 = AB^2 = \text{cost},$$
$$(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2 + (z_B - z_C)^2 = BC^2 = \text{cost},$$
$$(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2 + (z_C - z_A)^2 = CA^2 = \text{cost}$$

(le lunghezze AB, BC e CA sono invariabili). Non rimangono dunque che sei coordinate indipendenti e il corpo solido possiede quindi sei gradi di libertà.

Se si impongono restrizioni al moto del corpo solido, il numero dei gradi di libertà diminuisce. Così *un corpo solido, avente un punto fisso, non può che girare attorno a questo punto fissato e non possiede allora che tre gradi di libertà. Un corpo solido che è costretto a girare attorno ad un asse fissato non possiede che un solo grado di libertà. Nel caso in cui il corpo solido può girare attorno ad un asse fissato scivolando lungo questo asse, il numero dei gradi di libertà diventerà uguale a due,* ecc.

II. LE LEGGI DI NEWTON

Questo capitolo è dedicato all'esposizione delle leggi fondamentali della *dinamica,* quella parte della meccanica classica che ha per oggetto lo studio del moto di un corpo sottoposto all'azione di forze. La forza che agisce su un corpo è una misura delle interazioni di questo corpo con gli oggetti materiali che lo circondano (altri corpi materiali o campi di forza). Daremo più avanti una definizione più precisa del concetto di forza.

Le leggi della dinamica sono state stabilite da Newton e portano quindi il suo nome. Come tutti i principi fondamentali della fisica, le leggi della dinamica sono *generalizzazioni di fatti sperimentali.* Queste leggi devono essere considerate non come enunciazioni isolate e indipendenti, ma come un *sistema di leggi reciprocamente correlate.* Non si sottopone a verifica sperimentale una singola legge, ma tutto l'insieme.

Dato il ruolo eccezionale che hanno in meccanica le leggi di Newton, riteniamo utile esporle così come vennero formulate. Newton ha dato come preambolo alle sue leggi otto definizioni, di cui solo quattro ci saranno utili.

Definizione 1. *La quantità di materia (massa) è la misura della medesima ricavata dal prodotto della densità per il volume della materia.*

Definizione 2. *La quantità di moto è la misura del medesimo ricavata dal prodotto della velocità per la quantità di materia.*

Definizione 3. *La forza insita (vis insita) della materia è la sua disposizione a resistere; per cui ciascun corpo, per quanto sta in esso, persevera nel suo stato di quiete o di moto rettilineo uniforme.*

Definizione 4. *Una forza impressa è un'azione esercitata su di un corpo al fine di mutare il suo stato di quiete o di moto rettilineo uniforme.*

Legge 1. *Ciascun corpo persevera nel proprio stato di quiete o di moto rettilineo uniforme, eccetto che sia costretto a mutare quello stato da forze impresse.*

Legge 2. *Il cambiamento di moto è proporzionale alla forza motrice impressa, ed avviene lungo la linea retta secondo la quale la forza è stata impressa.*

Legge 3. *Ad ogni azione corrisponde una reazione uguale e contraria: ossia, le azioni di due corpi sono sempre uguali fra loro e dirette verso parti opposte.*

Il concetto di massa è stato espresso da Newton in modo vago poiché lo riferisce alla densità, concetto di cui non dà una definizione. Inoltre, il concetto di massa definito come prodotto del volume del corpo per la densità della sostanza contenuta in questo volume è valido per corpi macroscopici, ma non può essere applicato alle particelle elementari e atomiche. Per questo la definizione di massa data da Newton non è rimasta ed è stata sostituita da altre definizioni.

Aristotele e i suoi discepoli consideravano la forza come causa del moto, ma ritenevano che allorché cessa l'azione della forza, cessa anche il moto. In altre parole, la forza è necessaria per mantenere il moto. La scoperta della prima legge di Newton stabiliva l'erroneità di una simile concezione, perché non è necessaria alcuna «forza» con cui un moto uniforme debba essere sostenuto. La forza da quel momento fu considerata come la *causa che determina una variazione della quantità di moto di un corpo* e, poiché questa variazione è provocata da altri corpi, si può dare della forza la definizione seguente. *La forza è una misura dell'intensità di interazione dei corpi che si manifesta attraverso una variazione delle loro quantità del moto.*

Nelle pagine seguenti esporremo in modo dettagliato il contenuto delle leggi di Newton e le nozioni ad esse legate, senza attenerci al metodo utilizzato da Newton.

§ 9. *Legge d'inerzia. Sistema di riferimento inerziale*

1. La *prima legge di Newton* non è che la *legge d'inerzia* di Galileo. Secondo questa legge, *ogni corpo (o punto materiale) non sottoposto a forze esterne si trova o in stato di quiete o in moto rettilineo uniforme.* Un tale corpo è detto *libero* e il suo moto è detto *moto libero* o *moto inerziale.*

A stretto rigore nessun corpo è libero e la nozione di corpo libero è una astrazione fisica. Si può invece porre un corpo in condizione che le forze esterne che potrebbero influenzarlo siano eliminate o si compensino vicendevolmente. Se si suppone che queste azioni esterne diminuiscono indefinitamente, si può avere, al limite, l'idea di cosa sia un corpo ed un moto liberi.

Insorge però una difficoltà: come arrivare alla convinzione che il corpo non è sottoposto ad alcuna azione esterna? Il metodo di investigazione deve essere indipendente; stabilire che un moto è libero quando è privo di accelerazione equivarrebbe a svuotare la legge del suo contenuto. Non esiste infatti alcuna risposta soddisfacente a questo problema. Ci convinciamo dell'assenza di forze esterne per la mancanza di molle o di corde, o di altri corpi, che esercitino qualche azione sul corpo considerato; si potrebbe allora concludere che questo corpo non è sottoposto a forze esterne. Tuttavia i

corpi subiscono azioni di forza non solo per contatto con altri corpi, ma anche da parte di *campi di forze* generati da altri corpi. Il vero problema consiste dunque nel poter affermare che il corpo considerato non è sottoposto all'azione di campi di forze.

Tutte le forze naturali attualmente conosciute possono essere ridotte alle forze d'*attrazione gravitazionale,* alle *forze elettromagnetiche* ed alle forze di interazione tra i nuclei atomici e le particelle elementari (*forze nucleari, interazioni deboli*). È assai facile liberarsi da queste ultime forze perché sono forze *a corta distanza* che non si manifestano che a distanze inferiori a 10^{-12} cm.

Le forze elettromagnetiche e gravitazionali sono delle forze che risultano da un'azione che si propaga *a distanza;* esse decrescono lentamente con la distanza. Le forze statiche sono inversamente proporzionali al quadrato della distanza; le forze variabili (onde elettromagnetiche) decrescono ancora più lentamente, essendo inversamente proporzionali alla distanza. L'esistenza dei pianeti, delle stelle, dei pulsar, delle galassie ci è rivelata dalle onde elettromagnetiche (luce, onde radioelettriche, raggi X) che vengono emesse da questi corpi. Perciò non si può affermare che gli oggetti lontani non facciano apparire rilevanti campi elettromagnetici e gravitazionali nella regione di spazio che ci interessa. Dato che questi campi elettromagnetici agiscono in modo *differente* sulle cariche positive e negative di cui ogni corpo materiale è dotato, ci si può convincere della loro presenza o della loro assenza con lo studio sperimentale della separazione delle cariche elettriche. Un corpo di prova, elettricamente carico, collocato nello stesso punto dello spazio in cui esiste un campo elettromagnetico si sposta in modo diverso a seconda che la sua carica sia positiva o negativa. Tutti i dati disponibili permettono di affermare che i corpi lontani dell'Universo non creano campi elettromagnetici statici osservabili in regioni ristrette di spazio (il sistema solare o la Galassia).

Quanto ai campi gravitazionali, non si può fare una tale affermazione con la stessa certezza. Tuttavia anche se questi campi esistessero si potrebbero ignorare, perché in effetti lo stesso campo gravitazionale comunica esattamente la medesima accelerazione a tutti i corpi indipendentemente dalla loro composizione. Si può dunque partire dal presupposto che il campo gravitazionale statico creato da corpi lontani nell'Universo possa essere considerato come uniforme in regioni ristrette di spazio. Si può introdurre allora un sistema di riferimento che cade liberamente in un tale campo gravitazionale uniforme. L'esistenza di questo campo gravitazionale uniforme non influisce in nessun modo sui fenomeni osservati in un tale sistema di riferimento. Tutto avviene come nell'interno di una navicella spaziale che si muova liberamente nello spazio cosmico; i cosmonauti che sono all'interno non avvertono l'esistenza di un campo gravitazionale (imponderabilità). Quanto ai campi gravitazionali periodici (onde gravitazionali) essi sono troppo deboli perché la loro azione sia percepita. Solo da poco tempo

sono stati fatti dei tentativi per rivelarli. Però poiché producono effetti quasi nulli, non si è ancora riusciti a metterli in evidenza sperimentalmente. Al momento queste osservazioni ci sembrano sufficienti, riprenderemo la questione in maniera più dettagliata nel capitolo IX.

2. Nella cinematica la scelta del sistema di riferimento non era essenziale, perché tutti i sistemi di riferimento sono *cinematicamente equivalenti.* In dinamica è diverso. La legge d'inerzia pone con acutezza la questione della scelta di un sistema di riferimento. Un solo e medesimo moto si presenta in maniera *differente* nei diversi sistemi di riferimento. Se in un certo sistema di riferimento il moto di un corpo è rettilineo e uniforme, in un sistema di riferimento che si sposta con un'accelerazione diversa da zero rispetto al primo, il moto del corpo sarà differente. Ne consegue che la legge d'inerzia non può essere verificata in tutti i sistemi di riferimento e che essa perde ogni significato se non vengono indicati i sistemi di riferimento utilizzati. La meccanica classica postula *l'esistenza di un sistema di riferimento nel quale tutti i corpi liberi hanno un moto rettilineo e uniforme.* Questo sistema porta il nome di *sistema di riferimento inerziale.* La legge d'inerzia si riduce in effetti all'affermazione dell'esistenza di almeno un sistema di rifermento inerziale.

Questa affermazione nasce dalla generalizzazione di una enorme massa di fatti sperimentali. Solo con un procedimento sperimentale si può infatti decidere quali sistemi siano inerziali e quali non lo siano. Supponiamo, per esempio, di voler esaminare il moto delle stelle o di altri corpi astronomici osservabili nella nostra parte dell'Universo. Si può concludere allora che il sistema di riferimento legato alla Terra, considerata immobile (sistema di riferimento detto *terrestre*) non sarà un sistema inerziale. In effetti, rispetto a questo sistema di riferimento i corpi siderali effettuano nella sfera celeste delle rotazioni. Dato che le loro distanze dalla Terra sono molto grandi, questo moto dà origine a grandi accelerazioni centripete, dirette verso la Terra. Intanto, ciascun corpo siderale trovandosi a distanza enorme da tutti gli altri corpi, è praticamente libero. Nel sistema di riferimento terrestre però non rileviamo un loro moto rettilineo, ma circolare. Poiché questo moto non si conforma alla legge d'inerzia, il sistema di riferimento terrestre non può essere un sistema inerziale. Bisogna dunque cercare altri sistemi che verifichino la legge d'inerzia. Proviamo, per esempio, il *sistema di riferimento eliocentrico* chiamato anche *sistema di riferimento copernicano.* L'origine del sistema di coordinate è posta al centro del Sole (più precisamente nel centro di massa del sistema solare); gli assi delle coordinate sono delle rette che congiungono questo centro a tre stelle estremamente lontane e che non si trovano su un medesimo piano. Gli oggetti materiali che servono a materializzare questi assi sono i raggi luminosi nati dalle stelle e giunti al sistema solare. Dato che le stelle si muovono di un moto relativo le une rispetto alle altre, gli angoli tra gli assi delle coordinate del sistema di riferimento copernicano non restano invariabili nel corso del tempo. Data

la enorme distanza a cui si trovano le stelle, le variazioni di direzione degli assi sono talmente piccole che si può di regola ignorarle. Praticamente, il sistema di riferimento copernicano è un sistema inerziale, almeno per quanto riguarda i moti su scala del nostro sistema planetario, così come di ogni altro sistema la cui estensione è piccola rispetto alla sua distanza dalle tre stelle scelte come caposaldi nel sistema di riferimento copernicano. Questa posizione è confermata da esperienze in gran parte indirette. Alcune esperienze dirette (il pendolo di Foucault, ad esempio) saranno esaminate nel capitolo IX; le stesse esperienze servono anche a dimostrare che il sistema di riferimento terrestre non è un sistema inerziale.

3. Il sistema di riferimento terrestre non verifica la legge d'inerzia perché la Terra gira attorno al proprio asse ed attorno al Sole, *effettua* quindi *un moto accelerato rispetto al sistema di riferimento copernicano.* Si osservi che questi due moti di rotazione della Terra sono lenti [1], cosicché *rispetto ad un numero di fenomeni molto elevato, il sistema di riferimento terrestre si comporta praticamente come un sistema inerziale.* Le osservazioni e le esperienze consuete sui moti dei corpi sono tutte assai imprecise e non permettono di scoprire deviazioni dalla legge d'inerzia nel sistema di riferimento terrestre. Sarebbe necessario mettere in atto delle esperienze più precise. Per questo motivo, per stabilire le leggi fondamentali della dinamica, si può partire da uno studio del moto dei corpi rispetto alla Terra, e ignorando la sua rotazione, considerarla un *sistema di riferimento approssimativamente inerziale.*

4. Se le tre stelle utilizzate nel sistema di riferimento copernicano per fissare le direzioni degli assi coordinati appartengono alla nostre Galassia, il sistema di riferimento così definito potrà essere preso come sistema di riferimento inerziale, o meglio, approssimativamente inerziale solo quando si tratta del moto di corpi piccoli rispetto alle dimensioni della Galassia, come per esempio il sistema solare. Ma quando si tratta del moto della Galassia o di parecchie galassie, il sistema di riferimento copernicano non funziona più. Per costruire un altro sistema approssimativamente inerziale si possono utilizzare quattro corpi siderali separati gli uni dagli altri da distanze che sono grandi in confronto allo spazio dove si effettua il moto dei corpi considerati. Il centro di uno di questi corpi siderali può essere preso come origine delle coordinate, gli altri tre corpi saranno utilizzati per fissare le direzioni degli assi coordinati.

Nel nostro studio del moto dei corpi, noi supporremo dapprima che il moto sia rapportato ad un sistema di riferimento inerziale. Più avanti, nel capitolo IX, vedremo come si deve modificare l'enunciazione delle leggi del moto per adattarle ai sistemi non inerziali.

---

[1] Si preciserà nel capitolo IX che cosa bisogna intendere per rotazione lenta.

§ 10. *Massa e legge di conservazione dell'impulso*

1. Ogni volta che si cerca di imprimere un movimento ad un corpo, di modificare il modulo, la direzione o il senso della velocità di un corpo, quest'ultimo oppone resistenza a questi cambiamenti. Questa attitudine dei corpi ad opporsi ai cambiamenti del loro stato di quiete o di moto si chiama *inerzia.* Si manifesta in modo più o meno evidente secondo i corpi; è assai più difficile conferire la stessa accelerazione a una grossa pietra, ad esempio, che a una piccola palla di gomma. *La grandezza fisica che caratterizza l'inerzia di un corpo si chiama massa del corpo.*

Per dare una definizione quantitativa precisa di massa, cominceremo con l'introdurre la nozione di *sistema isolato* o *sistema chiuso.* È questo un sistema di corpi talmente lontani da tutti gli altri corpi da non poterne subire praticamente alcuna azione di forza. I corpi costituenti il sistema chiuso non possono essere che in mutua interazione. Consideriamo dunque un sistema chiuso costituito da due punti materiali le cui velocità siano piccole rispetto alla velocità della luce. Grazie alle interazioni tra i punti materiali, le loro velocità variano. Siano v_1 la velocità del punto *1,* v_2 la velocità del punto *2,* Δv_1 e Δv_2 gli incrementi di queste velocità durante il medesimo intervallo di tempo Δt. Le grandezze Δv_1 e Δv_2, di senso contrario, sono legate dalla relazione

$$m_1 \Delta v_1 = -m_2 \Delta v_2, \tag{10.1}$$

dove le grandezze invariabili m_1 e m_2 sono dello stesso segno e non dipendono assolutamente dalla natura delle interazioni tra i punti materiali *1* e *2.* Le interazioni possono risultare, ad esempio, dall'urto tra i punti *1* e *2* e possono essere realizzate attribuendo ai punti materiali delle cariche elettriche, oppure collocando tra loro una molletta, ecc. Si può far variare arbitrariamente la durata dell'intervallo di tempo Δt determinando così una variazione dei vettori Δv_1 e Δv_2. Ma le grandezze m_1 e m_2 (o piuttosto il loro rapporto) non ne saranno affatto influenzate e resteranno costanti. Questi risultati sono *fatti sperimentali* confermati innumerevoli volte. I coefficienti m_1 e m_2, che non dipendono che dai *punti materiali del sistema,* sono denominati *masse* o più esattamente *masse inerziali* dei punti materiali *1* e *2.*

Quindi, per definizione, *il rapporto delle masse di due punti materiali è uguale al rapporto, cambiato di segno, degli incrementi delle rispettive velocità, incrementi dovuti alla loro interazione,* a condizione che i punti materiali considerati formino un sistema isolato e si muovano a velocità non relativistiche.

2. Per passare dal rapporto delle masse alle masse stesse, bisogna scegliere una unità di massa, cioè scegliere un certo corpo la cui massa sarà definita uguale ad una unità e che sarà il *campione di massa.* Una volta fissato il campione di massa, le masse di altri corpi potranno essere determinate

in modo univoco. Tutte le masse saranno *positive* poiché tutte le masse sono dello stesso segno e la massa del corpo campione è positiva. In fisica, l'unità di massa fondamentale è il chilogrammo: è la massa di un peso campione in lega irridium-platino depositato nell'Ufficio internazionale dei pesi e misure, che si trova a Sevres, in Francia. Il chilogrammo è approssimativamente uguale alla massa di un decimetro cubo di acqua pura alla temperatura di 4° C. La millesima parte del chilogrammo si chiama *grammo.* A differenza della lunghezza e del tempo, per le quali sono state adottate delle *unità di misura naturali,* per l'unità di massa si è scelto quella di un corpo arbitrario. Sarebbe stato meglio adottare anche in questo caso un'unità naturale, per esempio la massa di una particella elementare come il protone.

Notiamo ancora una circostanza essenziale che risulta anche dall'esperienza. Si può determinare il valore del rapporto m_2/m_1 non soltanto mediante comparazione diretta delle masse dei corpi considerati, ma anche attraverso il seguente procedimento indiretto. Vengono determinati dapprima i rapporti tra le masse di ciascuno dei due corpi e quella di un terzo corpo, poi si dividono fra di loro i rapporti così determinati. Il risultato non dipende dalla massa del terzo corpo e coincide con il valore del rapporto m_2/m_1 determinato mediante comparazione diretta delle masse m_1 e m_2. Dividendo i due membri dell'uguaglianza (10.1) per la durata Δt dell'interazione dei corpi, si ottiene

$$m_1 \boldsymbol{a}_{1\,\mathrm{med}} = -m_2 \boldsymbol{a}_{2\,\mathrm{med}}, \tag{10.2}$$

e dopo il passaggio al limite

$$m_1 \boldsymbol{a}_1 = -m_2 \boldsymbol{a}_2. \tag{10.3}$$

Queste relazioni permettono di trovare i rapporti delle masse di due corpi attraverso la comparazione delle *accelerazioni medie* o *reali* che appaiono al momento dell'interazione tra questi corpi.

3. Scriviamo la relazione (10.1) in forma diversa. Siano $\boldsymbol{v}_1$ e $\boldsymbol{v}_2$ le velocità dei corpi prima dell'interazione mutua e $\boldsymbol{v}_1'$ e $\boldsymbol{v}_2'$ le velocità dopo l'interazione. Si avrà allora $\Delta \boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_1' - \boldsymbol{v}_1$, $\Delta \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{v}_2' - \boldsymbol{v}_2$. Portando queste espressioni nel (10.1) si ottiene

$$m_1 \boldsymbol{v}_1 + m_2 \boldsymbol{v}_2 = m_1 \boldsymbol{v}_1' + m_2 \boldsymbol{v}_2'. \tag{10.4}$$

Chiamiamo *impulso* o *quantità di moto di un punto materiale* il vettore definito come il prodotto della massa del punto materiale per la sua velocità:

$$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}. \tag{10.5}$$

Chiameremo *impulso* o *quantità di moto di un sistema di punti materiali* la somma vettoriale degli impulsi dei punti materiali costituenti il sistema. Per un sistema di due punti materiali, si avrà $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2 = m_1 \boldsymbol{v}_1 + m_2 \boldsymbol{v}_2$. L'uguaglianza (10.4) può dunque scriversi

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}', \tag{10.6}$$

dove $p = p_1 + p_2$ e $p' = p_1' + p_2'$ sono gli impulsi del sistema prima e dopo l'interazione. Quindi l'*impulso di un sistema isolato di due punti materiali si conserva, cioè resta invariabile nel tempo, indipendentemente dalle interazioni tra questi punti.* Questo enunciato porta il nome di *legge di conservazione dell'impulso.* Tale legge deriva dall'esperienza e dalla definizione di massa data sopra. Il fato che la grandezza mv soddisfi una «legge di conservazione» giustifica appunto il fatto che venga denotato questo prodotto con un simbolo speciale e che gli sia data una denominazione particolare. La grandezza m^2v, ad esempio, non gode di questa proprietà e non ha quindi nessuna importanza in meccanica. Estenderemo più avanti la legge di conservazione dell'impulso ai sistemi isolati costituiti da un numero qualunque di punti materiali.

4. La forma che abbiamo dato alla legge di conservazione dell'impulso è quella in uso in meccanica non relativistica; non è dunque verificata che per moti lenti. In meccanica relativistica questa legge è estesa al caso di moti rapidi; e noi affronteremo il problema nel quadro della teoria della relatività. Per il momento sarà sufficiente riportare il risultato principale al quale conduce questa estensione. In meccanica relativistica l'impulso di una particella è ancora definito dalla formula (10.5), ma la massa m dipende dalla velocità mediante la formula

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \qquad (10.7)$$

dove m_0 è una grandezza costante per una particella data ed è chiamata *massa a riposo:* tale massa coincide con quella introdotta in meccanica non relativistica. La grandezza m definita con la formula (10.7) è la *massa in moto* o *massa relativistica.* In meccanica relativistica la legge di conservazione dell'impulso di un sistema chiuso, costituito di due particelle in interazione le cui masse a riposo sono m_{01} e m_{02}, si esprime quindi con la formula matematica seguente:

$$\frac{m_{01}v_1}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}} + \frac{m_{02}v_2}{\sqrt{1 - \frac{v_2^2}{c^2}}} = \frac{m_{01}v_1'}{\sqrt{1 - \frac{v_1'^2}{c^2}}} + \frac{m_{02}v_2'}{\sqrt{1 - \frac{v_2'^2}{c^2}}}. \qquad (10.8)$$

In caso di moto lento, quando $v^2/c^2 \ll 1$, si può ignorare la variazione della massa con la velocità e porre $m = m_0$. La meccanica relativistica si trasforma allora nella meccanica non relativistica che è un suo caso limite approssimato. Per dare un'idea dell'errore in cui si incorre usando questa approssimazione, considereremo una navicella spaziale che si muove a una velocità $v = 8$ km/s. Si ha allora $\left(\frac{v}{c}\right)^2 = \left(\frac{8}{300\,000}\right)^2 \approx 7 \cdot 10^{-10}$. Se la

massa della nave è $m = 5t = 5 \cdot 10^6$ g, la massa relativistica m sarà superiore alla massa a riposo solo di $m - m_0 = 3{,}5 \cdot 10^{-3}$ g. In tutti i calcoli del moto della navicella spaziale questa correzione può e deve essere ignorata perché i dati iniziali utilizzati nei calcoli non possono essere misurati con un simile grado di precisione.

§ 11. *Seconda legge di Newton. Forza*

1. Ogni descrizione del moto si riduce in fin dei conti alla determinazione delle coordinate dei punti materiali del sistema meccanico come funzioni temporali. Ma procedendo così è difficile mettere in evidenza le leggi generali che regolano il moto. A questo scopo si deve ricorrere alle equazioni differenziali dove, a fianco delle coordinate e delle velocità, figurano le derivate degli impulsi rispetto al tempo (in meccanica non relativistica, le accelerazioni).

Se il punto materiale non è isolato, a causa delle interazioni con i corpi circostanti il suo impulso non si conserva più. Così, tutto concorre a caratterizzare l'intensità delle interazioni attraverso la derivata dell'impulso rispetto al tempo $\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \dot{\boldsymbol{p}}$. *Una delle principali generalizzazioni della meccanica classica* consiste nell'affermare che la derivata $\dot{\boldsymbol{p}}$ *dipende dalla posizione del punto materiale considerato rispetto ai corpi circostanti e a volte dalla sua velocità.* Questa derivata è funzione del raggio vettore $\boldsymbol{r}$ nonché della velocità $\boldsymbol{v}$ del punto materiale e può dipendere anche dalle coordinate e dalle velocità dei punti materiali circostanti, considerate come parametri. Denotiamo questa funzione con $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v})$. Allora

$$\dot{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{F}. \tag{11.1}$$

La funzione delle coordinate e della velocità del punto materiale $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v})$ che determina la derivata del suo impulso rispetto al tempo porta il nome di *forza* [1]. La *forza* è un *vettore,* perché risulta dalla derivazione del vettore $\boldsymbol{p}$ rispetto allo scalare t.

Dunque, *la derivata dell'impulso di un punto materiale rispetto al tempo è uguale alla forza alla quale è sottoposto.*

Questo enunciato porta il nome di *seconda legge di Newton.* L'equazione (11.1) che esprime questa legge è l'*equazione del moto del punto materiale.* Nel caso di moti le cui velocità non siano relativistiche, si può ignora-

[1] Utilizzando il principio di relatività e l'ipotesi dell'omogeneità dello spazio, si arriva a dimostrare che la forza $\boldsymbol{F}$ dipende non proprio dalle coordinate e dalle velocità stesse, ma dalle *differenze di coordinate* e dalle *differenze di velocità* del punto materiale considerato e dei punti circostanti con i quali questo punto interagisce (vedere il problema 3 nel § 38). Però questa precisazione non è, per il momento, necessaria.

re la variazione della massa con la velocità e scrivere la seconda legge di Newton nella forma seguente:

$$m\dot{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{F}, \tag{11.2}$$

ossia

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{F}. \tag{11.3}$$

Il prodotto della massa per l'accelerazione è uguale alla forza applicata.

Vogliamo sottolineare ancora una volta che il contenuto della seconda legge di Newton consiste nell'affermare che la $\boldsymbol{F}$ dipende solo dalle coordinate e dalla velocità del punto materiale. La seconda legge di Newton e l'equazione del moto (11.1) diventano concrete solo dopo la determinazione della funzione $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v})$. La meccanica fisica ha per oggetto essenziale la determinazione della forma di questa funzione in ogni caso concreto.

2. Diamo qualche semplice esempio della determinazione delle equazioni del moto. Questi esempi servono anche a dimostrare la validità della seconda legge di Newton.

Sospendiamo un corpo ad una molla (fig. 21). Dopo aver stabilito l'equilibrio, tiriamo il corpo verso il basso in modo da spostarlo dalla sua

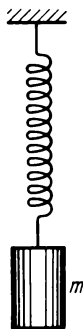
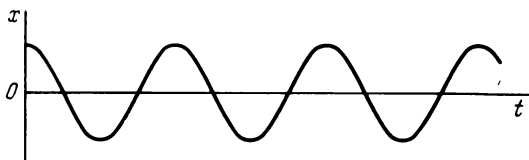



Fig. 21. Fig. 22.

posizione di equilibrio, poi lasciamolo andare. Si verificano allora delle oscillazioni dall'alto in basso. Se i parametri del sistema sono stati convenientemente scelti queste oscillazioni perderanno forza molto lentamente, e il corpo potrà effettuare parecchie decine di oscillazioni prima che queste si siano notevolmente smorzate. La posizione istantanea del corpo può essere caratterizzata mediante una sola coordinata x che è lo spostamento del corpo rispetto alla posizione di equilibrio. Per determinare la forma della funzione $x = x(t)$, si può fotografare il corpo ad intervalli molto brevi di tempo, sviluppare la pellicola e costruire il diagramma $x = x(t)$. Si può anche utilizzare un altro procedimento. Per oscillazioni debolmente smorzate, il diagramma ottenuto quasi non si distingue da una sinusoide (fig. 22) e po-

trà quindi essere descritto con l'equazione

$$x = A \cos\frac{2\pi t}{T}, \tag{11.4}$$

dove A e T sono delle costanti, chiamate, la prima, *ampiezza* e la seconda, *periodo di oscillazione*. Derivando due volte questa equazione si trovano la velocità e l'accelerazione del nostro corpo:

$$\dot{x} = -\frac{2\pi A}{T}\sin\frac{2\pi t}{T}, \quad \ddot{x} = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 A\cos\frac{2\pi t}{T}.$$

Paragonando quest'ultima espressione con (11.4) si ha

$$\ddot{x} = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 x,$$

ossia moltiplicando per la massa m del corpo

$$m\ddot{x} = -kx, \tag{11.5}$$

dove

$$k = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 m. \tag{11.6}$$

Paragonando (11.5) e (11.3) si trova la forza

$$F = -kx. \tag{11.7}$$

Si vede che la forza F dipende solo dall'allungamento x della molla: questo è il solo parametro variabile, determinato dalla posizione dei corpi circostanti che esercitano un'azione sul corpo considerato. Se viene sospeso alla molla un altro corpo di massa differente, varia il periodo T delle oscillazioni. L'esperienza dimostra però che il rapporto m/T^2 e quindi il coefficiente k avranno lo stesso valore. Ne consegue che la forza F dipende solo dall'estensione della molla e non dal corpo che avrà determinato questa estensione. Questi dati sperimentali dimostrano la validità della seconda legge di Newton. Si può dunque prevedere che se il corpo non subisce alcuna altra azione oltre quella che esercita la molla, la sua accelerazione avrà sempre come modulo $k\frac{x}{m}$ e sarà diretta lungo l'asse della molla nel senso opposto all'allungamento x. L'accelerazione non dipende assolutamente dal modo (rettilineo, circolare o altro) in cui il corpo si muove: anche questa conclusione è verificata per via sperimentale.

Si constata quindi che *la forza di tensione F della molla è proporzionale al suo allungamento x*. Studi sperimentali più precisi hanno dimostrato che quest'ultimo risultato non è che approssimato e può esser utilizzato solo quando l'allungamento della molla non è molto grande. È questa la *legge*

di Hooke (1635-1703). La grandezza k porta il nome di *coefficiente d'elasticità* o di *durezza della molla.* Per una molla data il coefficiente k è una costante e può avere valori diversi per molle diverse.

L'esperienza dimostra che le oscillazioni di un corpo sospeso ad una molla vanno riducendosi via via per cessare poi del tutto. Ne deriva che l'equazione del moto (11.5) non è che una approssimazione. Risulta che ogni corpo che si muove in un mezzo gassoso o liquido trova una resistenza il cui valore dipende dalla velocità del corpo. Se la velocità del corpo non è troppo grande (rispetto al mezzo circostante), questa forza di resistenza è approssimativamente proporzionale alla velocità. Per una sfera sospesa ad una molla, lo smorzamento delle sue oscillazioni in un mezzo gassoso, ad esempio, può essere espresso con buona approssimazione dall'equazione

$$m\ddot{x} = -kx - b\dot{x}, \tag{11.8}$$

dove b è un fattore costante il cui valore dipende dalle dimensioni della sfera e dalla natura del gas. Questo è un esempio di forza che dipende sia dalla posizione che dalla velocità del corpo sferico.

3. Per risolvere i problemi di moto dei punti materiali e dei sistemi di punti, si deve disporre di *equazioni differenziali che descrivono questi moti.* Il procedimento utilizzato per ottenere queste equazioni importa poco; si potrebbero ottenere e costruire tutta la meccanica anche senza ricorrere alla nozione di forza.

Nello studio dei problemi dinamici, la meccanica pone e risolve due tipi di problemi: 1) conosciuto il moto di un corpo, calcolare le forze alle quali questo è sottoposto; 2) conosciute le forze che agiscono su un corpo, determinare il suo moto. I problemi del primo tipo sono relativamente semplici, poiché si riducono a calcolare accelerazioni dei punti materiali che costituiscono il sistema in esame. Un esempio di questo tipo di problemi è dato dal problema concernente la forza che agisce su un corpo oscillante sospeso ad una molla, che abbiamo già esaminato. I problemi del secondo tipo, i più importanti in meccanica, sono notevolmente più complicati. In questi problemi si deve cominciare a scrivere le equazioni del moto di ciascuno dei punti materiali costituenti il sistema. Si devono dunque determinare le forze come funzioni delle coordinate e delle velocità dei punti in mutua interazione. Si riesce così ad arrivare ad un sistema di equazioni differenziali la cui soluzione (in condizioni iniziali date) dà una descrizione completa del moto del sistema. Da tutto ciò risulta che la soluzione di questo tipo di problemi implica l'*integrazione di equazioni differenziali,* operazione più complessa di quella della derivazione.

Può capitare di dover affrontare problemi di tipo misto, come nel caso, ad esempio, in cui si impongano delle restrizioni ben determinate ai moti del sistema (il punto mobile è obbligato a restare, ad esempio, su una certa retta oppure su un certo piano). Tali restrizioni imposte ai moti sono chiamati *vincoli.* L'azione esercitata da ogni vincolo, sia ad es. una retta oppu-

re una superficie a limitare la libertà di movimento, consiste nell'applicare al corpo una forza che ha il nome di *reazione* (o forza) *vincolare*. Il problema consiste allora non soltanto nel determinare il moto di ciascun punto del sistema, ma anche nel calcolare le reazioni vincolari.

4. Vediamo qual'è la correlazione tra la prima e la seconda legge di Newton. Se si pone $\boldsymbol{F} = 0$ nell'equazione (11.1), si ottiene $\frac{dp}{dt} = 0$. Ne deriva che $\boldsymbol{p} =$ cost, il che implica che sia l'impulso che la velocità di un punto materiale nel moto libero sono costanti. Quindi, formalmente, la prima legge potrebbe essere considerata come una conseguenza della seconda. Ci si può domandare allora: perché farne una legge indipendente? La risposta dice che l'equazione (11.1) che esprime la seconda legge ha senso soltanto se si precisa il sistema di riferimento nel quale questa legge è valida. Si può definire un tale sistema di riferimento solo facendo ricorso alla prima legge, la quale afferma l'esistenza di un sistema di riferimento in cui un punto materiale libero si muove senza accelerazione. In tale sistema di riferimento il moto di ogni punto materiale è descritto attraverso l'equazione (11.1) (seconda legge). Non si può dunque considerare la prima legge come una conseguenza logica della seconda, visto che esiste tra esse una correlazione più profonda di quanto non appaia a prima vista.

5. L'equazione (11.2) predetermina la scelta dell'unità di forza. Dato che le unità di lunghezza, di massa e di tempo sono già stabilite, l'unità di forza deve corrispondere a una forza che comunichi all'unità di massa una accelerazione uguale all'unità. Nel 1960, la XIª Conferenza generale dei pesi e misure adottò il *Sistema internazionale delle unità di misura* (sistema SI). Alla base di questo sistema ci sono sei unità di misura indipendenti: unità di lunghezza — il *metro* (m), unità di tempo — il *secondo* (s), unità di massa — il *chilogrammo* (kg), unità di differenza di temperatura — il *kelvin* (K), unità d'intensità della corrente — l'*ampere* (A) e l'unità d'intensità luminosa — la *candela* (cd). Tutte le altre unità di misura *derivano* dalle unità fondamentali. È facile mostrare che cosa si intenda per unità derivata, prendendo ad esempio l'unità di forza. Nel sistema SI l'unità di forza è il newton (N). Il newton è la forza che comunica un'accelerazione di 1 m/s^2 alla massa di 1 kg. In fisica, a fianco del sistema SI, si continua a utilizzare il vecchio sistema CGS. Nel sistema CGS le unità fondamentali sono: il *centimentro* (cm) per l'unità di lunghezza, il *secondo* (s) per l'unità di tempo e il *grammo* (g) per l'unità di massa. In questo sistema, l'unità di forza è la *dina*. La dina è la forza che, applicata a una massa di 1 g, le comunica un'accelerazione di 1 cm/s^2. È evidente che

$$1 \text{ N} = 10^5 \text{ dine}.$$

In meccanica i due sistemi sono ugualmente comodi perché non differiscono in maniera sostanziale l'uno dall'altro. Essi differiscono solo per quanto riguarda la *scala* delle unità fondamentali di massa e di lunghezza.

Nei due sistemi tutte le nozioni di meccanica hanno esattamente il medesimo significato e tutte le formule si scrivono nel medesimo modo. Ciò non vale in elettricità, in ottica e in fisica atomica per lo studio delle quali è più adatto il sistema CGS. Per questo motivo abbiamo dato la preferenza a quest'ultimo nel nostro corso di fisica generale.

6. Per concludere questo paragrafo esamineremo il problema della *composizione delle forze.* Abbiamo già detto che la *forza è un vettore.* Con ciò abbiamo voluto indicare semplicemente che, in seguito a una rotazione del sistema di coordinate, le componenti di una forza si trasformano come quelle di un vettore. Così come per ogni vettore, si può introdurre anche per le forze l'operazione di addizione nel senso matematico di questo termine (v. § 7). Per definizione si fa corrispondere a due forze $\boldsymbol{F}_1$ e $\boldsymbol{F}_2$ una nuova grandezza rappresentata dalla diagonale del parallelogramma costruito sui vettori $\boldsymbol{F}_1$ e $\boldsymbol{F}_2$. Si dimostra facilmente che questa nuova grandezza è un vettore, detto *risultante* o *somma geometrica* delle forze $\boldsymbol{F}_1$ e $\boldsymbol{F}_2$. La verifica sperimentale dell'esattezza di una tale affermazione è assurda quanto la verifica sperimentale dell'uguaglianza aritmetica $2+3 = 5$. Il risultato è corretto *per la stessa definizione* di composizione di vettori. Talvolta però si conferisce alla composizione delle forze un significato *fisico.* Si tratta proprio di questo significato quando in fisica elementare si parla per la prima volta di addizione delle forze. Ma con ciò è il problema stesso a non essere trattato abbastanza chiaramente. In effetti si comincia col dire che un corpo (punto materiale) è sottoposto all'azione simultanea di due forze $\boldsymbol{F}_1$ e $\boldsymbol{F}_2$. Poi ci si domanda con quale unica forza $\boldsymbol{F}$ si possano sostituire queste due forze perché il risultato dell'azione sia lo stesso. L'incertezza proviene dal fatto che non si precisa in che senso intendere «azione simultanea di due forze». Nelle condizioni date, ogni punto materiale è sottoposto ad una sola forza il cui modulo, direzione e senso sono determinati dalla posizione del punto materiale rispetto a tutti i corpi che lo circondano. Per spiegare meglio il significato del problema qui esposto esamineremo due semplici esempi.

Supponiamo che a un punto materiale A sia fissata una molla tesa che applica al punto A una forza di trazione $\boldsymbol{F}_1$. Eliminiamo questa molla e facciamo agire sul punto materiale A un'altra molla esercitante un'altra forza di trazione $\boldsymbol{F}_2$. La direzione e il modulo delle forze $\boldsymbol{F}_1$ e $\boldsymbol{F}_2$ ci sono dati dalla direzione degli assi delle molle e dal loro allungamento. Attacchiamo ora il nostro punto materiale A a queste due molle la cui direzione e allungamento saranno gli stessi di prima. Si tratta di determinare la forza $\boldsymbol{F}$ che agisce sul punto A sottoposto all'azioni delle due molle.

Il nostro secondo esempio concerne una carica puntiforme q, immobile in un punto A dello spazio. Supponiamo che ai punti B e C si trovino le cariche puntiformi q_1 e q_2 che determinano sulla carica q una forza $\boldsymbol{F}$. Eliminiamo la carica q_2 e indichiamo con $\boldsymbol{F}_1$ la forza esercitata dalla carica q_1 sulla carica q. Verrà definita in modo analogo la forza $\boldsymbol{F}_2$ che esercita su q

la sola carica q_2. Il problema consiste nel determinare la forza $\boldsymbol{F}$, conoscendo le forze $\boldsymbol{F}_1$ e $\boldsymbol{F}_2$.

Chiamiamo $\boldsymbol{F}_i$ la forza esercitata sul punto materiale considerato da un i-esimo corpo (sorgente della forza $\boldsymbol{F}_i$), mentre tutte le altre sorgenti di forza sono soppresse ($i = 1, 2, \ldots, n$). Quale sarà la forza applicata $\boldsymbol{F}$ quando tutte le sorgenti n di forza saranno presenti? È un *problema di fisica* che non può essere risolto per mezzo di una definizione. Si dice generalmente che la forza $\boldsymbol{F}$ è uguale alla somma geometrica delle forze $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \ldots, \boldsymbol{F}_n$. Tuttavia, una tale risposta non costituisce una conseguenza logica delle leggi di Newton o di qualsiasi altra legge. Questa risposta può essere vera o falsa e solo l'esperienza permette di risolvere il problema. L'esperienza dimostra che per quanto riguarda molle tese e forze elettriche generate da cariche puntiformi, la risposta è corretta. Si dice allora che le forze $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \ldots,$ verificano il *principio di sovrapposizione.* Questo principio si fonda sull'idea che *le forze applicate sono indipendenti.* Si dice che le forze agiscono indipendentemente quando ciascuna forza $\boldsymbol{F}_i$ comunica al corpo considerato l'accelerazione $\boldsymbol{a}_i$, sia che il corpo venga sottoposto all'azione di un'unica forza i che a quella di tutte le n sorgenti di forza contemporaneamente. Dato che l'accelerazione è un vettore, l'accelerazione risultante si ottiene eseguendo la somma vettoriale di tutte le $\boldsymbol{a}_i$. Perciò, anche la forza risultante $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$ verrà ottenuta per mezzo della somma vettoriale delle forze indipendenti $\boldsymbol{F}_i = m\boldsymbol{a}_i$. Dunque, la possibilità di applicare la regola del parallelogramma discende dall'ipotesi che le forze applicate siano indipendenti. Nel caso in cui i corpi che sono sorgenti di forza interagiscano tra loro e per questo cambino il loro stato, il metodo di calcolo della risultante $\boldsymbol{F}$ può rivelarsi non corretto. Questo averrebbe se, nel nostro secondo esempio, le cariche puntiformi q_1 e q_2 fossero sostituite con corpi estesi e carichi. Nel momento di avvicinamento di tali corpi la distribuzione superficiale delle cariche elettriche si trova modificata a causa dell'induzione e questo modifica il modulo della forza agente. Ma anche in questo caso si potrà applicare il principio di sovrapposizione se si suddividono idealmente le cariche che occupano le loro posizioni definitive in parti sufficientemente piccole. Assimilando allora queste parti a cariche puntiformi, si potranno calcolare, applicando la *legge di Coulomb,* i campi elettrici creati, per poi utilizzare il principio di sovrapposizione. Questa affermazione deve essere considerata come una generalizzazione di fatti sperimentali.

Problemi

1. Un ascensore si sposta con un'accelerazione $a = \alpha g$ con $|\alpha| < 1$. Conoscendo il peso P dell'ascensore in stato di quiete (carico compreso), determinare la tensione T del cavo dell'ascensore durante il suo moto accelerato.

Risposta. $T = P(1 - \alpha)$. Si considera che il numero frazionario α è positivo quando l'accelerazione a è diretta verso il basso, e negativo quando l'accelerazione è diretta verso l'alto.

2. Un corpo vincolato a spostarsi lungo una retta data (lungo un'asta, ad esempio, sulla quale è infilato) viene sospeso ad una molla. Un tale sistema può servire da *accelerometro* (di-

spositivo di misurazione dell'accelerzione) che viene fissato sul corpo di cui si studia il moto (automobile, aereo, treno, ecc.). Date una descrizione del funzionamento di questo accelerometro.

3. Un aereo effettua una virata spostandosi a velocità costante v lungo una circonferenza e restando sempre alla stessa altezza. Calcolare il raggio r di questa circonferenza sapendo che il piano dell'ala dell'aereo fa un angolo costante α con il piano orizzontale.

Risposta. $r = \dfrac{v^2}{g \operatorname{tg}\alpha}$.

Suggerimento. Quando l'aereo vola lungo una linea retta il piano dell'ala è orizzontale. La forza ascensionale è allora diretta lungo la verticale verso l'alto, cioè perpendicolare al piano dell'ala. Quando il corpo dell'aereo gira attorno a un asse longitudinale di un certo angolo, la forza ascensionale gira con lo stesso angolo e resta normale al piano dell'ala poiché la forza di interazione dell'aereo con il mezzo circostante dipende solo dal moto relativo dell'aereo rispetto al mezzo circostante.

§ 12. *Terza legge di Newton e legge di conservazione dell'impulso*

1. Consideriamo un sistema isolato costituito da due punti materiali che interagiscono. In questo caso è verificata la legge di conservazione dell'impulso:

$$\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2 = \text{cost.}$$

Derivando questa relazione rispetto al tempo si ottiene

$$\dot{\boldsymbol{p}}_1 + \dot{\boldsymbol{p}}_2 = 0,$$

che, in virtù della seconda legge di Newton (11.1) diventa;

$$\boldsymbol{F}_1 = -\boldsymbol{F}_2, \tag{12.1}$$

dove $\boldsymbol{F}_1$ e $\boldsymbol{F}_2$ sono le forze che esercitano l'uno sull'altro i punti materiali del sistema. Utilizziamo il fatto sperimentale secondo il quale le forze $\boldsymbol{F}_1$ e $\boldsymbol{F}_2$ agiscono *lungo la retta* che collega i punti materiali tra loro. Arriveremo alla *terza legge di Newton:*

Le forze di interazione che si esercitano tra due punti materiali hanno lo stesso modulo, sono di senso opposto e agiscono lungo la retta che congiunge questi punti.

Secondo Newton, una di queste forze ($\boldsymbol{F}_1$ o $\boldsymbol{F}_2$) può essere chiamata *azione,* e l'altra, *reazione.* La terza legge sarà allora: *Ad ogni azione corrisponde una reazione uguale e di senso opposto.* Notiamo però che per la sua natura fisica, l'azione non si distingue in nulla dalla reazione. Se la forza agente è dovuta a una deformazione, alla gravitazione universale oppure ad un campo elettrico, la forza di reazione ha la stessa origine. Un corpo pesante che si trova su una tavola, vi esercita una pressione e subisce esso stesso una pressione, diretta in senso inverso. L'azione, cioè la pressione

esercitata sulla tavola dal corpo pesante, è determinata dalla deformazione di questo corpo, così come la pressione esercitata dalla tavola sul corpo è generata dalla deformazione della tavola. La suddivisione delle forze in forze di azione e di reazione nasce dall'idea dell'esistenza di un *corpo attivo* che produce una azione e di un *corpo passivo* che oppone una reazione. Così, nel caso di un cavallo che tira una carrozza, il corpo attivo che produce l'azione sarà il cavallo e il corpo passivo, sorgente di reazione, è la carrozza. Però non è sempre possibile suddividere i corpi in corpi attivi e passivi. Per esempio, nel caso del Sole e di un pianeta, tra i quali si manifesta una forza di attrazione determinata dalla gravitazione universale, non si potrebbe dire quale di questi due corpi celesti sia attivo e quale sia passivo. Quale delle due forze $\boldsymbol{F}_1$ e $\boldsymbol{F}_2$ dovrà essere chiamata forza d'azione e quale dovrà essere chiamata forza di reazione è, essenzialmente, una questione di convenzione.

2. Abbiamo formulato la terza legge di Newton per un sistema chiuso composto da due punti materiali in interazione mutua. Postuliamo ora che questa legge si applichi ad ogni sistema costituito da un numero qualunque di punti materiali, supponendo che anche in questo caso i punti materiali *interagiscano due a due*. Siano $\boldsymbol{F}_{ik}$ la forza con la quale il punto materiale i agisce sul punto materiale k, e $\boldsymbol{F}_{ki}$ la forza che il punto k esercita sul punto i. La terza legge afferma che queste forze sono dirette lungo la retta che lega i punti i e k e che $\boldsymbol{F}_{ik} = -\boldsymbol{F}_{ki}$. In questa interpretazione la terza legge di Newton permette di passare dalla *meccanica di un punto materiale alla meccanica di un sistema di punti materiali* e di estendere la legge di conservazione dell'impulso a un sistema composto da un numero qualunque n di punti materiali che interagiscano tra loro. Esaminiamo più da vicino questo problema, assieme ad altri di uguale importanza che ne derivano.

L'insieme delle forze, che agiscono sui punti materiali di un sistema, può essere distinto in forze *interne* ed *esterne*. Le forze interne sono le forze di interazione tra i punti materiali del sistema. Queste forze le abbiamo già contraddistinte coi simboli $\boldsymbol{F}_{ik}$ con due indici i e k che denotano i punti materiali in interazione. Le forze esterne sono le forze che vengono esercitate sui punti materiali del sistema dai corpi che lo circondano. Secondo la terza legge di Newton $\boldsymbol{F}_{ik} = -\boldsymbol{F}_{ki}$, cioè $\boldsymbol{F}_{ik} + \boldsymbol{F}_{ki} = 0$. Ne deriva che la somma geometrica di tutte le forze interne che si manifestano nel sistema è nulla. Scriviamo questo risultato nella forma

$$\boldsymbol{F}_1^{(i)} + \boldsymbol{F}_2^{(i)} + \ldots + \boldsymbol{F}_n^{(i)} = 0, \tag{12.2}$$

dove l'indice superiore (i) indica che si tratta unicamente delle forze interne. L'indice inferiore è il numero d'ordine del punto materiale sottoposto all'azione di queste forze. Quindi, per esempio, $\boldsymbol{F}_1^{(i)}$ denota la forza interna totale che si esercita sul primo punto materiale. Denotiamo con i simboli $\boldsymbol{F}_1^{(e)}$, $\boldsymbol{F}_2^{(e)}$, ... le forze esterne che agiscono sui punti materiali del sistema. Conformemente alla seconda legge di Newton si può scrivere

$$\frac{d\boldsymbol{p}_1}{dt} = \boldsymbol{F}_1^{(i)} + \boldsymbol{F}_1^{(e)},$$

$$\frac{d\boldsymbol{p}_2}{dt} = \boldsymbol{F}_2^{(i)} + \boldsymbol{F}_2^{(e)},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Sommando queste equazioni membro a membro e tenendo conto di (12.2) otteniamo

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2 + \dots + \boldsymbol{p}_n) = \boldsymbol{F}_1^{(e)} + \boldsymbol{F}_2^{(e)} + \dots + \boldsymbol{F}_n^{(e)},$$

ossia

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \boldsymbol{F}^{(e)}, \tag{12.3}$$

dove $\boldsymbol{p}$ è l'impulso dell'intero sistema e $\boldsymbol{F}^{(e)}$ è la risultante di tutte le forze esterne che gli sono applicate. Dunque, *la derivata rispetto al tempo dell'impulso di un sistema di punti materiali è uguale ulla somma geometrica di tutte le forze esterne che agiscono su questo sistema.* In virtù della terza legge di Newton le forze interne si annullano vicendevolmente. L'equazione (12.3) è la generalizzazione dell'equazione concernente un solo punto materiale.

Supponiamo ora che la somma geometrica di tutte le forze esterne sia nulla (ciò che avviene in un sistema isolato, ad esempio). Si avrà allora $\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = 0$. La derivata di una costante è uguale a zero. Anche l'affermazione inversa è valida: se la derivata di una certa grandezza è nulla, questa grandezza è costante. Noi vediamo dunque che dall'ultima equazione risulta:

$$\boldsymbol{p} = \text{cost.}$$

Dunque, *ogni volta che la somma geometrica di tutte le forze esterne applicate al sistema è uguale a zero, l'impulso del sistema si conserva, cioè resta invariabile nel tempo.* Questo è quanto accade, in particolare, per tutti i sistemi isolati.

Supponiamo ora che $\boldsymbol{F}^{(e)} \neq 0$, ma che la proiezione della forza $\boldsymbol{F}^{(e)}$ su un asse qualunque, l'asse X per esempio, sia uguale a zero. Risulta allora dall'equazione (12.3) che per questa proiezione $\frac{dp_x}{dt} = 0$ e per conseguenza $p_x = \text{cost.}$ Quindi, l'impulso totale del sistema non si conserva, ma la proiezione dell'impulso del sistema sull'asse X si conserva. Per esempio, l'impulso di un corpo in caduta libera non può conservarsi poiché il corpo è sottoposto all'azione della forza di gravità diretta verso il basso. Sotto

l'azione di questa forza, la componente verticale dell'impulso costantemente varia, mentre la componente orizzontale dell'impulso resta invariabile per tutta la durata della caduta del corpo. (Noi non teniamo conto qui che della forza di gravità, ignorando la forza di resistenza dell'aria ed altre forze).

3. La dimostrazione della legge di conservazione dell'impulso suggerisce alcune osservazioni. Essa è basata sull'ipotesi che i punti materiali del sistema isolato interagiscano a due a due, verificando la terza legge di Newton. Perché il risultato finale sia corretto, è sufficiente che sia osservata la condizione (12.2) che è meno rigida. È sufficiente che sia uguale a zero la somma geometrica delle forze interne che agiscono nel sistema. Dimostreremo nel § 38 che questa condizione è determinata dalla proprietà generale dello spazio di essere *omogeneo.* Può darsi che la condizione (12.2) non sia necessaria e che la legge di conservazione dell'impulso sia ugualmente verificata anche quando la suddivisione del sistema in parti è priva di senso e non sia più possibile utilizzare la nozione di interazioni mutue tra queste parti del sistema, nonché altri concetti della meccanica classica. Non è escluso che questa situazione si verifichi all'interno dei nuclei atomici e nelle trasmutazioni delle particelle «elementari». L'esperienza dimostra che, adeguatamente generalizzata, *la legge di conservazione dell'impulso è una legge fondamentale della Natura che non ammette alcuna eccezione.* Ma presa in senso lato, questa legge non può più essere considerata come una semplice conseguenza delle leggi di Newton.

4. Nella nostra esposizione, la legge di conservazione dell'impulso di un sistema isolato costituito da due punti materiali in interazione mutua è stata semplicemente postulata. La verifica di questa legge è fornita in base all'esperienza. Abbiamo proceduto così per introdurre la nozione di massa. Si può però introdurre questa nozione in altro modo, cioè determinando il rapporto delle masse dei corpi considerati basandosi sul rapporto inverso delle accelerazioni comunicate a questi corpi da forze uguali. Questo procedimento *non implica una misurazione preliminare delle forze* poiché è sufficiente disporre di un criterio di *uguaglianza delle forze considerate.* Se, ad esempio, due corpi vengono sottoposti successivamente all'azione di una medesima molla in stato di tensione e l'allungamento della molla è lo stesso, si può concludere mediante induzione che le forze applicate ai due corpi sono uguali. Insomma, il procedimento di determinazione della massa di un corpo, che noi abbiamo utilizzato nel § 10, è un caso particolare di questo secondo procedimento, di portata generale. Quest'ultimo procedimento è basato sul fatto che due corpi messi in interazione mutua sono sottoposti, in virtù della terza legge di Newton, a forze del medesimo modulo. È evidente che se, nel definire la nozione di massa, non si parte dalla terza legge di Newton, ma si usa *un procedimento indipendente,* non si richiede per dimostrare la legge di conservazione dell'impulso un'esame particolare dell'interazione tra due punti materiali. Questa legge sarà in questo caso

anche un teorema della meccanica. Notiamo però, che la definizione di massa data nel § 10 presenta il vantaggio di non ricorrere ad alcun criterio di uguaglianza delle forze che agiscono. In generale, non è facile definire un tal criterio senza basarsi sulla terza legge di Newton.

5. Succede tavolta che l'interazione di due corpi A e B si effettua mediante un terzo corpo C. Noi abbiamo allora a che fare con un sistema di tre corpi e si deve fare intervenire l'equazione del moto del terzo corpo. Nonostante questo in molti casi, si ragiona come se il terzo corpo non esistesse. Vediamo in quali casi tale ragionamento è possibile senza che faccia nascere errori. A questo scopo consideriamo l'esempio che segue.

I corpi A e B sono attaccati l'uno all'altro da un filo inestensibile (fig. 23). Il corpo A è sottoposto all'azione di una forza F che fa nascere una tensione nel filo, in modo tale che i corpi A e B si muovono con la medesi-

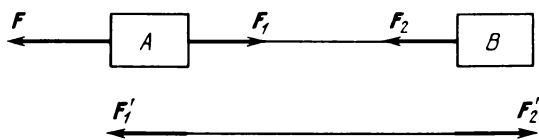



Fig. 23.

ma accelerazione a. Di solito si ragiona nel modo seguente. Denotiamo con F_1 il modulo della forza che esercita il corpo B, mediante il filo sul corpo A, e con F_2 il modulo della forza opposta esercitata dal corpo A sul corpo B. Si ha allora

$$m_A a = F - F_1, \quad m_B a = F_2, \tag{12.4}$$

dove m_A e m_B sono le masse dei corpi A e B. Secondo la terza legge di Newton $F_1 = F_2$. Eliminando F_1 e F_2, noi troviamo dapprima l'accelerazione

$$a = \frac{F}{m_A + m_B},$$

poi le forze F_1 e F_2:

$$F_2 = F_1 = \frac{m_B}{m_A + m_B} F.$$

Questo ragionamento non è completo e può condurre a conclusioni errate. In effetti, in questo ragionamento non figura il terzo corpo, cioè il filo, pure soggetto ad accelerazione. I corpi A e B non interagiscono direttamente tra loro, ma ciascuno di loro interagisce con il *filo;* queste interazioni devono appunto essere regolate dalla terza legge di Newton. Un ragionamento corretto deve tener conto dell'accelerazione comunicata al filo. Si intenderanno dunque con F_1 e F_2 le forze che il *filo teso* esercita sui corpi A e B. Si deve aggiungere alle equazioni (12.4) l'equazione del moto del filo:

$ma = F_1' - F_2'$, dove m è la massa del filo. In virtù dell'uguaglianza dell'azione e della reazione $F_1' = F_1$ e $F_2' = F_2$, indi

$$ma = F_1 - F_2.$$

Risolvendo insieme quest'ultima equazione e le equazioni (12.4), si ottiene

$$a = \frac{F}{m_A + m_B + m},$$

$$F_2 = m_B a, \quad F_1 = (m_B + m)a.$$

Ora $F_1 \neq F_2$, poiché $m \neq 0$. Se si suppone che la massa del filo sia trascurabile rispetto a quella dei corpi A e B, si può eliminare il termine ma, arrivando all'uguaglianza approssimata $F_1 = F_2$. Con questa approssimazione si ottiene il medesimo risultato, come se i corpi A e B interagissero *direttamente* tra loro. Idealizzando il problema si dice che l'interazione dei corpi A e B si effettua attraverso un corpo (il filo) *privo di massa.* Questa situazione si verifica frequentemente e non si tiene alcun conto dei corpi privi di massa. Dato che ogni corpo possiede una massa, è evidente allora che si tratta di una astrazione ideale. Bisogna renderci conto in quali casi è possibile una tale astrazione e in quali non è possibile. Nell'esempio sopraindicato sarebbe un grave errore utilizzare l'uguaglianza $F_1 = F_2$ quando la massa del filo è comparabile alle masse dei corpi A e B.

§ 13. *Interazioni a distanza e interazioni di campi*

1. L'interazione dei corpi può nascere sia da un contatto *diretto* che da forze «a distanza». Nel primo caso i corpi esercitano, l'uno sull'altro, una trazione o una pressione. Le forze che appaiono quando i corpi vengono in contatto sono dovute a *deformazioni dei corpi.* Se le deformazioni sono piccole, il loro ruolo nel fenomeno in esame può essere poco importante; si può allora ignorarle e tener conto della loro influenza eventuale con l'introduzione di forze di *tensione* e di *pressione.* Ma se ci interessa l'origine ed il modo di azione delle forze, dobbiamo esaminare attentamente il quadro delle deformazioni che insorgono nei corpi. Così, nell'esempio dato alla fine del paragrafo precedente, il filo agisce sui corpi A e B (v. fig. 23) perché si trova in stato di tensione. Nel nostro calcolo abbiamo potuto ignorare questa circostanza perché abbiamo supposto che l'allungamento del filo fosse sufficientemente piccolo da poter affermare che le velocità dei corpi legati A e B fossero uguali. In questo caso i risultati del calcolo non dipendono dal grado di estensione del filo. Non sarebbe stato così se noi avessimo sostituito il filo con una molla dolce. D'altra parte, se noi vogliamo conoscere l'origine delle forze F_1 ed F_2 esercitate dal filo sui corpi A e B, non possiamo ignorare le defomazioni del filo che li unisce. Per sapere perché i

corpi A e B tendono il filo, è importante studiare le loro proprie deformazioni, perché sono queste deformazioni che determinano l'estensione del filo. Facciamo girare una pietra attacata a una corda. La pietra subirà inevitabilmente delle deformazioni, poiché, se non ci fossero, la pietra non potrebbe essere soggetta ad una accelerazione. Se noi immaginiamo una piccola parte di questa pietra, questa parte è in moto accelerato perché è sottoposta all'azione delle parti della pietra che la circondano; questo è possibile solo se la pietra è sottoposta a deformazioni.

Oltre alle forze che traggono la loro origine dalla deformazione dei corpi, ci sono dei casi più complessi. Le forze di interazione, ad esempio, possono dipendere non soltanto dal *grado di deformazione,* ma anche dalla velocità di deformazione. Questo è il caso delle forze di attrito. Ma queste forze appaiono anch'esse solo mediante un contatto diretto dei corpi che interagiscono. In tutti questi casi si dice che le forze di interazione sono delle *forze di contatto.*

2. Oltre alle forze di contatto esistono delle forze che, all'osservazione diretta, sembrano *agire a distanza,* senza intervento di un mezzo intermediario. Queste forze sussistono anche quando i corpi in interazione sono separati da uno spazio «vuoto». Le forze gravitazionali e le forze di interazione dei corpi elettrizzati o magnetizzati sono di questo tipo.

Conformemente ai concetti fondamentali della meccanica di Newton, le forze applicate ad un corpo in un istante dato dipendono dalle posizioni e dalle velocità di tutti gli altri corpi nel medesimo istante. Se i corpi in interazione mutua non sono in contatto, questa affermazione presuppone sia un'azione diretta a distanza, che una trasmissione delle interazioni *ad una velocità infinitamente grande.* La meccanica di Newton ammette, in linea di principio, l'esistenza di interazioni trasmesse con una velocità infinitamente grande. Dato che questa ipotesi non può essere confutata dalla logica, la questione deve essere risolta per via sperimentale. I risultati sperimentali hanno condotto a concludere che non esistono interazioni istantanee e che le loro velocità di trasmissione sono limitate (inferiori alla velocità della luce nel vuoto). Ne deriva che la meccanica classica descrive correttamente le interazioni solamente quando le velocità di tutti i corpi del sistema considerato sono trascurabili se paragonate alla *velocità di propagazione delle interazioni* (la velocità della luce). Ma per prinicipio una tale descrizione è scorretta. Per illustrare questa affermazione, consideriamo l'applicazione della terza legge di Newton. Dato che esiste la velocità finita di propagazione delle interazioni, questa legge non può essere sempre verificata attraverso interazioni a distanza. Consideriamo due punti materiali che si siano trovati a lungo in stato di quiete nelle posizione A e B (fig. 24). Supponiamo che le forze di interazione che questi punti si scambiano verifichino la terza legge di Newton. Se allora il primo punto si sposta dalla sua posizione A verso una nuova posizione A' a una velocità sufficientemente grande in modo che, durante questo spostamento, l'interazione non abbia

il tempo di arrivare fino al punto *B*, la forza *F* resta immutata. Questa forza sarà determinata non dalla disposizione attuale dei punti materiali, ma da quella precedente e sarà indi diretta lungo la retta *BA* e non lungo la retta *BA*´, come implica la terza legge di Newton. Si è verificata così una trasgressione alla legge di Newton, e questo implica quindi la non validità della legge meccanica di conservazione dell'impulso. L'*impulso totale dei corpi A e B non può, in generale, conservarsi a causa della finitezza della velocità di propagazione delle interazioni.*

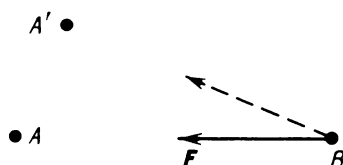



Fig. 24.

3. Un fisico del XIX° secolo avrebbe detto che la trasgressione alla terza legge di Newton e alla legge di conservazione dell'impulso non è che apparente, poiché le interazioni a distanza tra i corpi non possono essere dirette. Una interazione diretta a distanza implicherebbe che il corpo possa esercitare un' azione in un punto in cui non si trova e da cui è separato da uno spazio vuoto. Ne consegue che una tale azione sarebbe impossibile poiché ogni interazione avviene attraverso un mezzo intermedio. Il corpo *A* agendo sul mezzo intermedio ne modificherebbe le proprietà, facendo apparire, ad esempio, delle variazioni delle tensioni e delle pressioni che si propagano a velocità finita. Quando queste variazioni arrivano fino al corpo *B*, si manifestano sotto forma di forze applicate al corpo. E che cosa succederebbe se i corpi che interagiscono si trovassero separati in uno spazio assolutamente vuoto? Un fisico del XIX° secolo avrebbe risposto che non esiste uno spazio assolutamente vuoto perché ogni spazio è occupato da un certo mezzo, l'*etere* ad esempio, attraverso il quale si trasmetterebbero le interazioni. Questi fisici del XIX° secolo attribuivano a questo mezzo ipotetico delle proprietà analoghe a quella dei corpi solidi, liquidi e gassosi ordinari. Avrebbero quindi concluso che la terza legge di Newton è sempre valida, a condizione che sia applicata non alle forze di interazione scambiate tra i corpi *A* e *B* separati (queste forze non sono che apparenti) ma alle forze d'interazione di questi corpi con il mezzo intermedio. In questo caso la legge di conservazione dell'impulso sarebbe sempre valida. Si noti però che l'impulso totale dovrebbe comprendere non soltanto gli impulsi dei corpi appartenenti al sistema, ma anche l'impulso del mezzo intermedio che trasmette le interazioni.

I fisici contemporanei ragionano in modo analogo, ma con maggiore astrazione e maggior circospezione. Neanche loro riconoscono l'azione di-

retta a distanza, e negano l'esistenza di un mezzo intermedio che trasmetta le interazioni, ma pensano che tutte le interazioni siano assicurate da *campi:* gravitazionali, elettromagnetici, ecc. Il corpo A provoca, nello spazio circostante, *un campo di forze* che si manifesta attraverso le forze applicate al corpo B. Anche il corpo B è causa di un campo analogo che agisce sul corpo A. La fisica moderna ammette l'esistenza di interazioni dovute unicamente ai campi di forze. Le interazioni per contatto sono dei casi particolari di interazioni dovute ai campi; si tratta in questo caso di *campi molecolari.* I campi molecolari decrescono rapidamente con la distanza e si manifestano solo quando la distanza tra i corpi in interazione è inferiore a 10^{-7} cm. circa. E per questo che le *interazioni dei campi* appaiono su scala macroscopica come delle «*interazioni a contatto*».

4. Ci si può chiedere se la differenza tra le concezioni dei fisici del XIX° e XX° secoli non si riduca a una questione di terminologia: prima si parlava di mezzo intermedio, ora si parla di campo. Non si tratta di terminologia, ma delle proprietà fisiche reali del campo e del mezzo ipotetico (l'etere) attraverso il quale, secondo la fisica del XIX° secolo, si effettuerebbero le interazioni dei corpi. Si attribuivano all'etere delle proprietà analoghe a quelle dei corpi ordinari. Così, si poteva parlare dello stato di quiete o di moto dell'etere, della sua elasticità, della sua densità, delle forze agenti sull'etere, del moto dei corpi rispetto all'etere; si poteva persino usare l'etere come un sistema di riferimento, ecc.; non ha invece senso parlarne quando si tratta di campi. La fisica moderna considera ogni campo come una realtà oggettiva attraverso la quale vengono trasmesse le interazioni. Un campo può esistere indipendentemente dai corpi che l'hanno generato, per esempio le onde elettromagnetiche generate da opportuni emettitori. Una stazione radio può cessare di trasmettere, ma il campo elettromagnetico da essa creato continua ad esistere e a propagarsi nello spazio. Giunto ad un ricevitore molto lontano esso trasmette qui le informazioni che erano state emesse qualche istante prima dalla stazione radio. Non esiste lo spazio assolutamente vuoto, perché in ogni spazio ci sono dei campi. Il campo è una delle *forme di esistenza della materia.* I fisici del XIX° secolo pensavano che per comprendere la natura delle forze di interazione bisognasse ricondurle a forze meccaniche, per esempio alle forze elastiche, che appaiono nel momento in cui si stabilisce un contatto tra corpi. La fisica moderna respinge tale approccio.

Le forze elastiche, le forze di pressione e di tensione, la forza muscolare ed altre forze erano conosciute dagli uomini fin dai tempi antichi e sembravano loro semplici e comprensibili. Più tardi, quando l'uomo si trovò in presenza di forze elettriche e magnetiche, esse gli sembrarono misteriose ed egli cercò naturalmente di ridurre queste forze a quelle conosciute di tensione,di pressione ed elastiche. In realtà, oggi si pensa esattamente al contrario, e sono le forze di interazioni elettromagnetiche che sono più facili da interpretare di quelle elastiche, ad esempio, che sono più complesse. Oggi si

ritiene che le forze elastiche, le forze di attrito, le forze di affinità chimica, le forze molecolari, le forze muscolari e altre forze usuali con cui l'uomo si misura, escluse le forze di gravità, siano delle manifestazioni diverse di forze elettromagnetiche. È privo di senso dunque il tentativo di ridurre le forze elettromagnetiche a quelle elastiche.

Ogni campo agisce sui corpi con forze ben determinate, ma non si può parlare di forze meccaniche applicate a un campo. Quindi, quando si tratta di interazioni di campo, la terza legge di Newton può non risultare valida: il corpo subisce l'azione di una forza, ma non c'è una forza di reazione che viene applicata a un altro corpo. Però la legge di conservazione dell'impulso resta valida perché i campi, come i corpi, possono possedere un impulso. L'impulso del campo si manifesta con una variazione dell'impulso del corpo che ha assorbito o emesso l'energia del campo. Per emissione il corpo cede impulso che viene assunto dal campo e per assorbimento esso acquista un impulso dovuto all'assorbimento di energia dal campo.

5. L'esistenza di un impulso del campo elettromagnetico si manifesta, ad esempio, nell'effetto di «pressione di radiazione». Le esperienze di P. N. Lebedev (1866-1912) hanno dimostrato che la luce incidente esercita sui corpi irradiati una certa pressione. Consideriamo un sistema isolato di due corpi A e B (fig. 25). Supponiamo che il corpo A abbia emesso in dire-

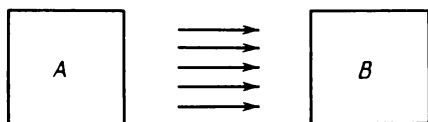



Fig. 25.

zione di B un breve segnale luminoso. Quando la luce emessa giunge fino a B, viene assorbita ed esercita una pressione su questo corpo. Il corpo B viene messo in moto e il suo impulso varia. La legge di conservazione dell'impulso sarebbe stata violata se la luce che si propagava verso B non avesse posseduto un'impulso. Dobbiamo dunque attribuire alla luce un impulso uguale all'impulso acquisito da B dopo l'assorbimento della luce. Ma se la luce possiede un impulso, nell'istante della sua emissione il corpo A deve subire *una spinta all'indietro.* Se non fosse così, la legge di conservazione dell'impulso non verrebbe rispettata.

Queste considerazioni possono essere espresse sotto forma matematica, il che permette di dedurne importanti corollari. Sia B un corpo perfettamente assorbente; facciamo cadere normalmente sulla sua superficie un fascio di raggi luminosi paralleli. Le esperienze di Lèbedev hanno dimostrato che la pressione π esercitata dalla luce sull'unità di superficie del corpo B è uguale alla densità spaziale di energia del fascio incidente. Siano l la lunghezza ed S l'area della sezione retta del fascio luminoso; si ha allora

$\pi = \frac{\varepsilon}{Sl}$; dove ε è l'energia del fascio. La forza applicata al corpo B è $F = \pi S = \varepsilon / l$. Questa forza agisce durante l'intervallo di tempo $\tau = l/c$ (c è la velocità della luce nel vuoto) e comunica al corpo l'impulso $p = F\tau = \varepsilon / c$ (v. § 18). Questo è l'impulso della luce assorbita dal corpo B. Dunque, una luce che si propaghi in una certa direzione possiede un impulso uguale a

$$p = \frac{\varepsilon}{c}. \tag{13.1}$$

Dato che la luce si propaga alla velocità c, conviene presentare l'impulso nella forma $p = mc$, considerando la grandezza m assimilata alla *massa della luce*. Sarà quindi uguale a

$$m = \frac{\varepsilon}{c^2}. \tag{13.2}$$

La relazione (13.2) è stabilita per l'energia della luce. La teoria della relatività dimostra che questa relazione è valida per tutte le forme d'energia. Così generalizzata, la relazione (13.2) esprime la legge fondamentale di Einstein sull'*uguaglianza della massa e dell'energia*.

6. In meccanica non avremo a che fare con fenomeni in cui si manifestano gli impulsi dei campi. Ci limitiamo a considerare fenomeni per i quali la terza legge di Newton e la legge di conservazione dell'impulso, nel loro senso newtoniano, siano valide.

§ 14. *Importanza delle condizioni iniziali*

1. L'equazione vettoriale (11.3) che esprime il moto di un punto materiale può essere scritta in *forma analitica*

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F_x, \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = F_y, \quad m\frac{d^2z}{dt^2} = F_z. \tag{14.1}$$

Una sola equazione vettoriale (11.3) è equivalente a tre equazioni analitiche (14.1). Queste ultime sono delle equazioni *differenziali* e non sufficienti quindi a determinare univocamente il moto di un punto materiale. Ciascuna di queste equazioni è un'equazione *di secondo ordine*. (L'ordine di un'equazione differenziale viene dato dal grado della derivata più elevata che figura nell'equazione). Per descrivere univocamente il moto del punto materiale, bisogna aggiungere alle equazioni del moto dei dati supplementari concernenti due costanti vettoriali o sei costanti numeriche. Di solito questi dati supplementari sono i moduli del raggio vettore $\boldsymbol{r}$ e della velocità

v; si può anche scegliere i valori che sue funzioni prendono all'istante $t = 0$. Questi valori prendono il nome di *condizioni iniziali.* Illustriamo queste considerazioni studiando il moto libero di un punto materiale nel campo della gravità terrestre.

2. Galilei aveva stabilito che *nel vuoto tutti i corpi cadono con la medesima accelerazione.* Per confermare qualitativamente questa affermazione si può utilizzare un tubo di vetro di 1 m. di lunghezza nel quale si può creare il vuoto. Introduciamo in questo tubo differenti oggetti: un pallino da caccia, un pezzo di sughero, una piuma, un pezzettino di carta. Se nel tubo viene immessa aria, la piuma e il pezzettino di carta cadono più lentamente degli altri corpi, a causa della resistenza dell'aria. Se nel tubo viene creato il vuoto, tutti i corpi cadono con la medesima velocità. Una prova più precisa può essere ottenuta osservando le oscillazioni del pendolo; l'esperienza dimostra che il periodo di oscillazione del pendolo non dipende dal materiale di cui è fatto. L'accelerazione di gravità g varia con la latitudine geografica; raggiunge il suo valore massimo (9,83 m/s^2) al polo ed il suo valore minimo all'equatore (9,78 m/s^2). Il valore di g diminuisce all'aumentare dell'altezza sopra la superficie terrestre di $3 \cdot 10^{-6}$ m/s^2. A latitudini medie si può porre che sia, al suolo, $g = 9{,}80$ m/s^2. In calcoli che non esigano grande precisione si può stabilire che l'accelerazione in caduta libera g sia costante in tutti i punti del globo terrestre.

Nel campo della gravità terrestre ogni corpo è sottoposto ad una forza $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{g}$, quindi l'equazione del moto (11.8) sarà

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = \boldsymbol{g}. \tag{14.2}$$

Abbiamo ignorato tutte le altre forze e abbiamo tenuto conto solo della forza di gravità . Ignoriamo anche le variazioni di g secondo la latitudine e l'altitudine, di modo che l'accelerazioni g viene rappresentata come costante ovunque. L'equazione (14.2) è equivalente a due equazioni:

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \boldsymbol{g}, \quad \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \boldsymbol{v}. \tag{14.3}$$

È facile provare attraverso una semplice derivazione che queste equazioni sono verificate dalle soluzioni seguenti:

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{g}t + \boldsymbol{v}_0, \quad \boldsymbol{r} = \frac{1}{2}\boldsymbol{g}t^2 + \boldsymbol{v}_0 t + \boldsymbol{r}_0 \tag{14.4}$$

quali che siano le costanti vettoriali $\boldsymbol{v}_0$ e $\boldsymbol{r}_0$. La soluzione (14.4) è *generale,* il che significa che ogni soluzione dell'equazione (14.2) può essere presentata nella forma (14.4). Infatti, una soluzione generale non è una sola soluzione, ma tutta una *famiglia di soluzioni* che dipendono da due costanti vettoriali arbitrarie $\boldsymbol{r}_0$ e $\boldsymbol{v}_0$. Attribuendo a queste costanti dei valori concreti, prendiamo da questa famiglia *una soluzione particolare* ben determinata.

La costante v_0 è la velocità iniziale del punto mobile ed r_0 è il raggio vettore che caratterizza la posizione nell'istante iniziale. È facile provarlo se per mezzo delle formule (14.4) si cerca di stabilire i valori v e r al tempo $t = 0$. Non si possono determinare le costanti r_0 e v_0 per mezzo dell'equazione differenziale del moto (14.2) poiché per tutti i valori di queste costanti, le espressioni (14.4) sono soluzioni di (14.2). I valori r_0 e v_0 vengono definiti dalle *condizioni iniziali* ed i moti del punto materiale possono essere molto differenti a seconda dei valori di queste costanti. Il corpo può salire o discendere lungo una retta, può descrivere una parabola passando o no per il vertice; la curvatura della parabola può essere piccola o grande, ecc. Il grande merito di Newton è di avere scoperto che queste complessità non erano che apparenti e che tutti i moti possano essere descritti attraverso una medesima formula; se si sostituiscono in questa formula le posizioni e le velocità del mobile con sua accelerazione, la formula non avrà più alcuna costante arbitraria.

3. Questi risultati possono essere generalizzati. Supponiamo di dover studiare un sistema di N punti materiali i quali interagiscono tra di loro e con i corpi esterni, le cui posizioni si suppongono conosciute ad ogni istante. Applicando la seconda legge di Newton per ciascun punto materiale si ottiene un sistema di N equazioni vettoriali o di $3N$ equazioni differenziali analitiche equivalenti, di ordine 2. Si può dimostrare che per risolvere queste equazioni in modo univoco bisogna conoscere $2N$ grandezze vettoriali o $6N$ valori numerici che caratterizzano i valori iniziali delle coordinate e delle velocità degli N punti materiali del sistema.

Problema

Un corpo è proiettato verso l'alto con un angolo α rispetto all'orizzontale; ad una velocità iniziale v_0. Esaminare il suo moto trascurando la resistenza dell'aria. Determinare l'equazione della traiettoria del mobile, la sua gittata e l'altezza massima rispetto alla superficie terrestre, che si suppone orizzontale. A qual angolo di tiro α la gittata sarà massima?

Soluzione. Prendiamo come origine delle coordinate il punto della superficie terrestre da dove è lanciato il corpo ($r_0 = 0$). La formula (14.4) dimostra che il moto deve effettuarsi nel piano verticale contenente i vettori $\boldsymbol{g}$ e v_0. Prendiamolo come piano delle coordinate XY, orientando l'asse X lungo l'orizzontale in direzione del moto, l'asse Y lungo la verticale ascendente. Esprimiamo l'equazione (14.4) in termini di proiezioni sugli assi delle coordinate osservando che $v_{0x} = v_0 \cos\alpha$, $v_{0y} = v_0 \sin\alpha$:

$$v_x = v_0 \cos\alpha, \quad v_y = v_0 \sin\alpha - gt,$$

$$x = v_0 t \cos\alpha, \quad y = v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2} g t^2.$$

Eliminando t tra le due ultime equazioni, troveremo l'equazione della traiettoria

$$y = x \operatorname{tg}\alpha - \frac{g x^2}{2 v_0^2 \cos^2\alpha}.$$

È questa l'equazione della parabola. La gittata del mobile è

$$x = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha$$

e l'altezza massima raggiunta dal mobile è

$$y_{max} = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}.$$

La gittata massima si ottiene per $\alpha = 45°$:

$$x_{max} = \frac{v_0^2}{g}.$$

§ 15. *Principio di relatività di Galilei*

1. L'equazione che esprime la seconda legge di Newton

$$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F} \tag{15.1}$$

mostra chiaramente che questa legge non può essere valida in qualsiasi sistema di riferimento. Infatti, l'accelerazione $\boldsymbol{a}$, in generale assume valori differenti in sistemi di riferimento in movimento accelerato gli uni rispetto agli altri. Ma la forza $\boldsymbol{F}$ non può dipendere dal sistema di riferimento scelto poiché essa dipende solo dagli stati e dalle velocità relative dei punti materiali e queste grandezze, secondo la cinematica non relativistica, sono indipendenti dal sistema di riferimento scelto. Ne deriva che la seconda legge di Newton, essendo valida in un certo sistema di riferimento, non lo sarà in un altro sistema di riferimento, in moto accelerato accelerato rispetto al primo.

2. Supponiamo che il sistema di riferimento S sia inerziale. Prendiamo un secondo sistema di riferimento S' in movimento di traslazione rispetto al primo con una velocità costante $\boldsymbol{V}$. Supponiamo di conoscere il moto di un punto materiale in uno di questi sistemi di riferimento, nel sistema S, ad esempio. Come fare per calcolare il moto dello stesso punto nel sistema S'? Posto in termini prerelativistici, il problema consiste nello stabilire le formule che esprimono in un dato istante le coordinate x', y', z' del mobile nel sistema S' per mezzo delle sue coordinate x, y, z nel sistema S. Si possono fissare arbitrariamente le origini e le direzioni degli assi delle coordinate nei due sistemi S e S'. Se i sistemi di coordinate sono immobili l'uno rispetto all'altro e se essi si distinguono solo per la posizione delle loro origini e per le direzioni dei loro assi di coordinate, la trasformazione delle coordinate è un problema puramente geometrico la cui soluzione è nota. Resta da chiarire che cosa avviene nelle trasformazioni di coordinate quando un sistema di riferimento è in movimento rispetto all'altro sistema. Supponiamo per semplificare che gli assi X', Y', Z' siano rispettivamente paralleli agli assi X, Y, Z e che all'istante $t = 0$ l'origine O' coincida con l'origine

O. Poniamo anche che la velocità V sia parallela all'asse X. In queste condizioni l'asse X' coinciderà sempre con l'asse X. Queste semplificazioni non cambiano il carattere generale dei problemi posti poiché si potrà sempre passare alle formule generali attraverso uno spostamento dell'origine delle coordinate ed una rotazione degli assi.

Sia M la posizione del punto mobile all'istante t (fig. 26). Si ha $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$. Dopo un intervallo di tempo t, l'origine del sistema

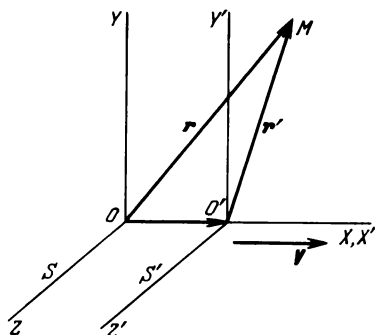



Fig. 26.

S' passerà dalla posizione O alla posizione O' avendo percorso il tratto $\overrightarrow{OO'} = Vt$. Quindi la relazione precedente verrà scritta

$$r = r' + Vt', \quad t = t' \tag{15.2}$$

dove $r = \overrightarrow{OM}$, $r' = \overrightarrow{O'M}$ sono i raggi vettori del punto mobile rispettivamente nei sistemi S e S'. Riscriviamo la (15.2) in termini di proiezioni sugli assi delle coordinate:

$$x = x' + Vt', \quad y = y', \quad z = z', \quad t = t'. \tag{15.3}$$

Le formule della trasformazione inversa sono

$$r' = r - Vt, \quad t' = t, \tag{15.4}$$

e in termini di coordinate

$$x' = x - Vt, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t. \tag{15.5}$$

Queste formule danno la soluzione cercata e portano il nome di *trasformazioni di Galilei.* Abbiamo aggiunto alle formule di trasfomazioni delle coordinate la formula $t' = t$ per sottolineare che in cinematica non relativistica il tempo è considerato come una grandezza assoluta che non si trasforma.

Dal punto di vista del «buon senso» la trasformazione di Galilei è perfettamente ovvia. La sua derivazione si basa sull'ipotesi del carattere assoluto delle lunghezze e del tempo, che è propria della cinematica non relativistica. L'equazione $t = t'$ riflette perfettamente il carattere assoluto del tempo. Le altre formule sono state stabilite postulando il carattere assoluto

delle lunghezze. Infatti, le formule (15.2), (15.3) e (15.4) sarebbero state evidenti di per se stesse se i raggi vettori $\boldsymbol{r}$ e $\boldsymbol{r}'$ e quindi tutte le coordinate x, y, z, x', y', z' fossero state misurate in un solo e medesimo sistema di riferimento, S ad esempio. Ma, in effetti, le formule implicano che le grandezze «senza apice» $\boldsymbol{r}, x, y, z$ siano misurate nel sistema S e le grandezze «con apice» $\boldsymbol{r}', x', y', z'$ lo siano nel sistema S'. Per questa ragione stabilire le formule di trasformazione di Galilei non è possibile senza postulare il carattere assoluto delle lunghezze e del tempo. La fisica relativistica rifiutò il carattere assoluto delle lunghezze e del tempo e sostituì la trasformazione di Galilei con la *trasformazione di Lorentz.* Esamineremo questa questione nella nostra esposizione della teoria della relatività; per ora è sufficiente notare che la trasformazione di Galilei è un caso limite della trasformazione di Lorentz, da cui si deduce imponendo che la velocità V sia molto piccola rispetto alla velocità della luce nel vuoto. Nello studio dei «moti lenti» ($V^2/c^2 \ll 1$) si può utilizzare la trasformazione di Galilei, ma se il moto è «rapido», questo non è possibile.

3. Derivando (15.2) rispetto a t, si ha

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{r}'}{dt} + \boldsymbol{V} = \frac{d\boldsymbol{r}'}{dt'} + \boldsymbol{V}',$$

ossia

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{V}, \tag{15.6}$$

dove $\boldsymbol{v}$ è la velocità del mobile nel sistema di riferimento S e $\boldsymbol{v}'$ la sua velocità nel sistema di riferimento S'. Questa formula esprime la *legge non relativistica dell'addizione delle velocità* (nel senso fisico di questo termine). Questa formula è stata stabilita supponendo che la velocità $\boldsymbol{V}$ sia costante, ma essa è valida anche se la velocità $\boldsymbol{V}$ non è costante; per il nostro scopo però è sufficiente considerare la velocità $\boldsymbol{V}$ = cost.

Supponendo $\boldsymbol{V}$ = cost, una seconda derivazione conduce ai risultati seguenti:

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{v}'}{dt} = \frac{d\boldsymbol{v}'}{dt'},$$

ossia

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}', \tag{15.7}$$

dove $\boldsymbol{a}$ è l'accelerazione del mobile nel sistema di riferimento S e $\boldsymbol{a}'$ è l'accelerazione di questo medesimo mobile nel sistema S'. Anche l'accelerazione del mobile è la stessa nei due sistemi di riferimento. Si dice che l'*accelerazione è invariante rispetto alla trasformazione di Galilei.*

Un punto materiale libero si muove nel sistema S senza accelerazione poiché, per ipotesi, S è un sistema inerziale. La formula (15.7) dimostra che il moto del punto nel sistema S' è ugualmente non accelerato: ne segue che anche il sistema S' è un sistema di riferimento inerziale. Ne deriva che *ogni sistema di riferimento, che si sposta con moto rettilineo e uniforme rispetto a un sistema inerziale, è esso stesso un sistema di riferimento inerziale.* Se esiste un solo sistema di riferimento inerziale, deve esistere una classe di si-

stemi di riferimento inerziali i cui moti relativi sono rettilinei e uniformi. La forza è funzione solo di grandezze invariabili: la differenza delle coordinate di posizione e la differenza delle velocità dei punti materiali in interazione. Quindi la forza non cambia quando si passa da un sistema di riferimento ad un altro: $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}'$. Ciò significa che la *forza è invariante rispetto alla trasformazione di Galilei.* Dato che anche l'accelerazione è invariante: $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}'$, dall'equazione (15.1) deriva

$$m\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{F}'.$$

Questa equazione esprime la seconda legge di Newton nel sistema di riferimento «con l'apice» S': la sua forma è la medesima di quella scritta nel sistema S. Le equazioni che restano uguali nella forma quando si passa da un sistema di riferimento ad un altro sono dette *equazioni invarianti.* Si può dunque dire che le *equazioni della meccanica di Newton sono invarianti rispetto alle trasformazioni di Galilei.* Questa affermazione esprime il *principio di relatività di Galilei.*

4. Il principio di relatività di Galilei stabilisce l'equivalenza assoluta di tutti i sistemi di riferimento inerziali. Si deve quindi trarre la conclusione che un solo e medesimo moto appaia sempre identico in tutti i sistemi di riferimento? Sicuramente no. Il moto di un corpo caduto dalla rete per i bagagli in una vettura ferroviaria in movimento uniforme è rettilineo rispetto alla vettura. Ma in un sistema di riferimento legato alle rotaie esso descrive una parabola, sebbene le leggi della meccanica di Newton siano le stesse nei due sistemi di riferimento. *Il moto appare differente perché le leggi di Newton si esprimono attraverso equazioni differenziali la cui conoscenza non basta a una completa determinazione del moto.* Per ottenere questo bisogna conoscere ancora le condizioni iniziali, cioè ricostruire lo stato e la velocità iniziali del corpo. Nell'esempio sopra citato le equazioni differenziali del moto del corpo sono le medesime nei due sistemi di riferimento, ma le condizioni iniziali sono differenti. All'interno della vettura, il corpo cade con una velocità iniziale nulla, mentre nel sistema di riferimento solidale con le rotaie questo medesimo corpo possiede una velocità iniziale non nulla diretta secondo l'orizzontale. E per questo che il moto è differente nei due sistemi di riferimento adottati. Perché il moto sia il medesimo, bisogna creare nei due sistemi di riferimento delle condizioni identiche. È ciò che vogliamo ora dimostrare.

Supponiamo che ci siano due sistemi isolati di corpi, più precisamente due grandi laboratori che si spostano l'uno rispetto all'altro di moto rettilineo e uniforme. Ciascuno di questi laboratori può servire da sistema di riferimento. Ammettiamo che questi sistemi siano inerziali. Supponiamo ancora che i due laboratori siano perfettamente identici, cioè contengano gli stessi insiemi di oggetti e siano costruiti in modo identico. I fenomeni che si manifestano in questi laboratori sono perfettamente indipendenti da ciò che avviene nel mondo circostante, poiché abbiamo postulato che i sistemi

in esame siano isolati. Il principio di relatività di Galilei afferma che le *leggi fondamentali della meccanica che descrivono i cambiamenti dello stato di moto dei corpi sono le stesse nei due laboratori.* Per leggi fondamentali della meccanica si intendono le leggi che descrivono univocamente il moto del sistema a partire dalle condizioni iniziali nelle quali si trovava questo sistema, cioè, secondo i valori delle coordinate e delle velocità di tutti i suoi punti materiali in un istante qualunque che viene assunto come tempo zero. Se sono state create nei due laboratori esattamente le medesime condizioni iniziali per tutti i corpi, senza eccezione alcuna, tutti i moti ulteriori evolveranno esattamente nello stesso modo in ambedue i sistemi. Proprio in questo senso concepiva il principio di relatività Galilei stesso, che scriveva:

Nella maggiore stanza che sia sotto coverta di alcun gran navilio riserratevi con qualche amico, e quivi fate di aver mosche, farfalle e simili animaletti volanti; pigliantevi anci un gran vaso con acqua, e dentrovi de'pescetti; accomodate ancora qualche vaso alto che vada gocciolando in un altro basso e di angusta gola: e stando ferma la nave, osservate diligentemente come quelli animaletti volanti con pari velocità vanno verso tutte le parti della stanza; i pesci, gli vedrete andar vagando indifferentemente verso qual si voglia parte delle sponde del vaso; le stille cadenti entreranno tutte nel vaso sottoposto; e voi, gettando all'amico vostro alcuna cosa, non più gagliardamente la dovrete gettar verso quella parte che verso questa, quando le lontananze siano eguali; e saltando, come si dice, a piè qiunti, eguali spazii passerete verso tutte le parti. Osservate che averete bene tutte queste cose, fate muover la nave con quanta si voglia velocità; ché (pur che il moto sia uniforme e non fluttuante in qua e in là) voi non riconoscerete una minima mutazione in tutte le nominate cose, nè da alcuna di quelle, nè meno da cosa che sia in voi stesso, potrete assicurarvi se la nave cammina o pure sta ferma: voi saltando passerete nel tavolato i medesimi spazii che prima, nè, perché la nave si muova velocissimamente, farete voi maggior salti verso la poppa che verso la prua, ben che, nel tempo che voi state in aria, il tavolato scorra verso la parte contraria al vostro salto; e gettando un frutto all'amico, non con più forza bisognerà gettarglielo, per arrivarlo, si egli sarà verso la prua e voi verso la poppa, che se voi fuste situati per l'opposito; le goccie cadranno nel vaso inferiore senza restarne pur una verso poppa, ancor che, mente la goccia è per aria, la nave scorra molti palmi; i pesci nella loro acqua non più fatica dureranno per notare verso la precedente che verso la sussequente parte del vaso, ma con pari agevolezza andranno a prender il cibo che voi gli metterete su qual si voglia parte dell'orlo del vaso; e finalmente le farfalle e le mosche dureranno a volare indifferentemente verso tutte le parti, nè si ridurranno mai a ritirarsi verso la parte che riguarda la poppa, quasi che le fussero stracche in tener dietro al veloce corso della nave, dalla quale per lungo tempo esse saranno state separate, cioè mentre restarono sospese in aria; e se abbruciando alcuna lagrimetta d'incenso farete un poco di fumo, vedrete quello ascender in alto e quivi trattenersi, ed a guisa di nugoletta indifferentemente muoversi non più verso questa che quella parte. E se voi di tutti questi effetti mi domanderete la ragione, vi risponderò per ora: «Perché il moto universale della nave, essendo comunicato all'aria ed a tutte quelle cose che in essa vengono contenute, e non essendo contrario alla naturale inclinazione di quelle, in loro indelebilmente si conserva»; altra volta poi ne sentirete risposte particolari e diffusamente spiegate. Or, quando voi abbiate vedute tutte queste esperienze, e come questi movimenti, ben che accidentarii ed avventizii, ci si mostrano i medesimi appunto così quando la nave si muova quanto se ella stia ferma, non lascerete voi ogni dubbio che l'istesso deva accadere intorno al globo terrestre, tutta volta che l'aria vadia insieme con quello? e tanto più ancora, quanto quel moto universale, che nella nave è accidentario, noi lo ponghiamo, in Terra e nelle cose terrestri, come suo naturale e proprio. Aggiugnette di più, che nella nave noi, ben che cento volte abbiamo provato a farla muovere e a farla star ferma, nè però mai abbiamo potuto imparare a conoscere dalle cose interne quello ch'ella faccia: come sarà possibile conoscer questo nella Terra, la quale noi abbiamo avuta sempre in un medesimo stato?

5. Non sarebbe corretto enunciare il principio di relatività nella maniera seguente: «Siano dati due sistemi di riferimento inerziali. Se si pongono in un istante dato *tutti i corpi e gli oggetti dell'Universo,* senza nessuna eccezione, in codizioni identiche, a partire da questo momento tutti i fenomeni evolveranno nella stessa maniera in tutti e due sistemi di riferimento». Una tale affermazione è completamente priva di senso e non riflette alcuna legge della fisica. In effetti, se i due sistemi di riferimento sono in movimento, l'uno rispetto all'altro, è impossibile che assolutamente *tutti i corpi dell'Universo* si trovino in un istante dato esattamente nelle stesse condizioni, poiché le velocità dei medesimi corpi saranno differenti nei due sistemi di riferimento. Quindi, la premessa della formulazione sopra citata (che è scorretta) non può essere soddisfatta poiché implica la totalità dei corpi dell'Universo. Preso nel suo vero significato, il principio di relatività non è una legge fisica ordinaria, perché tratta non i fenomeni di tutto l'Universo, ma soltanto quelli che si verificano in *sistemi chiusi finiti* o in *sistemi che si trovino in condizioni esterne immutabili.* Un esempio qui è dato da vano chiuso a bordo della nave citato da Galilei. Il vano deve essere chiuso, altrimenti i fenomeni ivi osservati dipenderebbero dalla velocità del vento che cambia con la velocità della nave. Ma un tale vano non è un sistema veramente chiuso poiché i corpi che vi si trovano vengono sottoposti ad influenze esterne, in particolare al campo di gravità terrestre. Dato che questo campo è lo stesso, sia la nave immobile o in movimento, il locale scelto, con tutti i suoi oggetti, si comporta come un sistema chiuso, benché sottoposto al campo di gravità esterno.

Qualche volta il principio di relatività viene formulato nella maniera seguente: «Le leggi della Natura sono le medesime in tutti i sistemi di riferimento inerziali». Il difetto di questa formulazione è che l'«identità delle leggi della Natura» può essere interpretata nel senso di una evoluzione identica di un fenomeno dato in un qualsiasi sistema di riferimento. Come abbiamo dimostato prima non è così. Il modo di evoluzione dei fenomeni fisici è determinato non soltanto dalle leggi fondamentali della Natura, ma anche dai valori dei parametri che caratterizzano le condizioni iniziali del sistema. Allo scopo di evitare ogni malinteso, sarebbe preferibile parlare non di «leggi della Natura» ma, come suggerirà Einstein, di «leggi che determinano i cambiamenti di stato dei sistemi fisici». Quindi, il principio di relatività sarà formulato così:

Le leggi della Natura che registrano i cambiamenti di stato dei sistemi fisici non dipendono dai sistemi di riferimento inerziali ai quali si riferiscono questi cambiamenti.

Questa ultima formulazione del principio è di portata più generale di quella in cui veniva invocata l'invarianza delle leggi di Newton rispetto alla trasformazione di Galilei. Questo è vero per le ragioni seguenti: in primo luogo, si tratta qui dell'invarianza di *tutte le leggi fisiche* e non soltanto delle leggi della meccanica (leggi di Newton). In secondo luogo, non si precisa

la forma delle trasformazioni delle coordinate e del tempo rispetto alle quali sono invarianti le leggi della natura. Queste trasformazioni devono essere dedotte dal *principio di relatività* e da certe altre considerazioni. Procedendo in questo modo sono state stabilite, nella teoria della relatività, le trasformazioni di Lorentz, menzionate prima. Le leggi della Natura sono invarianti rispetto alle trasformazioni di Lorentz. Così formulato, il principio di relatività è chiamato *principio di relatività di Einstein.* Se ne tratterà in seguito.

§ 16. *Additività e legge di conservazione della massa*

1. Siano dati due corpi di massa m_1 ed m_2 i quali dopo una collisione si uniscono per formare un solo corpo composto. Un esempio è l'agglomerazione di due palle di argilla dopo un urto. Un altro esempio è dato dalle *reazioni chimiche* o *nucleari* nelle quali due atomi o nuclei si uniscono per formare una nuova molecola o un nuovo nucleo. Il problema consiste nel calcolare la massa m del corpo composto, conoscendo le masse m_1 ed m_2 dei corpi iniziali. A prima vista, la risposta parrebbe del tutto semlice: $m = m_1 + m_2$. Benché questa risposta sia in certa misura corretta, necessita ugualmente di una spiegazione. Per fornirla faremo appello al principio di relatività di Galilei.

Studiamo il processo di collisione in un sistema di riferimento inerziale S. Chiamiamo v_1 e v_2 le velocità dei corpi prima dell'urto, e con v la velocità del corpo composto dopo la collisione. In virtù della legge di conservazione dell'impulso

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = mv. \tag{16.1}$$

Consideriamo ora lo stesso processo di collisione in un altro sistema di riferimento S', *in movimento rettilineo ed uniforme con velocità* V rispetto al sistema S. Conformemente al principio di relatività, la legge di conservazione dell'impulso è valida anche per il sistema S' e viene scritta nella forma

$$m_1 v_1' + m_2 v_2' = mv'. \tag{16.2}$$

Essendo i due sistemi inerziali perfettamente equinvalenti, le masse di tutti i corpi sono uguali nei sistemi S' e S. In fisica non relativistica le velocità v_1', v_2' e v' nel sistema S' sono legate alle velocità corrispondenti nel sistema S attraverso le relazioni

$$v_1' = v_1 - V, \quad v_2' = v_2 - V, \quad v' = v - V.$$

Quindi (16.2) si trasforma in

$$m_1(v_1 - V) + m_2(v_2 - V) = m(v - V)$$

e tenendo conto di (16.1) in

$$(m_1 + m_2)V = mV.$$

Quindi

$$m = m_1 + m_2. \tag{16.3}$$

Come si voleva dimostrare, la *massa del corpo composto è uguale alla somma delle masse iniziali dei corpi. Questa proprietà si chiama additività della massa.*

Questa dimostrazione può essere generalizzata. Non è necessario supporre che solo due corpi possano entrare in collisione e unirsi per formare un corpo unico. Si può, per esempio, considerare una reazione chimica qualunque alla quale partecipano numerose molecole o atomi che dopo la reazione formano altre molecole o atomi. Riprendendo il ragionamento che ha condotto alla relazione (16.3), noi arriveremo a una conclusione più generale: *la somma delle masse delle sostanze prima della reazione è uguale alla somma delle masse delle sostanze dopo la reazione. È la legge di conservazione della materia o più esattamente la legge di conservazione della massa.* Dato che la massa è proporzionale al peso, questa legge veniva denominata anche *legge di conservazione del peso.* Questa denominazione era usuale nelle vecchie pubblicazioni, ma non ha avuto fortuna ed è caduta in disuso. Tuttavia sia Lomonosov (1711-1765) sia Lavoisier (1743-1794), che hanno introdotto nella scienza la legge di conservazione della materia, scoprirono questa legge basandosi sui risultati delle pesate dei prodotti delle reazioni chimiche. Ed è per questo che ciò che essi dimostrarono merita di chiamarsi anche «legge di conservazione del peso».

2. Newton ha definito la massa di un corpo come la *quantità di sostanza* in esso contenuta. Una tale definizione esige che sia prima precisato che cosa si deve intendere per «quantità di sostanza». Newton non fece altro che sostituire il termine «quantità di sostanza» con il nuovo termine «massa» senza curarsi di dare delle definizioni precise. Ma l'espressione newtoniana di massa sottintende implicitamente l'idea dell'additività delle masse. Se vengono riuniti due pesi di cui ciascuno abbia una massa di 1 kg, si conclude «intuitivamente» che si ottiene un peso corrispondente ad una massa di 2 kg, poiché la «quantità di sostanza» è due volte più grande che in ciascuno dei pesi iniziali. L'intuizione è sempre stata fonte di creazione scientifica, ma nella scienza essa non può sostituirsi alla dimostrazione. Ogni dimostrazione deve basarsi su determinazioni precise e sulle leggi della Natura. Abbiamo dato al § 10 una definizione precisa della nozione di massa. Ma partendo da questa definizione, non è del tutto evidente che la massa sia una grandezza additiva. È altrettanto importante dimostrare che l'*additività e la legge di conservazione della massa sono verificate solo in modo approssimato.* Infatti abbiamo dedotto questa legge dal principio di relatività di Galilei. Tuttavia il *principio galileiano non è una legge naturale assoluta-*

mente precisa: non è che un caso limite, approssimato, del principio di relatività di Einstein. Quindi, il nostro ragionamento dev'essere riesaminato e basato non più sul principio di Galilei ma su quello di Einstein. Noi lo faremo in seguito, dopo aver studiato la teoria della relatività. Per ora ci limitiamo ad esporne il principale risultato, che è di importanza fondamentale. *La legge di conservazione della massa nella sua vecchia formulazione — la somma delle masse prima della reazione è uguale alla somma delle masse dopo la reazione — è inesatta. Le leggi di conservazione della massa e dell'energia, che la fisica prerelativistica considerava due leggi della Natura, precise ed indipendenti, hanno perso la loro indipendenza nella fisica relativistica, che le ha riunite in una sola legge di conservazione della massa e dell'energia. Ogni forma di energia possiede una massa uguale al rapporto tra la quantità di energia ed il quadrato della velocità della luce nel vuoto.* È la conclusione alla quale siamo arrivati nel caso particolare dell'energia radiante (v. fine del § 13). Nel bilancio della massa si deve tener conto non soltanto della massa della sostanza, ma anche della massa dell'energia emessa o assorbita. In ogni processo naturale la somma della massa della sostanza e dell'energia resta costante.

Il fatto che nello studio delle reazioni chimiche non siano state scoperte variazioni di massa delle sostanze si deve alla quantità minima dell'effetto energetico che le accompagna. La variazione di massa che risulta dalla liberazione o dall'assorbimento di energia è talmente piccola da non poter essere misurata. Così, nella combustione di 12 g di carbone con formazione di biossido di carbone (CO_2), si liberano 99 kcal di energia. In erg questo valore sarà uguale a $\varepsilon = 99 \cdot 4{,}19 \cdot 10^{10} \approx 4 \cdot 10^{12}$ erg. Secondo la formula (13.2) a questa energia corrisponde una massa

$$\Delta m \approx \frac{4 \cdot 10^{12}}{9 \cdot 10^{20}} \approx 0{,}5 \cdot 10^{-8} \text{ g}.$$

La massa totale di sostanza che viene messa in gioco nella reazione è $m = 12 + 32 = 44$ g. Da cui

$$\frac{\Delta m}{m} = \frac{0{,}5 \cdot 10^{-8}}{44} \approx 10^{-10}.$$

Per poter scoprire mediante pesate la variazione di massa delle sostanze che interviene in una reazione chimica, bisognerebbe che la precisione relativa delle misure fosse almeno uguale a 10^{-10}.

Il rendimento energetico delle reazioni nucleari è molti milioni di volte più grande di quello delle reazioni chimiche. La relazione (13.2) tra la massa e l'energia è stata confermata sperimentalmente nelle reazioni nucleari. Questa relazione ha una importanza eccezionale nella fisica moderna e nella fisica delle particelle elementari.

§ 17. *Le leggi d'attrito*

1. In meccanica si ha generalmente a che fare con forze di gravitazione universale, con forze elastiche e con forze di attrito. Talvolta vengono inclusi in meccanica problemi sul moto di corpi che portano cariche elettriche attraverso campi elettrici e magnetici. Si devono allora aggiungere alle forze sopra indicate le forze elettromagnetiche, che sono le forze alle quali sono sottoposte le particelle cariche che si trovano in campi elettrici e magnetici. Studieremo minuziosamente le forze di gravitazione universale e le forze elastiche nei capitoli successivi di questo volume. In questo capitolo ci limiteremo ad esaminare brevemente le *forze d'attrito.* Noteremo che la meccanica non si occupa della natura delle forze d'attrito, problema che è trattata in altre parti della fisica. Per ciò lasciamo da parte il problema dell'origine delle forze d'attrito e limitiamoci all'esposizione delle leggi d'attrito scoperte per via sperimentale. È evidente che qualunque sia l'importanza di questo problema, esso non presenta il carattere del tutto fondamentale esibito dalle leggi di Newton, ad esempio. D'altronde le leggi sull'attrito sono leggi approssimate, d'una approssimazione a volte anche notevole.

Le forze elastiche, di gravitazione, di repulsione e di attrazione mutua dei corpi carichi non dipendono che *dalla configurazione dei corpi,* quindi dalle posizioni relative e non dalla loro velocità. Le forze d'attrito dipendono, oltre che dalla configurazione dei corpi, anche *dalle velocità relative dei corpi* tra i quali esse si esercitano.

Le forze d'attrito si possono esercitare tra corpi in contatto, o tra differenti parti di un corpo quando queste parti siano in movimento relativo o in uno stato di quiete relativo. L'attrito è detto *esterno* se si manifesta tra corpi differenti in contatto mutuo, ma tali da non formare un corpo unico (ad esempio, attrito tra una barra ed un piano inclinato, sul quale essa riposa o scivola). Quando l'attrito si manifesta tra differenti parti di uno stesso corpo, tra differenti strati di un liquido, ad esempio, oppure di un gas, le cui velocità variano continuamente da uno strato all'altro, si dice che si ha a che fare con un attrito *interno.* Questa suddivisione in attrito esterno o interno è d'altronde tutto convenzionale. Se vengono riuniti i corpi in contatto in un solo sistema meccanico, l'attrito che era dapprima considerato come esterno diventa interno. La forza d'attrito applicata a un corpo solido in movimento in un fluido (liquido o gas) è la forza d'attrito interno nel fluido e non una forza di attrito esterno che si esercita tra il solido e il liquido. L'esperienza dimostra infatti che gli strati di liquido o di gas più vicini alla superficie del solido vi aderiscono e si spostano con esso; l'attrito si esercita tra differenti strati adiacenti del fluido.

Si dice che vi è attrito «a secco» quando questo si sviluppa tra due superfici solide tra le quali non c'è strato liquido o gassoso intermedio (assenza di lubrificante). Quando questi corpi sono in movimento relativo, si distingue l'*attrito per slittamento* e l'*attrito per rotolamento.* L'attrito che si

esercita tra la superficie di un corpo solido ed un mezzo liquido o gassoso nel quale esso si muove, così come l'attrito che si esercita tra differenti strati di un fuido è detto attrito *interno* o *viscoso*.

2. Esaminiamo prima le leggi dell'attrito «a secco». Un tale attrito appare non solo quando un corpo scivola sulla superficie di un secondo corpo, ma ad ogni tentativo di farlo scivolare. In quest'ultimo caso si tratta di *attrito a riposo* (attrito statico) o di *un attrito per adesione*. L'esistenza di un attrito a riposo è una caratteristica particolate dell'attrito a secco. Più in generale, e senza tener conto delle caratteristiche dei corpi in questione, si dirà attrito *a secco* se le forze d'attrito non si annullano quando si annullano le velocità relative dei corpi in contatto. Nel caso contrario l'attrito è detto *fluido*. Poniamo una barra pesante sulla superficie orizzontale di una tavola (fig. 27). In stato di quiete il peso P della barra è equilibrato dalla

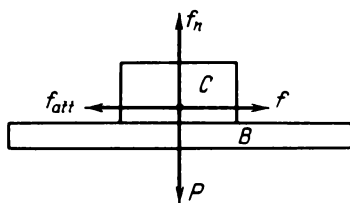



Fig. 27.

forza di reazione normale f_n della tavola ($P = f_n$). Applichiamo alla barra una forza di trazione orizzontale f tale che si trovi nel piano verticale passante per il centro di massa della barra; tale forza deve essere applicata possibilmente vicino alla superficie della tavola al fine di evitare il rovesciamento della barra nell'istante iniziale del suo avviamento. L'esperienza mostra che se la forza f non supererà un valore limite $f_0 (f < f_0)$ la barra non si metterà in moto. Ne deriva che la tavola esercita sulla barra una forza uguale e opposta a f_0 e la compensa esattamente: f_{att}, questa è la forza d'attrito a riposo. La medesima forza d'attrito ma diretta in senso inverso è esercitata dalla barra sulla tavola. La forza di attrito a riposo assume automaticamente un valore uguale e opposto alla forza esterna f. Il suo valore massimo è f_0.

Supponiamo ora che la barra scivoli sulla tavola a una velocità v. Se il suo moto è uniforme, la forza agente f viene ancora compensata dalla forza di attrito f_{att}, se il sistema è squilibrato il moto della barra sarà accelerato. Nei due casi la forza di attrito f_{att} è funzione della velocità v. La figura 28 mostra l'andamento di questa dipendenza. La forza d'attrito applicata alla barra è sempre orientata in direzione contraria al suo moto. Sulla figura questo risultato è espresso dal fatto che f_{att} e v sono sempre di segno opposto. Per $v = 0$ il grafico diviene degenere e si trasforma in un segmento di retta verticale: ciò significa che la forza d'attrito a riposo può assumere ogni valore compreso tra $-f_0$ e $+f_0$. Al crescere del valore assoluto della velocità, il valore assoluto della forza d'attrito inizialmente diminuisce fino

ad un minimo, per poi cominciare a crescere. La curva che descrive questa variazione è simmetrica rispetto all'origine delle coordinate: $[f(+v) = -f(-v)]$. Le esperienze di Coulomb (1736-1806) hanno dimostrato che il valore della forza d'attrito f_{att} non dipende dall'area delle superfici in contatto ed è proporzionale alla forza di reazione vincolare f_n dei corpi, normale alle superfici in contatto. Quindi si può scrivere

$$f_{att} = \mu f_n. \tag{17.1}$$

La costante μ porta il nome di *coefficiente d'attrito;* il suo valore dipende dalla natura e dallo stato delle superfici in contatto. Quando un corpo scivola veramente sulla superficie di un altro corpo, μ si chiama *coefficiente d'attrito dinamico*. Se i due corpi sono immobili l'uno rispetto all'altro, esso si chiamerà *coefficiente d'attrito statico*. In quest'ultimo caso si ammette che, nella formula sopra indicata, f_{att} prenda il valore f_0 che è il più grande valore che può assumere la forza d'attrito a riposo. In accordo con la figura 28, il coefficiente d'attrito μ deve, in generale, dipendere dalla velocità v. D'altronde, come aveva già notato Coulumb, questa dipendenza è de-

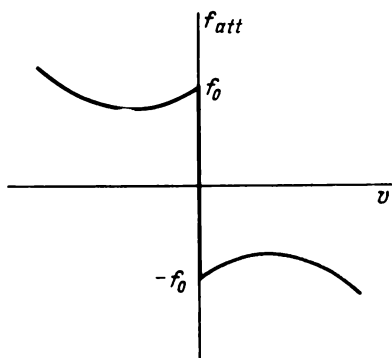



Fig. 28.

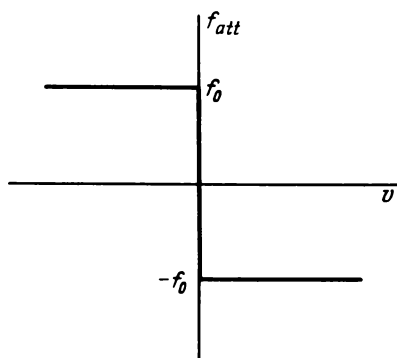



Fig. 29.

bole, e se ciò che interessa è un calcolo approssimato il coefficiente μ si può considerare indipendente dalla velocità. La curva della figura 28 si trasforma allora nei segmenti di retta della figura 29. Anche nel caso qui ipotizzato la forza d'attrito dipende dalla velocità v poiché essa cambia segno quando si inverte la direzione del moto e per $v = 0$ essa ha un valore indeterminato. In tutti i problemi d'attrito dati alla fine del paragrafo, si suppone che μ non dipenda da v.

L'indipendenza della forza d'attrito a riposo dall'area della superficie di contatto può essere illustrata per mezzo dell'esperimento seguente. Si prende un oggetto a forma di parallelepipedo rettangolo, un mattone, ad esempio, e si mettano le sue differenti facce successivamente in contatto con un piano inclinato. Aumentando progressivamente l'angolo di inclinazione del piano inclinato ci si accorge che il mattone comincia a scivolare

ad un certo valore dell'angolo che resta il medesimo qualunque sia la faccia del mattone in contatto con il piano inclinato.

3. In caso d'attrito a secco, un corpo può restare in riposo anche se gli viene applicata una forza di trazione. Fintantoché la forza applicata f è inferiore al valore massimo della forza d'attrito in stato di quiete f_0, il corpo resta immobile. È questa proprietà dell'attrito a secco che determina l'effetto di «stagnazione». Consideriamo un corpo A che si trova su una superficie orizzontale (fig. 30). Esso si trova in equilibrio mentre le due molle a

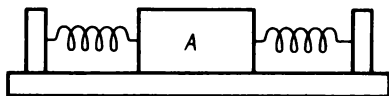



Fig. 30.

cui è attaccato sono distese o ugualmente tese. La forza applicata al corpo A è allora nulla. Spostiamolo dalla sua posizione di equilibrio in una o nell'altra direzione; se la forza f che agisce attraverso le molle tese è inferiore a f_0, il corpo A resterà in equilibrio nella sua nuova posizione. Un corpo in stato di quiete su una superficie orizzontale non ha una posizione di equilibrio ben determinata. Ma esiste una zona all'interno della quale si può spostare il corpo A senza che lo stato di equilibrio sia rotto. Questa zona porta il nome di zona di «ristagno». L'attrito a secco che si manifesta, ad esempio, nei supporti degli strumenti di misura ad ago, limita la loro sensibilità. L'esistenza di una zona di «stagnazione» rende indeternimata la posizione di equilibrio in cui si ferma l'ago dell'apparecchio di misura e limita la sua precisione.

4. In molti casi le forze d'attrito risultano utili. Ad esempio, un'automobile si muove solo grazie alle forze d'attrito che si esercitano tra le gomme e il rivestimento stradale. Le forze d'attrito determinano ugualmente la marcia dei treni e quelle che si esercitano tra le cinghie e le pulegge permettono di trasmettere il moto da un albero all'altro. Si potrebbero moltiplicare gli esempi dell'utilità delle forze d'attrito, ma sovente esse sono nocive. Tali sono, ad esempio, le forze d'attrito che si esercitano nelle macchine, tra gli assi e i manicotti, perché ne provocano l'usura prematura. A ciò si può in parte porre rimedio utilizzando dei lubrificanti o meglio sostituendo le forze d'attrito per scivolamento con forze d'*attrito per rotolamento* (cuscinetti a sfera). Si intende con attrito per rotolamento l'attrito che si produce quando un corpo sferico o cilindrico ruota senza scivolare su una superficie piana o curva. Formalmente l'attrito per rotolamento ubbidisce alle medesime leggi che regolano l'attrito per scivolamento, ma il coefficiente d'attrito è molto più piccolo di quello per scivolamento. Il procedimento più efficace è sempre più diffuso per ridurre le forze d'attrito consiste nel creare un «cuscino d'aria» tra le superfici in contatto.

5. Abbiamo già detto che, a differenza delle forze d'attrito «a secco», le

forze d'attrito fluido o viscoso si annullano con le velocità relative degli strati adiacenti del mezzo circostante. Il problema dell'attrito viscoso sarà approfondito nei capitoli dedicati alla meccanica dei fluidi e alla teoria cinetica del gas. Ora diamo solo breve compendio delle forze d'attrito viscoso che si manifestano quando un corpo solido si sposta in un mezzo fluido. Oltre alle forze provocate dall'attrito interno, la superficie del mobile è sottoposta alle forze di pressione normale da parte del mezzo circostante. La forza risultante da tutte le pressioni normali ha una componente orientata in direzione contraria rispetto al moto del corpo. Questa componente porta il nome di *resistenza del mezzo* e, nel caso di grandi velocità, diventa varie volte più grande delle forze di resistenza dovute all'attrito viscoso propriamente detto. Per studiare il moto dei corpi in un mezzo viscoso conviene considerare queste due forze insieme. La forza totale orientata in direzione contraria rispetto alla velocità del mobile sarà convenzionalmente chiamata *forza d'attrito* f_{att}.

Nel caso di piccole velocità questa forza f_{att} è proporzionale alla velocità del corpo

$$f_{att} = -k_1 v. \tag{17.2}$$

Con l'aumento della velocità la correlazione diventa più complessa, ed infine la forza d'attrito cresce approssimativamente come il quadrato della velocità:

$$f_{att} = -k_2 v^2 \frac{v}{v} = -k_2 v v. \tag{17.3}$$

Sia i «coefficienti d'attrito» k_1 e k_2 che l'intervallo di velocità nel quale si passa dalla legge lineare (17.2) alla legge quadratica (17.3) dipendono notevolmente dalla forma e dalle dimensioni del mobile, dalla sua direzione, dallo stato della sua superficie e delle proprietà del mezzo circostante. Aumentando la superficie e modificando in modo conveniente la forma del corpo, si arriva ad aumentare fortemente il valore dei coefficienti k_1 e k_2. Questa è la base del principio di funzionamento del paracadute (vedere il problema 8 alla fine di questo paragrafo).

Problemi

1. Esiste un comodo procedimento di misura del coefficiente d'attrito a riposo, che consiste nel porre il corpo su un piano inclinato e nel determinare l'angolo di inclinazione minima raggiunto il quale il corpo comincia a scivolare. Trovare la relazione tra l'angolo α e il coefficiente d'attrito μ.

Risposta. $\mu = \mathrm{tg}\,\alpha$.

2. Un uomo da solo può, sia pure lentamente, trainare una pesante chiatta tirandola con una corda. Ma non può fare lo stesso con un pesante corpo posato sul terreno, anche se il peso di quest'ultimo corpo è notevolmente inferiore a quello della chiatta. Spiegare perché.

3. Stendete le mani orizzontalmente, ponete un'asticella sulle estremità degli indici. Avvicinate ora le vostre mani l'una all'altra. Determinate in qual punto dell'asticella si incontreranno i vostri indici. Allontanate di nuovo le mani, in modo che l'asticella conservi la posizione orizzontale. Dove si troverà uno dei vostri indici, quando l'altro raggiungerà un'estremità dell'asticella? Effettuate questo esperimento e spiegate il risultato ottenuto.

4. Un autista attraversando nella nebbia un tratto di strada rettilineo all'improvviso vede davanti a sè, a breve distanza, un muro perpendicolare rispetto al suo moto. Che cosa deve fare per evitare l'incidente: frenare o tentare di svoltare?

Risposta. Meglio frenare.

5. Un'automobile si muove a velocità costante su una strada pianeggiante ma tortuosa. Assimilando la strada ad una sinusoide, calcolare la velocità massima alla quale l'automobile non rischia di slittare.

Soluzione. Quando un'automobile si muove su una traiettoria curva a una velocità di modulo costante, la sua accelerazione a non può essere che normale rispetto alla traiettoria del moto. Questa accelerazione è prodotta dalla forza d'attrito a riposo che si esercita tra le gomme e il rivestimento stradale: $f_{att} = ma$. Se la velocità dell'automobile supererà un certo limite, la forza d'attrito massimo f_0 non basterà per mantenerla sulla traiettoria imposta soprattutto nei punti dove la sua curvatura è grande ($f_0 < ma$). L'automobile comincerà allora a scivolare lungo la normale alla traiettoria. Conformemente alla figura 28, la forza d'attrito per scivolamento diminuirà, ciò che aumenterà lo scivolamento laterale dell'automobile rispetto alla strada. In questo modo si provoca lo slittamento. Per un moto che si effettua lungo una sinusoide l'accelerazione normale raggiunge il valore limite nei punti della sinusoide dove la curvatura è massima. Se $y = y(x)$ è l'equazione della sinusoide, si ha alle sommità $y' = 0$ e il raggio di curvatura si può calcolare in questi punti mediante la formula $\frac{1}{R} = |y''|$. Scrivendo l'equazione della sinusoide nella forma $y = A \sin 2\pi \frac{x}{l}$ (l'ampiezza A e il periodo l sono costanti) è facile trovare la condizione richiesta per evitare lo slittamento

$$v < \frac{l}{2\pi}\sqrt{\frac{\mu g}{A}},$$

dove μ è il coefficiente d'attrito, g l'accelerazione di gravità.

6. Risolvere il medesimo problema supponendo che l'automobile si muova a velocità costante su una traiettoria ellissoidale di semiassi A e B. Determinare in quali punti della traiettoria l'accelerazione normale sarà massima e minima.

Risposta. $a_{mass} = \frac{Av^2}{B^2}$, $a_{min} = \frac{Bv^2}{A^2}$. Non ci sarà lo slittamento a condizione se $v < B\sqrt{\frac{\mu g}{A}}$.

7. Supponendo che le molle di figura 30 siano identiche, determinare la zona di «stagnazione» del corpo A.

Risposta. Il centro della base del corpo A può essere in equilibrio in ogni punto di una zona i cui limiti sono:

$$-\frac{\mu P}{2k} < x < +\frac{\mu P}{2k},$$

dove P il peso del corpo, μ il coefficiente d'attrito, k il coefficiente di elasticità della molle. Si deve far coincidere l'origine delle coordinate con il centro della zona di «stagnazione».

8. Un paracadutista fa un salto con il paracadute ad apertura ritardata. Supponendo che la massa m del paraccadutista sia uguale a 70 kg, calcolare la sua velocità di caduta uniforme con paracadute chiuso e con paracadute aperto. Per un corpo umano in caduta libera, il coefficiente k_2 è dell'ordine di 2 g/cm. Con un paracadute aperto questo coefficiente aumenta di circa 100 volte, cioè diventa approssimativamente 200 g/cm.

Soluzione. La velocità di caduta uniforme è determinata dall'uguaglianza tra il peso dell'uomo $P = mg$ e la forza d'attrito nell'aria:

$$v = \sqrt{\frac{mg}{k_2}} \approx \begin{cases} 60 \text{ m/s senza paracadute;} \\ 6 \text{ m/s con paracadute aperto.} \end{cases}$$

III. CONSEGUENZE E APPLICAZIONI DELLE LEGGI DI NEWTON

§ 18. *Impulso della forza e variazione della quantità di moto*

1. Abbiamo dimostrato nel § 12 che la derivata rispetto al tempo della quantità di moto p di un sistema di punti materiali è definita dall'equazione

$$\frac{dp}{dt} = F^{(e)}, \tag{18.1}$$

dove $F^{(e)}$ è la somma geometrica di tutte le forze esterne applicate al sistema. In virtù della terza legge di Newton le forze interne non figurano in questa equazione. Quando il sistema si riduce a un solo punto materiale, l'equazione (18.1) si riduce ad esprimere la seconda legge di Newton. Se la forza $F^{(e)}$ è invariabile, integrando la (18.1) in un intervallo di tempo $(t - t_0)$ si ottiene:

$$p - p_0 = F^{(e)}(t - t_0), \tag{18.2}$$

dove i vettori p e p_0 sono le quantità di moto del sistema negli istanti t e t_0 rispettivamente.

Il prodotto della forza invariabile $F^{(e)}$ per la durata della sua azione si chiama *impulso della forza* durante questo periodo. Non si deve confondere questa nozione con la grandezza $p = m_1v_1 + \dots + m_nn_n$, che già conosciamo e che si chiama *impulso di un sistema di punti materiali* o *impulso del corpo*. Tuttavia, proprio per questa ragione non utilizzeremo mai da solo il termine «impulso», ma lo assoceremo costantemente ai termini «forza», «corpo» (o «punto materiale», o «sistema di punti materiali»). Così sarà chiaro ogni volta che verrà utilizzato di quale impulso si tratti. Per evitare ogni malinteso, nei casi in cui si dovrà ricorrere simultaneamente alla nozione di impulso di una forza, denoteremo le grandezze $p = mv$ e $p = m_1v_1 + \dots + m_nv_n$ col termine «*quantità di moto*». Osserviamo intanto che non dovremo utilizzare sovente la nozione di impulso della forza.

2. La relazione (18.2) significa che la variazione della quantità di moto di un corpo o di un sistema di corpi è uguale all'impulso della risultante di tutte le forze esterne applicate al sistema. Questo risultato, stabilito per una forza $F^{(e)}$ invariabile, può essere generalizzato al caso di una forza variabile nel tempo. Suddividiamo l'intervallo di tempo $t - t_0$ in un gran numero di intervalli di tempo più corti: $(t_1 - t_0)$, $(t_2 - t_1)$, ... , $(t - t_{n-1})$ (fig. 31).

Supponiamo che questi intervalli di tempo siano sufficientemente piccoli perché la forza $F^{(e)}$ possa essere considerata praticamente costante in ogni intervallo di tempo. Denotiamo i valori corrispondenti della forza $F^{(e)}$ con i simboli $F_1^{(e)}, \ldots, F_n^{(e)}$. In virtù della relazione (18.2) possiamo scrivere

$$\begin{aligned} p_1 - p_0 &= F_1^{(e)}(t_1 - t_0), \\ p_2 - p_1 &= F_2^{(e)}(t_2 - t_1), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ p - p_{n-1} &= F_n^{(e)}(t - t_{n-1}), \end{aligned}$$

dove $p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}$ sono le quantità di moto del sistema negli istanti t_1, $t_2, \ldots, t_{n-1}$ rispettivamente. Sommando queste uguaglianze, si ottiene

$$p - p_0 = \sum_i F_i^{(e)} \Delta t_i,$$

in cui si utulizza l'indicazione standard $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$. Quest'ultima uguaglianza è approssimata e non completamente determinata, poiché i valori

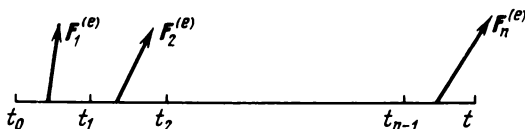



Fig. 31.

$F_1^{(e)}, F_2^{(e)}, \ldots, F_n^{(e)}$ della forza esterna non sono fissati esattamente. Però questa indeterminatezza può esser evitata e l'uguaglianza sopra indicata diventa esatta, quando si passa al limite facendo tendere a zero l'intervallo di tempo Δt_i più grande, mantenendo costante la durata $t - t_0$. Dopo il passaggio al limite, si ottiene

$$p - p_0 = \lim_{\Delta t \to 0} \sum_i F_i^{(e)} \Delta t_i.$$

Si sa che il limite che figura nel secondo membro dell'uguaglianza porta il nome di integrale definito della funzione $F^{(e)}(t)$ tra le velocità t_0 e t; questa operazione si esprime con la seguente notazione:

$$\int_{t_0}^{t} F^{(e)}(\tau)d\tau \equiv \lim_{\Delta t_i \to 0} \sum_i F_i^{(e)} \Delta t_i.$$

Si denota con τ la *variabile di integrazione* della funzione $F^{(e)}$ per non confonderla con il limite superiore di integrazione t. Il valore di un integrale definito non dipende evidentemente dalla lettera utilizzata per denotare la variabile d'integrazione; dato un integrando, il risultato non dipende che dal valore dei limiti d'integrazione t_0 e t.

Così dalla (18.2) si ottiene l'equazione generalizzata

$$p - p_0 = \int_{t_0}^{t} F^{(e)}(\tau) d\tau. \tag{18.3}$$

L'integrale che si trova al secondo membro di questa uguaglianza porta il nome di *impulso della forza* $F^{(e)}$ *che si manifesta durante l'intervallo di tempo compreso tra* t_0 *e* t. Quindi, anche nel caso di una forza applicata che varia nel tempo, *l'incremento della quantità di moto di un sistema di punti materiali è uguale all'impulso della somma geometrica di tutte le forze esterne a cui è sottoposto il sistema*. Come abbiamo già indicato, le forze interne non influenzano la variazione della quantità di moto totale del sistema, poiché, dovendo soddisfare al principio di azione e reazione, intervengono sempre a coppie.

3. Vediamo così che la quantità di moto che può asquistare un corpo dipende non soltanto dalla forza applicata, ma anche dalla durata della sua azione sul corpo. Per illustrate questa affermazione consideriamo una semplice esperienza. Una massa pesante (fig. 32) è sospesa ad un filo, e un secondo filo identico è attaccato alla parte inferiore della massa. Se si esercita un lento sforzo di trazione sul filo inferiore, si rompe il filo superiore. La ragione è evidente. Dato che la massa pesante si trova praticamente a riposo durante tutto l'esperimento, la differenza di tensione $T_1 - T_2$ del filo deve equilibrare il peso P del carico: $T_1 - T_2 = P$. Ne risulta che $T_1 > T_2$. Denotiamo con T_0 la tensione massima alla quale si può sottoporre il filo senza che si rompa. Aumentando lentamente lo sforzo di trazione esercitato sul filo inferiore, ad un

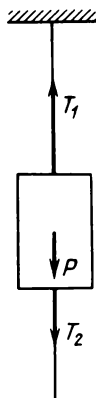



Fig. 32.

certo momento T_1 raggiunge il valore limite T_0, ma T_2 è ancora inferiore a T_0. Per questo il filo inferiore resta intatto, mentre il filo superiore si rompe. Ma se si applicasse al filo inferiore una trazione brusca, allora sarebbe il filo inferiore a rompersi, mentre il filo superiore resterebbe intatto. In effetti, per provocare la rottura del filo superiore, si deve prima estenderlo per una certa lunghezza, mettendo in movimento il peso. Ma lo spostamento del peso non può essere istantaneo, anche se è sottoposto a una forza di trazione notevole. Nel caso di una trazione rapida non si riesce a comunicare al peso uno spostamento sufficiente ed il filo inferiore si trova sottoposto ad una tensione maggiore di T_0; il filo superiore non avendo il tempo di allungarsi conserva praticamente invariabile la sua tensione ed è il filo inferiore a rompresi.

Consideriamo un secondo esperimento che spieghi il ruolo della durata di azione di una forza. Ritagliamo da un foglio di carta due anelli identici con un diametro esterno di circa 20 cm e un diametro interno di circa 15 cm. Sospendiamo questi anelli a due aste metalliche orizzontali fissate su supporti e introduciamo negli anneli una lastra di legno quadrangolare di circa 1 m di lunghezza, con una sezione retta da 2 a 3 cm^2 circa. La distanza tra gli anelli deve essere di poco minore della lunghezza della lastra. Se si esercita sul centro della lastra una pressione che cresce lentamente, uno degli anelli (o ambedue) si spacca e la lastra rimane intatta. Se al contrario si batte fortemente al centro della lastra con un'asta metallica pesante, è la lastra che si spacca e gli anelli rimangono intatti. Ciò che stupisce di più non è che la lastra si spacchi—si sarebbe spaccata anche in assenza di anelli, ma che siano rimasti intatti gli anelli di carta.

§ 19. *Teorema del moto del centro di massa*

Dato che nella meccanica non relativistica la massa è indipendente dalla velocità, la quantità di moto $\boldsymbol{p} = m_1\boldsymbol{v}_1 + m_2\boldsymbol{v}_2 + \ldots$ di un sistema può esser espressa in funzione della velocità del suo *centro di massa*. Si chiama *centro di massa* o *centro d'inerzia di un sistema*, un punto immaginario il cui raggio vettore $\boldsymbol{R}$ sia espresso per mezzo dei raggi vettori $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \ldots$ dei punti materiali secondo la formula

$$\boldsymbol{R} = \frac{m_1\boldsymbol{r}_1 + m_2\boldsymbol{r}_2 + \ldots}{m}, \tag{19.1}$$

dove $m = m_1 + m_2 + \ldots$ è la massa totale del sistema. Denotiamo questo punto con C.

Derivando l'espressione (19.1) rispetto al tempo e moltiplicando per m si ha

$$m\dot{\boldsymbol{R}} = m_1\dot{\boldsymbol{r}}_1 + m_2\dot{\boldsymbol{r}}_2 + \ldots,$$

ossia

$$m\boldsymbol{V} = m_1\boldsymbol{v}_1 + m_2\boldsymbol{v}_2 + \ldots,$$

dove $\boldsymbol{V} = \dot{\boldsymbol{R}}$ è la velocità del centro di massa del sistema. Si ottiene così

$$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{V}. \tag{19.2}$$

Portando (19.2) in (18.1) si ottiene

$$m\frac{d\boldsymbol{V}}{dt} = \boldsymbol{F}^{(e)}. \tag{19.3}$$

Ne deriva che il *centro di massa di un sistema si muove come un punto materiale la cui massa sarà uguale alla massa totale del sistema e la forza agente che determina il suo moto sarà uguale alla somma geometrica di tutte le forze esterne applicate al sistema*. Questa definizione porta il nome di *teorema del moto del centro di massa*.

Per illustrare questo risultato diamo l'esempio di un proiettile che descrive una parabola nel vuoto. Se in un certo momento il proiettile esplode, i suoi frammenti si disperdono in tutte le direzioni sotto l'azione delle forze interne. Ma il centro di massa delle schegge e dei gas, formati dalla defla-

grazione, continuerà il suo moto lungo una traiettoria parabolica come se la deflagrazione non ci fosse stata.

Il centro di masse di un sistema coincide con il suo *centro di gravità*, che è il punto d'applicazione di tutte le forze parallele che agiscono sui punti materiali di un sistema in un campo di gravitazione omogeneo. Perciò invece dei termini «centro di massa» o «centro d'inerzia», si può usare quello di «centro di gravità». Però nel teorema del moto del centro di massa, non è raccomandabile l'uso del termine «centro di gravità» poiché la gravitazione non vi è direttamente applicata. Il termine «centro di gravità» è usato nei corsi di meccanica razionale, soprattutto nei vecchi manuali. In fisica questo termine è obsoleto.

Nel caso di un sistema isolato $\boldsymbol{F}^{(e)} = 0$, l'equazione (19.3) si trasforma in $\frac{d\boldsymbol{V}}{dt} = 0$, da cui $\boldsymbol{V} = \text{cost}$. Il centro di massa di un sistema isolato effettua um moto rettilineo e uniforme. Il teorema resta valido in meccanica relativistica (vedere il problema 5 seguente).

Problemi

1. Sul fondo di una provetta sigillata, sospesa a un filo sopra una tavola, si trova una mosca la cui massa è uguale a quella della provetta; la distanza tra il fondo della provetta e la superficie della tavola è uguale alla lunghezza l della provetta. Si brucia il filo; durante la caduta della provetta la mosca vola dal fondo verso la sommità della provetta. Calcolare il tempo che impiega la provetta a toccare colla base la tavola.

Risposta. $t = \sqrt{\frac{l}{g}}$.

α
ω

Fig. 33.

b
B
E
D
A
C
a

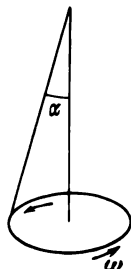
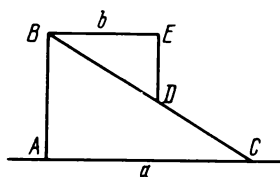



Fig. 34.

2. Un anello metallico, sospeso mediante un filo all'asse di una macchina centrifuga (fig. 33), ruota uniformemente a una velocità angolare ω. La direzione del filo forma un angolo α con l'asse. Determinare la distanza tra il centro dell'anello e l'asse di rotazione.

Risposta. $x = \frac{g \operatorname{tg} \alpha}{\omega^2}$.

3. Un'asta omogenea di lunghezza l ruota uniformemente attorno ad un asse libero, perpendicolare all'asta e passante per il suo centro. Quale deve essere la velocità angolare massima ω affinché l'asta non si spezzi a causa delle tensioni interne provocate dalla rotazione? La

forza di tensione massima riportata all'unità d'area della sezione retta dell'asta è uguale a T. La densità spaziale del materiale dell'asta è uguale a ρ (vedere anche il § 75, problema 4).

Risposta. $\rho l^2\omega^2 < 8T$.

4. Supponiamo di avere un cuneo ABC di massa M posto su di un piano orizzontale perfettamente liscio. Poniamo sulla faccia BC un cuneo simile BED, ma più piccolo, di massa m (fig. 34). Calcolare a quale distanza x si sposterà a sinistra il cono ABC, mentre il cono BED scivolerà lungo il piano inclinato BC fino a che il punto D coincida con il punto C. Le lunghezze AC e BE sono rispettivamente uguali ad a e b.

Risposta. $x = \dfrac{m}{M + m}(a - b)$.

5. Nel caso di un sistema costituito da particelle che si spostano a velocità relativistiche, il raggio vettore del suo centro di massa viene calcolato mediante le stesse formule della meccanica non relativistica, cioè

$$\boldsymbol{R} = \frac{\sum m_i \boldsymbol{r}_i}{\sum m_i}.$$

Le notazioni m_i indicano, però, le *masse relativistiche* delle particelle. Si devono prendere in considerazione anche le *masse dei campi* che assicurano le interazioni tra le particelle. Nel momento di interazione le particelle di una data specie possono sparire e possono apparire le particelle di una specie differente. La *posizione del centro di massa così definito cambia quando da un sistema di riferimento si passa a un altro, mobile rispetto al primo.* Se le particelle si possono considerare *puntiformi* e interagiscono tra loro solo nei *momenti dell'urto*, la totalità della massa sarà concentrata nelle particelle e non nei campi. Dimostrare, effettuando una derivazione diretta, che in questo caso la velocità del centro di massa del sistema isolato non varia nel tempo e si esprime con la formula

$$\dot{\boldsymbol{R}} = \sum m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i / \sum m_i = \boldsymbol{p} / \sum m_i,$$

dove $\boldsymbol{p}$ è l'impulso del sistema, la somma essendo estesa a tutte le particelle apparteneti al sistema. Come esempio si può portare il caso di un nucleo radioattivo in moto uniforme che si disintegra in volo; il centro di massa dei suoi frammenti continuerà esattamente lo stesso moto uniforme che aveva il nucleo, si muoverà quindi alla stessa velocità e nella stessa direzione.

§ 20. *Massa ridotta*

1. Consideriamo un sistema chiuso costituito da due punti materiali di massa m_1 e m_2 in interazione (fig. 35). Le equazioni del moto di questi punti si possono scrivere:

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}_1}{dt^2} = \frac{\boldsymbol{F}_1}{m_1}, \quad \frac{d^2\boldsymbol{r}_2}{dt^2} = \frac{\boldsymbol{F}_2}{m_2}. \tag{20.1}$$

In virtù della terza legge di Newton si deve avere $\boldsymbol{F}_1 = -\boldsymbol{F}_2$. Sottraendo queste due equazioni si ottiene

$$\frac{d^2}{dt^2}(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1) = \frac{\boldsymbol{F}_2}{m_2} - \frac{\boldsymbol{F}_1}{m_1} = \boldsymbol{F}_2\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right).$$

Questa equazione descrive il moto di un punto materiale rispetto ad un altro, dato che la differenza $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$ è il raggio-vettore che unisce questi

punti. Questo raggio-vettore definisce univocamente la posizione del secondo punto rispetto al primo. Introduciamo la definizione

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}, \quad \text{o} \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}. \tag{20.2}$$

Allora l'equazione precedente diventa

$$\mu \frac{d^2 \boldsymbol{r}}{dt^2} = \boldsymbol{F}_2. \tag{20.3}$$

Formalmente (20.3) è analoga all'espressione della seconda legge di Newton. Il ruolo di forza agente è assunto dalla forza $\boldsymbol{F}_2$ che agisce sul secondo punto materiale e quello della massa dalla grandèzza ausiliare μ detta *massa ridotta*.

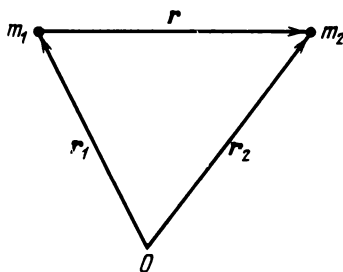



Fig. 35.

È chiaro che la sola equazione (20.3) non può essere equivalente alle due equazioni iniziali (20.1). Si può tuttavia associare all'equazione (20.3) l'equazione che esprime il teorema del moto del centro di massa del sistema. Nel caso considerato questo teorema afferma che il centro di massa del sistema è in moto rettilineo e uniforme. Quindi il problema del moto di due punti materiali si scinde in due problemi indipendenti: 1) quello del calcolo del moto uniforme del centro di massa e 2) quello del calcolo del moto relativo di un punto materiale rispetto ad un altro. Formalmente, quest'ultimo problema si riduce allo studio del moto di un punto materiale di massa μ nel campo di forze di un'altro punto. In questo modo si guistifica l'introduzione della nozione di massa ridotta: nozione che non ha altro significato fisico che quello di essere più comoda.

2. Per illustrate l'interesse che presenta l'introduzione della nozione di massa ridotta consideriamo un pianeta che descriva attorno al Sole un orbita circolare di raggio r. Conformemente alla legge della gravitazione universale, il pianeta è sottoposto alla forza $F = G\frac{Mm}{r^2}$, dove M è la massa del Sole, m quella del pianeta e G la costante di gravitazione. Dato che la forza è diretta verso il Sole, possiamo scrivere in forma vettoriale:

$$\boldsymbol{F} = -G\frac{Mm}{r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{r} = -G\frac{Mm}{r^3}\boldsymbol{r}.$$

Introduciamo la massa ridotta e riscriviamo l'equazione del moto del pianeta rispetto al Sole:

$$\mu \ddot{r} \equiv \frac{Mm}{M+m} \ddot{r} = F = -G \frac{Mm}{r^3} r,$$

da cui

$$\ddot{r} = -G \frac{M+m}{r^3} r.$$

Dato che la rotazione del pianeta è uniforme, si ha $\ddot{r} = -\omega^2 r$ e quindi

$$\omega^2 = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = G \frac{M+m}{r^3},$$

dove ω è la velocità angolare T il periodo di rotazione del pianeta. Se la massa del pianeta è trascurabilmente piccola rispetto a quella del Sole, la velocità angolare ω_1 e il suo periodo di. rotazione T_1 saranno dati dall'equazione

$$\omega_1^2 = \left(\frac{2\pi}{T_1}\right)^2 = G \frac{M}{r^3}.$$

Se la massa del pianeta fosse uguale alla massa del Sole (stella doppia), l'espressione della velocità angolare ω_2 e del periodo di rotazione T_2 sarebbe

$$\omega_2^2 = \left(\frac{2\pi}{T_2}\right)^2 = G \frac{2M}{r^3}.$$

Per una stessa distanza r si avrebbe

$$\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2 = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 = 2.$$

Questo equivale a dire che, nel secondo caso, il periodo di rotazione sarebbe $\sqrt{2}$ volte più breve che nel primo caso.

§ 21. *Moto dei corpi di massa variabile. Propulsione a reazione*

1. Il termine «*massa variabile*» che utilizziamo in questo paragrafo ha un significato del tutto diverso rispetto a quello che gli viene attribuito nella teoria della relatività. La massa del mobile, nella teoria della relatività, varia al variare della velocità, anche quando non vi sia aggiunta o perdita di altra massa, che a sua volta varia con la velocità. Il caso che vogliamo ora considerare, invece, tratta il moto lento di corpi la cui massa varia a causa di *una perdita* o di *una acquisizione* di nuova massa. Diamo qualche esempio: la massa di un innaffiatoio diminuisce perché l'acqua viene versata; la massa di una goccia di pioggia aumenta durante la caduta, se attraversa uno strato d'aria supersatura di vapori d'acqua; la massa di un razzo o di un aereo a reazione diminuisce per l'emissione dei gas prodotti dalla com-

bustione del carburante. In tutti questi casi si tratta del moto di corpi di massa variabile. Le equazioni del moto di questi corpi non presentano differenze di principio rispetto alle leggi di Newton, ma ne risultano da applicazioni più particolari. Ciò nondimeno esse hanno una grande importanza nella tecnica dei missili.

2. Per stabilire l'equiazione del moto di un punto materiale di massa variabile, consideriamo il moto di un missile. Il principio di funzionamento di un missile è assai semplice. Ogni missile espelle una sostanza (gas) a cui viene impressa una grande velocità. Quindi questo significa che il missile esercita una grande forza sul gas; la materia espulsa (gas), a sua volta, in virtù della terza legge di Newton, agisce con una forza, uguale in modulo ma di segno opposto, sul missile, e lo costringe ad accelerare. Se non sono presenti forze esterne, il missile ed i gas di scarico costituiranno un sistema isolato, il cui impulso è costante nel tempo. Questa in sintesi è la teoria del moto di un missile. È utile, tuttavia, generalizzare il problema supponendo che il missile sia sottoposto all'azione di forze esterne. Queste forze esterne possono essere la gravità terrestre, l'attrazione gravitazionale da parte del Sole o dei pianeti, così come la forza di resistenza che al moto del missile oppone il mezzo circostante nel quale esso si muove.

Supponiamo che $m(t)$ sia la massa del missile in un istante t e $\mathbf{v}(t)$ la sua velocità nello stesso istante: la quantità di moto del missile sarà uguale a $m\mathbf{v}$. Trascorso l'intervallo di tempo dt, la massa e la velocità del missile avranno incrementi dm e $d\mathbf{v}$ (il valore di dm essendo negativo), e la quantità di moto del missile diventerà uguale a $(m + dm)(\mathbf{v} + d\mathbf{v})$. Va inoltre aggiunta la quantità di moto dei gas di scarico prodotti durante l'intervallo di tempo dt. Essa è uguale a $dm_{gas}\mathbf{v}_{gas}$, dove dm_{gas} è la massa del gas prodotto nel tempo dt e $\mathbf{v}_{gas}$ è la loro velocità. Sottraendo dalla quantità di moto totale nell'istante $t + dt$ la quantità di moto del sistema nell'istante t si ottiene il valore dell'incremento di questa grandezza nel tempo dt. Secondo un noto teorema questo incremento è uguale a $\mathbf{F}dt$, dove $\mathbf{F}$ è la somma geometrica di tutte le forze esterne applicate al missile. Quindi

$$(m + dm)(\mathbf{v} + d\mathbf{v}) + dm_{gas}\mathbf{v}_{gas} - m\mathbf{v} = \mathbf{F}dt.$$

Facciamo tendere a zero l'intervallo di tempo dt e contemporaneamente gli incrementi dm e $d\mathbf{v}$ per calcolare il limite dei rapporti ovvero le derivate $\frac{dm}{dt}$ e $\frac{d\mathbf{v}}{dt}$. Apriamo le parentesi e trascuriamo il prodotto $dm \cdot d\mathbf{v}$ poiché è un infinitesimo d'ordine superiore. Quindi, dato che si conserva la massa totale si ha: $dm + dm_{gas} = 0$, e si può sostituire dm alla massa dei gas dm_{gas}. La differenza $\mathbf{v}_{rel} = \mathbf{v}_{gas} - \mathbf{v}$ rappresenta la velocità relativa dei gas rispetto al missile; la chiameremo *velocità del getto di gas*. Tenendo conto

di queste osservazioni, la relazione precedente si trasforma in

$$m\,dv = v_{\text{rel}}\,dm + F\,dt. \tag{21.1}$$

Quindi, dividendo per dt, si ottiene

$$m\frac{dv}{dt} = v_{rel}\frac{dm}{dt} + F. \tag{21.2}$$

Nella forma l'equazione (21.2) coincide con l'equazione che esprime la seconda legge di Newton, con una sola differenza: la massa m non è costante, ma varia nel tempo a causa dell'espulsione di materia. Alla forza esterna F viene aggiunto il termine supplementare $v_{\text{rel}}\dfrac{dm}{dt}$, che può essere interpretato come une *forza di reazione*, cioè, come la forza esercitata sul missile dai gas di scarico. L'equazione (21.2) è stata ottenuta dal fisico russo V. V. Meščerskij (1859-1835). Questa equazione, così come l'equazione (21.1) che le è equivalente, si chiama *equazione di Mescerskij* o *equazione del moto di un punto di massa variabile.*

3. Applichiamo l'equazione (21.1) allo studio del moto di un missile sottratto all'azione di ogni forza esterna. Ponendo $F = 0$, si ottiene

$$m\,dv = v_{\text{rel}}\,dm.$$

Supponiamo che il missile si muova con moto rettilineo in direzione opposta a quella della velocità v_{rel} del getto di gas. Se il senso del volo è preso come direzione positiva, la proiezione del vettore v_{rel} su questa direzione sarà negativa e uguale a $-v_{\text{rel}}$. È per questo che la forma scalare dell'equazione sopra indicata è $m\,dv = -v_{\text{rel}}\,dm$, e per la convenzione adottata la grandezza v_{rel} è essenzialmente positiva. Quindi

$$\frac{dv}{dm} = -\frac{v_{\text{rel}}}{m}. \tag{21.3}$$

La velocità v_{rel} del getto di gas può variare durante il volo, ma il caso più semplice e più importante è quello in cui essa è costante. Ponendo v_{rel} = cost, non si toglie nulla alle caratteristiche essenziali del fenomeno e si semplifica notevolmente la soluzione dell'equazione (21.3). Si ha in effetti

$$v = -v_{\text{rel}}\int\frac{dm}{m} = -v_{\text{rel}}\ln m + C.$$

Il valore della costante d'integrazione C è determinato dalle condizioni iniziali. Se si suppone che nell'istante iniziale la velocità del missile sia nulla e la sua massa sia uguale a m_0, l'equazione sopraindicata ci dà $0 = -v_{\text{rel}}\ln m_0 + C$, da cui $C = v_{\text{rel}}\ln m_0$. Quindi

$$v = v_{\text{rel}}\ln\frac{m_0}{m}, \tag{21.4}$$

ossia

$$\frac{m_0}{m} = e^{v/v_{rel}}. \tag{21.5}$$

Quest'ultima relazione, chiamata *equazione di Tsiolkovskij* (1857-1935), è stata stabilita per il moto non relativistico, quando le velocità v e v_{rel} sono piccole rispetto alla velocità c della luce nel vuoto. Ma è facile generalizzarla nel caso del moto relativistico. Se m_0 e m indicano le masse a riposo del missile in istanti differenti, appare evidente anche senza calcoli che la formula (21.5) presenta un valore troppo basso per il rapporto $\frac{m_0}{m}$, poiché la massa relativistica cresce con la velocità. Quindi, a uguale consumo di carburante, un missile «relativistico» avrebbe una velocità minore di quella data dalla formula non relativistica (21.5). La formula relativistica si scrive

$$\frac{m_0}{m} = \left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right)^{\frac{c}{2v_{rel}}} \tag{21.6}$$

(si veda problema 2 alla fine del § 22). In questa formula $\beta \equiv \frac{v}{c}$. Per $\beta \ll 1$ e $\frac{v_{rel}}{c} \ll 1$, la formula (21.6) si trasforma nella formula (21.5). Infatti si ha allora

$$\frac{1+\beta}{1-\beta} \approx 1 + 2\beta$$

e, dunque

$$\frac{m_0}{m} \approx (1+2\beta)^{\frac{c}{2v}\frac{v}{v_{rel}}} = (1+2\beta)^{\frac{1}{2\beta}\frac{v}{v_{rel}}}.$$

Dato che il valore 2β è piccolo

$$(1+2\beta)^{1/(2\beta)} \approx \lim_{\beta \to 0} (1+2\beta)^{1/(2\beta)} = e.$$

In definitiva per velocità bassa si ha

$$\frac{m_0}{m} = e^{v/v_{rel}}$$

cioè, la formula (21.5).

4. La formula di Tsiolkovskij permette di calcolare la quantità di carburante necessario per fornire al missile una velocità data v. Nella tavola 1 vengono indicati i valori del ropporto tra la massa iniziale m_0 del missile e la sua massa finale m per differenti valori del rapporto v/v_{rel}. Questi risultati sono ottenuti facendo uso della formula non relativistica (21.5).

Supponiamo, per esempio, che un missile debba raggiungere la *prima velocità cosmica*, cioè, la velocità che deve possedere per poter descrivere

Tavola 1

v/v_{rel}	m_0/m	v/v_{rel}	m_0/m	v/v_{rel}	m_0/m	v/v_{rel}	m_0/m
1	2,72	4	54,6	7	1100	10	22000
2	7,39	5	148	8	2980	11	59900
3	20,1	6	403	9	8100	12	163000

una traiettoria circolare attorno alla Terra. Questa velocità è approssimativamente uguale a $v = 8$ km/s. Se la velocità di scarico gassoso è $v_{rel} = 1$ km/s, il rapporto m_0/m sarà uguale a 2980. Praticamente tutta la massa del missile deve essere costituita dal carburante. Se $v_{rel} = 2$ km/s, il rapporto $m_0/m = 54{,}6$ e per $v_{rel} = 4$ km/s, $m_0/m = 7{,}39$, ecc. Ne deriva che la massa utile relativa del missile cresce rapidamente con la velocità v_{rel} dello scarico gassoso. I gas espulsi dal missile devono avere la minima massa molecolare possibile ad essere portati alla temperatura più alta raggiungibile. Viene dimostrato in fisica molecolare che la velocità v_{rel} di un getto di gas è proporzionale a $\sqrt{\frac{T}{\mu}}$, dove T è la temperatura assoluta del gas e μ il suo peso molecolare.

Nei missili moderni con propulsione a base di carburante chimico la velocità dello scarico gassoso varia da 1 a qualche chilometro al secondo. Probabilmente essa non supera i 4 km/s. Conviene, quindi, valutare se esiste la possibilità di voli interplanetari e interstellari a bordo di navi apaziali con propulsione a base di carburanti chimici. La velocità minima che deve avere un missile rispetto alla Terra per poter uscire dalla zona d'azione del campo di gravità terrestre porta il nome di *seconda velocità cosmica* ed è uguale a 11,2 km/s. È la velocità che deve avere un missile destinato a raggiungere la Luna. Si chiama *terza velocità cosmica* la velocità che deve avere un missile rispetto alla Terra per poter uscire dal sistema solare; questa velocità dipende dalla direzione della velocità iniziale del missile. Il suo valore minimo corrisponde al lancio di un missile lungo la tangente all'orbita terrestre nel senso di rotazione orbitale della Terra. Questa velocità è di circa 16,7 km/s (veda il § 61). Una velocità di questo ordine è necessaria per poter intraprendere un volo interplanetario. Supponiamo $v_{rel} = 4$ km/s. Allora per raggiungere la seconda velocità cosmica il rapporto m_0/m deve essere uguale a $m_0/m = e^{11,2/4} \approx 17$; e per raggiungere la terza velocità cosmica $m_0/m = e^{16,7/4} \approx 64$. Questi due rapporti appaiono accettabili, ma si deve tener conto del fatto che il missile deve avere una riserva di carburante sufficiente per tornare sulla Terra, ed anche per poter effettuare eventuali correzioni di traiettoria ed assicurare la frenata nel momento dell'atterraggio. Quindi il rapporto m_0/m (m è la massa del missile tornato sulla Terra) deve essere assai più grande. Ammettiamo che il campo di gra-

vitazione e la dimensione del pianeta da raggiungere siano dello stesso ordine di grandezza di quelle della Terra; per il volo di andata si deve avere $m_0/m' \approx 60$ (m' la massa del missila una volta atterrato sul secondo pianeta) e per il volo di ritorno $m'/m \approx 60$, ciò vuol dire $m_0/m \approx 3600$. Quindi, perché un volo interplanetario sia possibile. In riserva di carburante deve essere alcune migliaia di volte maggiore della massa della nave spaziale. Un simile volo comporterebbe enorme difficoltà, che però appaiono superabili.

Tuttavia per i voli interstellari il carburante chimico è assolutamente inutilizzabile. Supponiamo, per essempio, $v_{rel} = 10$ km/s, il che è superiore alle possibilità che offrono i carburanti chimici. (Ammettendo che il getto gassoso sia costituito dalla sostanza più leggera di tutte—l'idrogeno atomico, la sua temperatura dovrebbe raggiungere 5000°C per arrivare alla velocità postulata). La distanza dalle stelle viene misurata in *anni-luce*, poiché per arrivare fino a noi la luce della stella più vicina impiega circa 4 anni-luce. Anche per raggiungere la stella più vicina si deve perciò disporre di navi spaziali che abbiano una velocità vicina a quella della luce c. Vengono indicati nella tavola 2 i valori di rapporto m_0/m nel caso di differenti valori di β calcolati per mezzo della formula relativistica (21.6) e della formula di Tsiolkovskij (21.5) nell'ipotesi che $v_{rel} = 10$ km/s. La tavola evidenzia, tra l'altro, in quale momento gli effetti relativistici diventono essenziali e quando la formula (21.5) diventa inutilizzabile.

Supponiamo che la velocità v della nave spaziale debba essere uguale a un quarto della velocità della luce ($\beta = 0{,}25$). Si deve allora avere $m_0/m \approx 5 \cdot 10^{3327}$. Ad ogni tonnellata di carico utile bisognerebbe avere $5 \cdot 10^{3327}$ tonnellate di combustibile! Se la massa utile fosse di $m = 20\ t = 2 \cdot 10^7$ g, la massa iniziale della nave dovrebbe assere uguale a $m_0 \approx 10^{3329}$ t $= 10^{3335}$ g! Generalmente quando si tratta di grandezze enormi esse vengono definite «*astronomiche*». Nel nostro caso questa definizione non è appropriata, perché abbiamo ottenuto valori di grandezza incomparabilmente più grande. A titolo d'esempio riportiamo le masse di alcune

Tavola 2

$\beta = \frac{v}{c}$	m_0/m	
	secondo la formula (21.6)	secondo la formula (21.5)
0,001	$1{,}0690 \cdot 10^{13}$	$1{,}0686 \cdot 10^{13}$
0,01	$1{,}963 \cdot 10^{130}$	$1{,}942 \cdot 10^{130}$
0,1	$1{,}79 \cdot 10^{1307}$	$7{,}64 \cdot 10^{1302}$
0,25	$5{,}37 \cdot 10^{3327}$	$1{,}62 \cdot 10^{3257}$
$\frac{1}{3}$	$2{,}84 \cdot 10^{4515}$	$8{,}81 \cdot 10^{4342}$

particelle e di oggetti astronomici:

Massa dell'elettrone $9{,}11 \cdot 10^{-28}$g
Massa del protone $1{,}67 \cdot 10^{-24}$ g
Massa della Terra $5{,}98 \cdot 10^{27}$ g
Massa del Sole $1{,}99 \cdot 10^{33}$ g
Massa della Galassia $3 \cdot 10^{44}$ g
Massa della Metagalassia 10^{56} g.

Per *Metagalassia* si intende la parte dell'*Universo* osservabile per mezzo dei più potenti telescopi moderni. La massa della Metagalassia è 10^{83} volte più grande di quella dell'elettrone. La massa della nostra fantastica nave spaziale compreso il combustibile sarebbe 10^{3329} volte più grande di quella della Metagalassia! Queste cifre superano ogni immaginazione. Rispetto alla nostra nave spaziale la Metagalassia apparirebbe infinitamente più piccola dell'elettrone rispetto alla Metagalassia.

Evidentemente è assurdo parlare del moto di una nave talmente gigantesca rispetto alla Metagalassia, avendo quest'ultima dimensioni del tutto trascurabili rispetto alla nave. Sarebbe un'estrapolazione inammissibile tentare di studiare il comportamento di oggetti così enormi per mezzo delle usuali leggi della fisica. Il nostro esempio serve per dimostrare che per i voli interstellari le navi a carburante chimico sono assolutamente inutilizzabili.

Sarebbe però imprudente affermare sulla base di questa conclusione che i mondi stellari resteranno per sempre inaccessibili ai cosmonauti terrestri. Solo un avvenire lontano potrà dare una risposta a questo problema. Non avendo nessuna intenzione di ricamare su questo tema fantastico, vogliamo solo fare qualche osservazione. Per trasformare un missile in *una nave interstellare*, si deve prima di tutto aumentare la velocità v_{rel} dello scarico fino a raggiungere un valore poco inferiore a quello della velocità della luce. Nel caso ideale si avrebbe $v_{rel} = c$. Si tratterebbe allora di *un missile fotonico*, dove il getto gassoso sarebbe sostituito da un fascio luminoso emesso dal motore della nave in una direzione determinata. In un missile fotonico la forza di reazione che lo farebbe avanzare sarebbe la pressione luminosa applicata al missile durante l'emissione del fascio luminoso. La conversione della materia in radiazione si produce costantemente nelle stelle. Il medesimo processo è realizzabile non soltanto nei laboratori terrestri, ma persino su scala più grande (bombe atomiche e all'idrogeno). È possibile impadronirsi di questi processi al punto di applicarli ai missili fotonici? È un'interrogativo del tutto prematuro.

Problemi

1. Per chiarirci le idee sulla portata delle leggi che descrivono il moto dei missili sarebbe utile immaginare un missile che espella una sostanza non in modo continuo, ma a porzioni uguali e discrete, di massa finita Δm. Supponiamo che ad ogni scarico le porzioni di sostanza

espulsa acquistino tutte la stessa velocità v_{rel} rispetto al missile, diretta all'indietro. Determinare la velocità v_N del missile dopo N scarichi di sostanza, sapendo che la massa iniziale del missile è uguale a m_0. Dimostrare che nel caso limite, quando $\Delta m \to 0$ e $N \to \infty$, mantenendo il prodotto $N\Delta m$ costante, l'espressione ottenuta per v_N si riduce alla formula di Tsiolkovskij; considerare solo velocità non relativistiche.

Soluzione. Supponiamo che $v_1, v_2, \ldots$ siano le velocità del missile dopo il primo, il secondo, ... getto del gas. Secondo la legge di conservazione dell'impulso $(m_0 - \Delta m)v_1 + \Delta m \cdot w = 0$, dove w è la velocità della massa della sostanza espulsa la prima volta. È evidente che $v_{rel} = v_1 - w$.

Eliminando w, si ottiene

$$v_1 = \frac{\Delta m}{m_0} v_{rel}. \tag{21.7}$$

Calcoliamo ora v_2. Nel sistema di riferimento che si mouve alla velocità v_1, il missile, prima del secondo getto, è immobile, mentre dopo il secondo getto del gas acquista una velocità uguale a $v_2 - v_1$. Quindi si può utilizzare la formula (21.7), facendo la sostituzione $m_0 \to m_0 — \Delta m$ e $v_1 \to v_2 — v_1$:

$$v_2 - v_1 = \frac{\Delta m}{m_0 -. \Delta m} v_{rel}.$$

Combinando questa relazione con (21.7) si ottiene v_2. Continuando così, si arriva agevolmente alla formula

$$v_N = \left[\frac{\Delta m}{m_0} + \frac{\Delta m}{m_0 - \Delta m} + \ldots + \frac{\Delta m}{m_0 - (N - 1)\Delta m} \right] v_{rel}.$$

Passando al limite, $\Delta m \to 0$, $N \to \infty$ e $m_0 - (N - 1)\Delta m \to m$, la somma tra parentesi quadre si trasforma in un integrale, e cioè

$$v = v_{rel} \int_m^{m_0} \frac{dm'}{m'},$$

dove m è la massa finale del missile. Dopo l'integrazione si riottiene la formula di Tsiolkovskij (21.5).

2. Trovare una relazione tra la massa $m(t)$ di un missile, la sua velocità finale $v(t)$ e il tempo t nel caso di lancio verticale nel campo gravitazionale terrestre. Considerare che la velocità del getto di gas rispetto al missile v_{rel} sia costante. Non prendere in considerazione la resistenza dell'aria, né la variazione di accelerazione della forza di gravità g con l'altitudine. Calcolare quale deve essere la massa $\mu(t)$ di gas espulsa in un secondo, affinché il missile resti immobile nel campo di gravità.

Soluzione. Riscriviamo l'equazione di moto del missile

$$m \frac{dv}{dt} = -v_{rel} \frac{dm}{dt} - mg$$

nella forma

$$m \frac{d}{dt}(v + gt) = -v_{rel} \frac{dm}{dt},$$

ossia

$$\frac{d(v + gt)}{dm} = - \frac{v_{rel}}{m}.$$

Questa equazione ha la stessa forma della (21.3), se, come incognita, si considera la quantità $v + gt$. Si può quindi utilizzare la formula (21.5) sostituendo v con $v + gt$:

$$\frac{m_0}{m} = e^{\frac{v + gt}{v_{rel}}}, \; v = v_{rel} \ln \frac{m_0}{m} - gt.$$

È evidente che la grandezza μ è uguale a $-\frac{dm}{dt}$. Essa si ottiene osservando che per il missile immobile $\frac{dv}{dt} = 0$:

$$\mu = -\frac{dm}{dt} = \frac{m_0 g}{v_{rel}} e^{-gt/v_{rel}}.$$

3. Supponiamo che una nave spaziale si muova ad una velocità costante v. Per cambiare direzione di volo, si metta in azione un motore che espelle, in direzione perpendicolare alla traiettoria, un getto gassoso con velocità v_{rel} rispetto alla nave. Calcolare l'angolo α di cui ruoterà il vettore velocità della nave, se la sua massa iniziale è m_0 e la sua massa finale m.

Soluzione. Il valore assoluto dell'accelerazione della nave spaziale è uguale a $\omega^2 r = \omega v$, con $v = \text{cost}$. Quindi, l'equazione del moto

$$m\frac{dv}{dt} = v_{rel}\frac{dm}{dt}$$

si trasforma in $mv\omega dt = -v_{rel}dm$. Osservando che $d\alpha = \omega dt$ è l'angolo di rotazione nel tempo dt, si ottiene dopo integrazione

$$\alpha = \frac{v_{rel}}{v} \ln \frac{m_0}{m}.$$

4. Una nave spaziale in volo in una regione dello spazio dove non esiste campo gravitazionale deve invertire la direzione di moto, conservando la stessa velocità. Per realizzare la manovra, vengono suggeriti due procedimenti:

1) arrestare la nave, poi rilanciarla finché non raggiunga la velocità precedente; 2) far virare la nave, lungo un arco di cerchio, comunicandole una accelerazione laterale. In quale caso il consumo di carburante sarà minore? Considerare che la velocità del getto di gas rispetto alla nave è costante e uguale in ambedue i casi.

Risposta. Il primo procedimento è più economico.

5. Calcolare il rendimento di una nave spaziale, cioè, il rapporto tra l'energia cinetica K acquistata dal missile e la quantità di calore Q prodotta dalla combustione di carburante. La velocità, acquistata dal missile, $v = 9$ km/s; il calore di combustione di carburante $q = 4000$ Kcal/kg; la velocità di scarico dei prodotti di combustione rispetto al missile $u = 3$ km/s.

Risposta. $\frac{K}{Q} = \frac{v^2}{2q(e^{v/u} - 1)} \approx 13\%.$

6. Il gas di combustione viene espulso con una velocità $u = 3$ km/s rispetto al missile. Trovare il rapporto tra la sua energia cinetica K_{miss} e l'energia cinetica K_{gas} dei prodotti di combustione nell'istante in cui la velocità del missile diventa uguale a $V_{fin} = 12$ km/s.

Soluzione. L'incremento della velocità v del missile è legato alla diminuzione della sua massa m dalla relazione $m\,dv = v_{rel}dm$. Passando alla forma scalare e utilizzando nuovi simboli, scriviamo questa relazione nella forma: $m\,dv = -u\,dm$ con $dm = -dm_{gas}$, dove m_{gas} è la massa di gas espulsi. L'incremento dell'energia cinetica del gas è

$$dK_{gas} = -\frac{1}{2}dmv_{gas}^2 = \frac{mv_{gas}^2}{2u}dv.$$

Introducendo $v_{gas} = v - u$ ed applicando la formula di Tsiolkovskij (21.5), si ottiene

$$dK_{gas} = -\frac{m_0}{2u}(u - v)^2e^{-v/u}dv,$$

e dopo l'integrazione

$$K_{gas} = \frac{m_0u^2}{2}(1 - e^{-x} - x^2e^{-x}),$$

dove $x = v_{fin}/u$. L'energia cinetica del missile è

$$K_{miss} = 1/2mv_{fin}^2 = 1/2m_0u^2x^2e^{-x}.$$

In definitiva

$$\eta \equiv \frac{K_{miss}}{K_{gas}} = \frac{x^2}{e^x - (1 + x^2)}.$$

Con $x = 4$, $\eta = 45\%$.

7. Un missile a due stadi viene lanciato dalla superficie della Luna. Quale deve essere il rapporto di massa tra il primo (m_1) e il secondo (m_2) stadio, affinché la velocità del contenitore che porta il carico utile (di massa m) sia massima? La velocità del getto di gas u nei motori dei due stadi è la stessa ed è costante. I rapporti tra la massa di carburante e la massa di ciascuno dei due stadi sono rispettivamente α_1 e α_2. La separazione successiva degli stadi a propulsione e del contenitore avviene senza che compaiano impulsi supplementari.

Soluzione. Trascuriamo la forza gravitazionale della luna poiché, diminuendo l'energia cinetica del sistema, essa non incide sulla condizione di massimo. Prendiamo come unità di massa la massa totale del missile nell'istante del suo lancio:

$$m_1 + m_2 + m = 1. \tag{21.8}$$

Consumato il carburante del primo stadio, la massa del sistema diminuerà di α_1m_1. Se in quel momento la velocità del missile è v_1, secondo la formula di Tsiolkovskij si ottiene

$$e^{v_1/u} = \frac{1}{(1 - \alpha_1)m_1 + m_2 + m}.$$

La massa $(1 - \alpha_1)m_1$ si separa e il motore del secondo stadio entra in azione. Consumato tutto il carburante del secondo stadio, la velocità del missile aumenterà di v_2, quindi

$$e^{v_2/u} = \frac{m_2 + m}{(1 - \alpha_2)m_2 + m}.$$

Per rendersene conto è sufficiente adottare un sistema di riferimento rispetto al quale il missile è immobile nell'istante in cui il primo stadio si separa. Per calcolare la velocità totale del missile è sufficiente moltiplicare membro a membro le due ultime equazioni e prendere il logaritmo del risultato ottenuto. Eliminando la massa m_2 mediante la (21.8), si ottiene

$$\frac{v}{u} = \ln(1 - m_1) - \ln(1 - \alpha_1m_1) - \ln[(1 - \alpha_2)(1 - m_1) + \alpha_2m].$$

Qui m ed u hanno il ruolo di parametri costanti e m_1 quello della variabile da cui dipende la velocità v. Derivando rispetto a m_1 ed uguagliando a zero la derivata si ottiene la condizione di

massimo

$$\frac{1}{m_1 - 1} + \frac{1}{\beta - m_1} + \frac{1}{\gamma - m} = 0, \tag{21.9}$$

con le relazioni

$$\beta = \frac{1}{\alpha_1}, \quad \gamma = 1 + \frac{\alpha_2}{1 - \alpha_2} m.$$

La condizione (21.9) porta ad una equazione di secondo grado rispetto a m_1, la cui soluzione risulta

$$m_1 = 1 - \sqrt{1 + (\beta\gamma - \beta - \gamma)}.$$

Il segno negativo posto davanti al radicale deriva dal fatto che il problema implica che $0 < m_1 < 1$. Tramite (21.8) si calcola la massa m_2, quindi il rapporto cercato m_2/m_1. Riprendendo i parametri iniziali α_1 e α_2, si ottiene

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{\sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\frac{1 - \alpha_1}{1 - \alpha_2}} - \sqrt{m}}{1 - \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\frac{1 - \alpha_1}{1 - \alpha_2} m}} \sqrt{m}. \tag{21.10}$$

La soluzione ha senso se si verifica la condizione

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\frac{1 - \alpha_1}{1 - \alpha_2} m < 1.$$

Questa condizione si verifica in condizioni reali quando $m \ll 1$ ed i parametri α_1 ed α_2 non sono troppo differenti. Se $\alpha_1 = \alpha_2$ la formula si semplifica:

$$\frac{m_2}{m_1} = \sqrt{m}. \tag{21.11}$$

IV. LAVORO ED ENERGIA

§ 22. *Il lavoro ed energia cinetica*

1. Si chiama *lavoro di una forza* F il prodotto della proiezione F_s di questa forza nella direzione di spostamento del suo punto di applicazione *per il modulo* ds *dello spostamento*:

$$dA = F_s ds = F ds \cos\alpha, \tag{22.1}$$

dove α è l'angolo tra i vettori F e ds (fig. 36). Supponendo che lo spostamento ds sia infinitamente piccolo, la grandezza dA viene chiamata *lavoro elementare* per distinguerla dal *lavoro effettuato al termine dello spostamento finito*. Ricorrendo alla nozione di prodotto scalare, si potrebbe dire che il *lavoro elementare* dA è il prodotto scalare della forza F per lo spostamento ds:

$$dA = (F ds). \tag{22.2}$$

In generale se un punto materiale percorre un tratto di lunghezza finita su una traiettoria qualsiasi, si può suddividere mentalmente questo tratto in tratti elementari infinitesimi, lungo i quali la forza F può essere considerata costante e il lavoro elementare corrispondente sarà calcolato secondo la formula (22.1) o (22.2). Sommando questi differenti lavori elementari, e facendo tendere a zero le lunghezze degli spostamenti elementari ed il loro numero all'infinito, si arriva al limite che viene espresso col simbolo

$$A = \int_L (F ds) \tag{22.3}$$

e che viene chiamato *integrale curvilineo* del vettore F lungo la traiettoria L. Per definizione, quest'integrale rappresenta il *lavoro della forza F lungo la curva L.*

Se $F = F_1 + F_2$, la proiezione di questa equazione vettoriale nella direzione di spostamento elementare ds porta a $F_s = F_{1s} + F_{2s}$; moltiplicando per ds: $F_s ds = F_{1s} ds + F_{2s} ds$, ossia

$$dA = dA_1 + dA_2. \tag{22.4}$$

Quindi, il *lavoro elementare della risultante di due o di molte forze è uguale alla somma dei loro lavori elementari*. È evidente che questa affermazione

si applica anche ai lavori effettuati per spostamenti di lunghezza finita:

$$A = A_1 + A_2. \tag{22.5}$$

Nel sistema SI, l'unità di lavoro è il joule (J). Il *joule* è il lavoro compiuto dalla forza di 1 newton per compiere lo spostamento di 1 metro nella direzione della forza. Nel sistema C.G.S. l'unità di lavoro è l'erg. L'*erg* è il

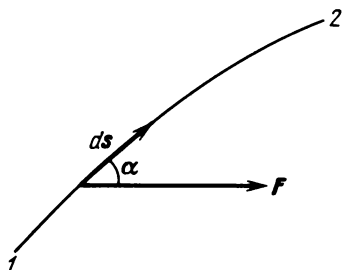
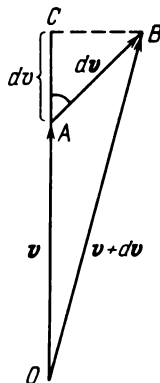



Fig. 36. Fig. 37.

lavoro compiuto dalla forza di 1 dina per ottenere lo spostamento di 1 cm. È evidente che

$$1\ \text{J} = 10^7\ \text{erg}.$$

Il lavoro riportato all'unità di tempo, cioè la grandezza

$$P = \frac{dA}{dt}, \tag{22.6}$$

viene chiamato *potenza*. Le unità di misura della potanza sono l'erg per secondo e il joule per secondo o watt (W). È evidente che

$$1\ \text{W} = 10^7\ \text{erg/s}.$$

Portando nella formula (22.3) $\boldsymbol{F} = \frac{d\boldsymbol{p}}{dt}$ e $d\boldsymbol{s} = \boldsymbol{v}\,dt$, si può scrivere

$$A = \int (\boldsymbol{v}\,d\boldsymbol{p}). \tag{22.7}$$

2. Per calcolare quest'integrale si deve conoscere la relazione tra la velocità $\boldsymbol{v}$ del punto materiale e il suo impulso $\boldsymbol{p}$. Per definizione, l'impulso $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$; dato che nella meccanica non relativistica la massa m non dipende dalla velocità, si può scrivere $\boldsymbol{v}\,d\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}\,d\boldsymbol{v}$. Qui il vettore $d\boldsymbol{v}$ rappresenta l'incremento elementare del vettore $\boldsymbol{v}$, con la particolarità che la direzione di questo incremento non coincide necessariamente con quella del vetto-

re $\mathbf{v}$ (fig. 37). Se conveniamo di denotare con v il modulo del vettore $\mathbf{v}$, si avrà evidentemente $\mathbf{v}^2 = v^2$. In effetti, a destra figura il prodotto scalare del vettore $\mathbf{v}$ per se stesso e questo è uguale al quadrato del modulo del vettore, come deriva dalla definizione di prodotto scalare. Derivando i due membri dell'uguaglianza $\mathbf{v}^2 = v^2$ si ottiene $\mathbf{v}\,d\mathbf{v} = v\,dv$. Qui dv è l'incremento elementare del modulo del vettore $\mathbf{v}$, che non si deve confondere con il modulo dell'incremento elementare del vettore, cioè con la quantità $|d\mathbf{v}|$. Quest'ultima quantità è, per suo stesso significato, essenzialmente positiva, mentre l'incremento dv può essere positivo o negativo. Nella figura 37, $d\mathbf{v} = \overrightarrow{AB}$, $dv = AC$. Per definizione di prodotto scalare, $\mathbf{v}\,d\mathbf{v} = v \cdot AB \cos\alpha = v \cdot AC = v\,dv$. Questo costituisce un'altra giustificazione dell'uguaglianza $\mathbf{v}\,d\mathbf{v} = v\,dv$. È chiaro che questa relazione è valida non soltanto per il vettore $\mathbf{v}$, ma per un vettore qualsiasi. Utilizziamo questa relazione nel caso in esame; portiamo il fattore costante m fuori dal segno d'integrazione

$$A_{12} = m \int_{v_1}^{v_2} v\,dv = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2},$$

dove v_1 è la velocità iniziale e v_2 la velocità finale del punto materiale. Abbiamo attribuito alla lettera A gli indici 1 e 2 per sottolineare che si tratta del lavoro effettuato per spostare il punto materiale dalla sua posizione iniziale 1 alla sua posizione finale 2 (cfr. fig. 36). La quantità

$$K = \frac{mv^2}{2} = \frac{p^2}{2m} \qquad (22.8)$$

si chiama *energia cinetica del punto materiale*. Per mezzo di questa nozione il risultato sopraindicato verrà scritto nella forma

$$A_{12} = K_2 - K_1. \qquad (22.9)$$

Quindi, il *lavoro prodotto da una forza per spostare un punto materiale è uguale all'incremento della sua energia cinetica*. È questo teorema che, esprimendo la relazione tra il lavoro e l'energia cinetica, quistifica l'introduzione di queste due nozioni.

3. È facile generalizzare i risultati ottenuti al caso di un qualunque sistema di punti materiali. L'*energia cinetica d'un sistema* è la somma delle energie cinetiche dei punti materiali che lo costituiscono o dei punti materiali che risultano da una ipotetica suddivisione di questo sistema. Scriviamo la relazione (22.9) per ciascun punto materiale del sistema e addizioniamo tutte queste relazioni. Ritroviamo di nuovo la formula (22.9) che sarà valida non solo per un punto materiale, ma anche per un sistema di punti. Si deve intendere per A_{12} la somma dei lavori di tutte le forze, interne ed esterne, applicate ai punti materiali del sistema. Quindi, il *lavoro di tutte le forze applicate a un sistema di punti materiali è uguale all'incremento dell'energia cinetica del sistema*.

Questo teorema si distingue notevolmente da un altro teorema che stabilisce una correlazione tra l'impulso della forza e la variazione della quantità di moto del sistema (cfr. il § 18). In virtù dell'identità tra azione e reazione, le forze interne non modificano la quantità di moto dell'intero sistema. L'incremento della quantità di moto del sistema è dovuto soltanto alle *forze esterne* applicate al sistema. La situazione risulta diversa nel caso dell'energia cinetica. In generale, il lavoro delle forze interne non è nullo. Consideriamo, ad esempio, un sistema chiuso costituito da due punti materiali tra i quali si esercitano forze di attrazione mutua $\boldsymbol{F}_1$ e $\boldsymbol{F}_2$. Se questi punti si mettono in moto per avvicinarsi uno all'altro, ciascuna della forze $\boldsymbol{F}_1$ e $\boldsymbol{F}_2$ effettuerà un lavoro positivo. Anche il lavoro totale fornito sarà allora positivo e sarà utilizzato per aumentare l'energia cinetica del sistema. Questa variazione di energia cinetica sarà prodotta dalle sole forze interne. Ne deriva, che l'*incremento di energia cinetica viene determinato dal lavoro prodotto sia dalle forze esterne che da quelle interne.*

4. Il teorema che abbiamo dimostrato per un punto materiale resta valido anche nella meccanica relativistica a condizione di modificare l'espressione dell'energia cinetica. Nella meccanica relativistica la formula (22.7) è pure valida, ma nel calcolarne l'integrale (22.7) si dovrà tener conto della dipendenza della massa dalla velocità. La massa viene espressa allora dalla formula

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \,.$$

Introducendo $v = p/m$ e elevando la formula al quadrato si ottiene

$$p^2 + (m_0c)^2 = (mc)^2. \tag{22.10}$$

Derivando questa relazione si trova

$$p\,dp = c^2 m\,dm.$$

Dato che $p\,dp = \boldsymbol{p}\,d\boldsymbol{p}$ e $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$, si scrive

$$\boldsymbol{v}\,d\boldsymbol{p} = c^2 dm.$$

Quindi

$$A_{12} = \int \boldsymbol{v}\,d\boldsymbol{p} = \int_{m_1}^{m_2} c^2 dm.$$

da cui

$$A_{12} = c^2(m_2 - m_1) = c^2 \Delta m, \tag{22.11}$$

dove m_1 e m_2 sono le masse del punto materiale nella posizione iniziale e in quella finale.

Quindi, *in meccanica relativistica il lavoro prodotto non viene determinato che dall'incremento della massa del punto materiale*. Questo risultato è più semplice di quello trovato nella meccanica non relativistica. Introdu-

ciamo la formula

$$E = mc^2 \tag{22.12}$$

e chiamiamo *E energia totale* o *relativistica della particella* (del punto materiale). Allora avremo

$$A_{12} = E_2 - E_1. \tag{22.13}$$

Nel caso particolare di una particella in stato di quiete, la sua energia relativistica viene data mediante la relazione

$$E_0 = m_0c^2 \tag{22.14}$$

che si chiama *energia a riposo*. L'*energia cinetica* è una parte dell'energia relativistica determinata dal moto della particella. Essa viene espressa dalla differenza

$$K = E - E_0 = (m - m_0)c^2, \tag{22.15}$$

ossia

$$K = m_0c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right). \tag{22.16}$$

È evidente che il lavoro A_{12} può ugualmente essere calcolato attraverso la formula

$$A_{12} = K_2 - K_1. \tag{22.17}$$

Se vengono introdotte nella formula (22.10) le grandezze E e E_0, si ottiene

$$E^2 = E_0^2 + (pc)^2. \tag{22.18}$$

Questa formula esprime nella meccanica relativistica la relazione tra l'impulso della particella e la sua energia totale. Essa è valida non soltanto per le particelle elementari, sulla cui struttura interna la scienza moderna non può pronunciarsi, ma anche per le particelle composte o per i sistemi costituiti da molte particelle. La massa e l'energia totali di un tale sistema si indicano con m_0 ed E_0, misurate in un sistema di riferimento rispetto al quale il nostro sistema sia a riposo.

La formula (22.16) esprime l'energia cinetica in meccanica relativistica. In caso di moto lento questa formula si trasforma nella formula usuale (22.8). Infatti, utilizzando la formula del binomio di Newton, possiamo scrivere

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8}\frac{v^4}{c^4} + \dots$$

Quando $v^2/c^2 \ll 1$, si prendono in considerazione solo i due primi termini dello sviluppo, trascurando gli altri. Allora la formula (22.16) si trasforma nella (22.8).

5. In fisica atomica è comodo utilizzare come unità d'energia l'*elettron-volt* (eV), cioè l'energia acquistata da un elettrone in un campo elettrico per effetto di una differenza di potenziale di 1 volt

$$1 \text{ eV} = 1{,}602 \cdot 10^{-12} \text{ erg}.$$

Viene utilizzato anche il *chiloelettron-volt* (keV) che corrisponde a 1000 eV. In fisica nucleare e per i calcoli degli acceleratori di particelle viene utilizzato anche il *megaelettron-volt* (MeV) uguale a 10^6 eV ed il *gigaelettron-volt* (GeV) uguale a 10^9 eV. Oltre ciò può essere utilizzato il *teraelettron-volt* (TeV = 10^{12} eV). L'energia di riposo dell'elettrone e del protone è rispettivamente uguale a

per l'elettrone $m_{0e}c^2 = 0{,}511$ MeV,

per il protone $m_{0p}c^2 = 938$ MeV.

Nel caso in cui l'energia relativistica E di una particella sia grande rispetto alla sua energia di riposo $E_0 = m_0c^2$, *si dice che il moto si effettua con velocità ultrarelativistica*: tali velocità vengono ottenute tramite acceleratori e si rivelano anche nei raggi cosmici.

Conoscendo l'energia di una particella ultrarelativistica, si può calcolarne la velocità, o, più precisamente, si può calcolare non la velocità della particella (non si può farlo poiché non conosciamo con sufficiente precisione la velocità c della luce), ma la differenza tra questa velocità e la velocità della luce nel vuoto. Per farlo, riscriviamo la formula (22.12) nella forma

$$E = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Ne deriva

$$E^2(c + v)(c - v) = m_0^2c^6 = E_0^2c^2.$$

Poiché la velocità v è vicina a c, si può sostituire v con c nel fattore $(c + v)$. Quindi

$$\frac{c - v}{c} = \frac{E_0^2}{2E^2}. \tag{22.19}$$

Per un protone con un'energia $E = 10$ GeV, si ottiene

$$\frac{c - v}{c} = \frac{0{,}938^2}{2 \cdot 10^2} = 0{,}0044,$$

e per un elettrone con un'energia $E = 1$ GeV

$$\frac{c - v}{c} = \frac{0{,}511^2}{2 \cdot 10^6} = 1{,}3 \cdot 10^{-7}.$$

Nei raggi cosmici è stata registrata la presenza di protoni con energia uguale a 10^{19} eV = 10^{10} GeV. In questo caso

$$\frac{c - v}{c} \sim 10^{-20}.$$

cioè la velocità della particella si differenzia della velocità della luce di $3 \cdot 10^{-10}$ cm/s.

Problemi

1. Una puleggia fissa, la cui massa può essere trascurata, sorregge una pesante corda di massa M che si chiude su se stessa formando un anello. Nell'istante iniziale una scimmia di massa m aggrappatasi alla corda in un punto situato tra la puleggia e la svolta dell'anello, comincia ad arrampicarsi al fine di mantenersi ad una altezza costante. Quale potenza P dovrà sviluppare la scimmia per riuscirci? Dopo quanto tempo la scimmia non potrà più mantenersi all'altezza voluta se la sua potenza massima è P_{max}?

Risposta. $P = \frac{(mg)^2}{M} t$; $t = \frac{M}{(mg)^2} P_{max}$.

2. Stabilire la formula (21.6), che è la generalizzazione relativistica della formula di Tsiolkovskij valida per il moto di un missile, supponendo che le velocità del missile e del getto di gas siano dirette lungo una medesima retta.

Soluzione. La soluzione di questo problema si basa sulle leggi relativistiche dell'impulso dell'energia (della massa relativistica) che noi conosciamo. Si deve anche conoscere la *legge relativistica dell'addizione delle velocità* che non abbiamo esposto. Il lettore desideroso di comprendere la soluzione che riportiamo dovrà consultare un corso di teoria della relatività o accettare la validità della formula (22.22).

Siano m e v rispettivamente la massa a riposo e la velocità del missile in un istante qualunque t e m_{gas} e v_{gas} siano le stesse grandezze relative per i gas prodotti nello stesso istante dalla combustione del carburante del missile. Poiché i gas già scaricati non esercitano alcuna influenza sul moto del missile, si può ammettere $m_{gas} = 0$. Dato che i gas vengono prodotti costantemente, $dm_{gas} \neq 0$. In virtù della legge di conservazione dell'impulso e dell'energia (della massa relativistiva):

$$\frac{mv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \frac{m_{gas} v_{gas}}{\sqrt{1 - \frac{v_{gas}^2}{c^2}}} = \text{cost}, \tag{22.20}$$

$$\frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \frac{m_{gas}}{\sqrt{1 - \frac{v_{gas}^2}{c^2}}} = \text{cost}. \tag{22.21}$$

Deriviamo (22.20) tenendo conto di (22.21) e ponendo $m_{gas} = 0$ nel risultato così ottenuto ricaviamo

$$\frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} dv + (v - v_{gas}) d \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 0.$$

Secondo la legge relativistica dell'addizione delle velocità

$$v_{gas} = \frac{v - v_{rel}}{1 - \frac{v v_{rel}}{c^2}}, \tag{22.22}$$

dove v_{rel} è la velocità di scarico del gas rispetto al missile. Eliminando v_{gas} si ottiene dopo semplici trasformazioni

$$\frac{dv}{v^2 - c^2} = \frac{v_{rel}}{c^2}\frac{dm}{m}.$$

Supponendo che v_{rel} sia costante, si ottiene dopo l'integrazione

$$\frac{m_0}{m} \left(\frac{1 + \beta}{1 - \beta}\right)^{\frac{c}{2v_{rel}}}. \tag{22.23}$$

§ 23. *Relaziône tra le energie cinetiche nei differenti sistemi di riferimento. Teorema di Kônig*

La formula (22.8) dimostra in modo evidente che l'energia cinetica di un corpo dipende dalla scelta del sistema di riferimento rispetto al quale viene studiato il moto. Ci si può chiedere come si trasformi l'energia cinetica quando si passa da un sistema di riferimento ad un altro. Tratteremo questo problema nel quadro della meccanica non relativistica partendo dal caso particolare in cui il corpo sia un punto materiale. Denotiamo con K l'energia cinetica del punto materiale in un sistema di riferimento S, e con K' la sua energia cinetica nel sistema di riferimento S' in moto traslatorio con velocità V rispetto a S. (La velocità V può essere costante o variabile nel tempo). Nella meccanica non relativistica le velocità v, v' e V sono legate tra loro dalla relazione $v = v' + V$. Quindi

$$\frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} mv'^2 + \frac{1}{2} mV^2 + mv'V,$$

ossia

$$K = K' + \frac{1}{2} mV^2 + (p'V), \tag{23.1}$$

dove $p' = mv'$ è l'impulso del punto materiale nel sistema di riferimento S'. La formula (23.1) è valida anche per un sistema qualunque di punti materiali. Per provarlo è sufficiente scrivere la relazione (23.1) per ciascun punto materiale del sistema ed effetuare l'addizione per tutti i punti; si ottiene di nuovo la formula (23.1) dove per p' si intende l'impulso *della totalità dei punti materiali* nel sistema di riferimento S', cioè $p' = m_1 v_1' + m_2 v_2' + \ldots$ Si può scrivere questa espressione nella forma $p' = mv_c'$, dove v_c' è la velocità del centro di massa del sistema di punti materiali ri-

spetto al sistema di riferimento S' ed m è la massa totale del sistema. Quindi

$$K = K' + \frac{1}{2} mV^2 + m(Vv_c'). \tag{23.2}$$

Se nel sistema di riferimento S' il centro di massa è in stato di quiete, cioè $v_c' = 0$, si ha

$$K = K' + \frac{1}{2} mV^2. \tag{23.3}$$

Questa uguaglianza esprime il cosiddetto *teorema di König, l'energia cinetica di un sistema di punti materiali è uguale alla somma dell'energia cinetica della massa del sistema intero, che si immagina concentrata nel suo centro di massa e che si sposta con esso, e dell'energia cinetica di questo stesso sistema in moto relativo rispetto al sistema di coordinate in moto traslatorio, la cui origine coincide con il centro di massa.*

§ 24. *Forze conservative e non conservative*

1. Tutte le forze di cui si occupa la meccanica macroscopica sono usualmente suddivise in forze *conservative* e *non conservative*. Prima di introdurre queste nuove nozioni è utile riportare qualche esempio.

Calcoliamo dapprima il lavoro prodotto dalla forza di gravità che fa passare un punto materiale dalla posizione 1 alla posizione 2 lungo il segmento di retta *12* (fig. 38): possiamo pensare allo scorrimento senza attrito

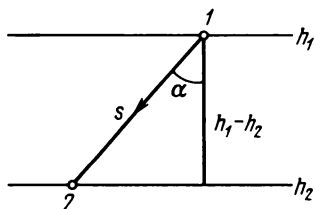



Fig. 38.

di un punto materiale lungo un piano inclinato perfettamente liscio. È chiaro che questo lavoro è uguale ad $A_{12} = mgs \cos\alpha$, ossia

$$A_{12} = mg(h_1 - h_2) = mgh_1 - mgh_2, \tag{24.1}$$

dove h_1 e h_2 sono le altezze alle quali si trova il punto materiale all'inizio e alla fine del suo tragitto, misurate rispetto ad un livello arbitratiamente scelto, ad esempio la superficie della Terra o del mare. La formula (24.1) rimane valida per uno spostamento lungo una curva qualunque, per esem-

pio lungo il percorso *132* (fig. 39). Questo risultato diventa evidente se si suddivide il tragitto in tratti per mezzo di piani orizzontali, dove ciascun segmento sia tanto piccolo da poter essere considerato rettilineo. Applicando a ciascun di questi tratti la formula (24.1) e sommando tutti i lavori elementari, si riottiene la formula (24.1) valida ora per l'intero percorso. Se invece del percorso *132*, ne verrà preso un altro, il *142*, che lega tra di loro le medesime posizioni iniziale e finale (*1* e *2*), il lavoro della forza di gravità resterà lo stesso poiché esso dipende soltanto dalla differenza $h_1 - h_2$ che è indipendente dal tragitto percorso. Quindi, il *lavoro della forza di gravità non dipende dal percorso, ma viene determinato soltanto dallo stato iniziale e finale del punto materiale.*

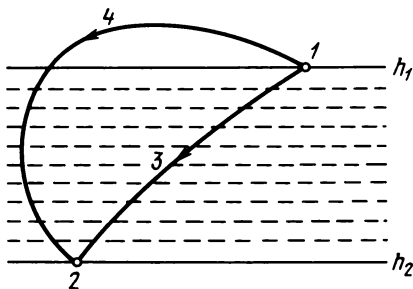
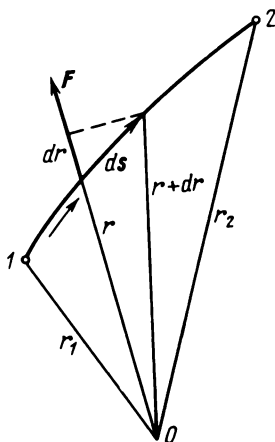



Fig. 39. Fig. 40.

2. Il secondo esempio riguarda il lavoro di spostamento di un punto materiale in un campo di forze centrali. Un campo di forze si dice *centrale* se la forza, agente in un punto qualunque del campo, è diretta lungo la retta che passa per il punto scelto e per un punto fisso detto *centro di forza.* Come esempio si può portare la forza di attrazione gravitazionale esercitata dal Sole su un pianeta e la forza di interazione elettrostatica di due cariche elettriche puntuali. Per definizione il lavoro elementare è $dA = F ds \cos(\boldsymbol{F}, d\boldsymbol{s})$. La quantità $ds \cos(\boldsymbol{F}, d\boldsymbol{s})$ è la proiezione dello spostamento elementare ds nella direzione della forza oppure, ed è la stessa cosa, nella direzione del raggio vettore $\boldsymbol{r}$ (a condizione di adottare come verso positivo della forza quello in direzione d'uscita dal centro di forza O). Quindi $ds \cos(\boldsymbol{F}, d\boldsymbol{s}) = dr$, dove dr è l'incremento elementare della lunghezza r, distanza tra il punto materiale e il centro di forza (fig. 40). Così $dA = F(r) dr$ e poiché per ipotesi il modulo della forza F non dipende che dalla distanza r, ne deriva che il lavoro A_{12} viene determinato mediante l'integrale definito

$$A_{12} = \int_{r_1}^{r_2} F(r)dr, \qquad (24.2)$$

il cui valore dipende *solo dalle distanze* r_1 e r_2 tra i punti *1* e *2* ed il centro di forza O, ma è *indipendente dalla forma del tratto* percorso dal punto per passare dalla posizione iniziale *1* alla posizione finale *2*. Il tratto percorso dal punto non figura nella formula (24.2) dove intervengono soltanto le distanze dal centro di forza.

3. Supponiamo che nel centro di forza sia posto *un corpo fisico* (un punto materiale) che interagisca con il punto materiale considerato (che può anche figurare come centro di forza). La loro interazione provoca lo spostamento sia del punto materiale che del centro di forza. Nello stabilire la formula (24.2) non abbiamo tenuto conto dello spostamento del centro di forza, ma questo non influisce affatto sulla validità della formula. Il *lavoro prodotto A_{12} dipende soltanto dallo spostamento relativo dei punti materiali, non può dipendere dallo spostamento assoluto di ciascuno dei punti presi isolatamente*. Un semplice calcolo lo dimostra pienamente. Supponiamo che due punti materiali *1* e *2* interagiscano e le loro forze d'interazione $\boldsymbol{F}_1$ e $\boldsymbol{F}_2$ siano conformi alla terza legge di Newton. Denotiamo con $\boldsymbol{r}_1$ e $\boldsymbol{r}_2$ i raggi vettori di questi punti che partono da un'origine fissa. Il lavoro elementare viene espresso allora mediante $dA = \boldsymbol{F}_1 d\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{F}_2 d\boldsymbol{r}_2$. Secondo la terza legge di Newton $\boldsymbol{F}_1 = -\boldsymbol{F}_2$ e quindi $dA = \boldsymbol{F}_2(d\boldsymbol{r}_2 - d\boldsymbol{r}_1) = \boldsymbol{F}_2 d(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1)$. Qui $\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$ è il raggio vettore del punto *2* rispetto al punto *1*; indichiamolo con $\boldsymbol{r}_{12}$. Si ha allora

$$dA = \boldsymbol{F}_2 d\boldsymbol{r}_{12}. \qquad (24.3)$$

Ciò significa che nel calcolo del lavoro elementare come pure del lavoro totale il punto *1* può essere considerato immobile e il punto *2* mobile rispetto al punto *1*. Si potrebbe anche considerare immobile il punto *2* e mobile invece il punto *1*. Il risultato sarebbe uguale. Si può in generale procedere come abbiamo già fatto e mettere (24.3) nella forma

$$dA = F(r)dr. \qquad (24.4)$$

In questa formula figurano soltanto la distanza r tra i punti materiali e l'incremento della distanza dr. Ne deriva immediatamente la formula (24.2), il che dimostra il nostro enunciato.

Notiamo una conseguenza importante della formula (24.2). Supponiamo che i punti materiali *1* e *2* siano collegati uno all'altro da un'asta perfettamente rigida. È evidente che nel caso ipotizzato la distanza tra i punti rimarrà invariabile, qualsiasi siano i loro spostamenti, cioè $dr = 0$. Perciò l'integrale che figura nella formula (24.2) sarà sempre uguale a zero; sarà dunque anche uguale a zero il lavoro prodotto dalle forze d'interazione dei punti materiali *1* e *2* qualsiasi sia lo spostamento. I corpi solidi perfettamente rigidi possono essere considerati come sistemi di punti materiali le

cui distanze di separazione restano immutabili qualunque sia il loro moto. Questa invariabilità della distanza di separazione è dovuta alle forze interne o alle forze di coesione esercitate tra i punti materiali del sistema. Si può decomporre mentalmente tutto il sistema in un grande numero di coppie di punti in reciproca interazione e applicare a queste coppie i corollari segnalati. Ne deriva che il *lavoro delle forze interne che si essercitano nei corpi solidi perfettamente rigidi è uguale a zero qualunque sia il moto del sistema.* I corpi reali non sono mai perfettamente rigidi perché le forze che vi si esercitano sono determinate da legami che possono essere molto rigidi ma non assolutamente rigidi. In generale, il lavoro di queste forze è diverso da zero, ma più aumentano i legami più diminuisce il lavoro delle forze interne per annullarsi al limite quando i legami diventano perfettamente rigidi.

I risultati stabiliti per due punti materiali vengono generalizzati nel caso di un sistema qualunque di punti materiali tra i quali si esercitino forze centrali. Se vengono fissate le posizioni di tutti i punti materiali, viene definita la posizione del sistema intero o come si dice viene definita la sua *configurazione. Il lavoro delle forze centrali non dipende dal procedimento* (*o dalla «via»*) *messo in atto per far passare il sistema dalla sua configurazione iniziale alla sua configurazione finale*; *questo lavoro è interamente determinato dalle configurazioni stesse.*

4. Quando le forze d'interazione dipendono soltanto dalla configurazione dei punti materiali del sistema (cioè dalle loro coordinate) e il lavoro prodotto da queste forze per spostare il sistema da una qualunque posizione iniziale ad una qualunque posizione finale non dipende dal cammino percorso, ma viene determinato soltanto dalle configurazioni iniziale e finale, queste forze d'interazione vengono chiamate *conservative*. Gli esempi riportati dimostrano che la *forza di gravità e tutte le forze centrali sono delle forze conservative.*

Diamo un'altra definizione delle forze conservative equivalente alla precedente. Consideriamo un sistema che sia passato dalla posizione *1* (fig. 41) alla posizione *2* lungo il percorso *132*. Sulla figura 41 abbiamo rappresentato simbolicamente le posizioni successive del sistema con dei punti ed i percorsi diversi tra le varie posizioni con tratti continui; a rigore questo modo di rappresentare andrebbe usato per un sistema costituito da un solo punto materiale. Questo passaggio del sistema da una posizione a un'altra viene accompagnato dal compimento del lavoro A_{132}. Se il sistema fosse passato dalla posizione *2* seguendo il percorso *142*, il lavoro compiuto sarebbe stato A_{142}. Per definizione di forza conservativa, $A_{132} = A_{142}$. Dato che le forze dipendono soltanto dalla configurazione del sistema, si deve avere $A_{142} = -A_{241}$, dove A_{241} è il lavoro che sarebbe stato compiuto se il sistema fosse passato da *2* a *1* percorrendo lo stesso percorso ma in senso inverso (percorso *241*). Quindi, $A_{132} + A_{241} = 0$. Ma la somma $A_{132} + A_{241}$ è il lavoro effettuato dalle forze quando il sistema è ritornato alla posizione *1*. In questo caso si dice che si tratta di un lavoro effettuato

lungo un «*percorso chiuso*». Insomma, il *lavoro delle forze conservative lungo un percorso chiuso è uguale a zero*. Invertendo il ragionamento si dimostra senza fatica che se è nullo il lavoro lungo un percorso chiuso, questo lavoro deve essere indipendente dal percorso effettuato per far passare il sistema da una posizione all'altra. Ne risulta un'altra definizione della forza conservativa. Le forze *conservative* sono delle forze che dipendono soltanto dalla configurazione del sistema e il cui lavoro lungo un percorso chiuso è sempre nullo.

5. Tutte le forze che non soddisfano le definizioni date sono chiamate *forze non conservative*. Fra queste ultime citeremo dapprima le *forze dissipative*, per esempio le forze d'attrito che si manifestano quando un corpo scivola sulla superficie di un altro corpo, o anche le forze di resistenza alle quali si trovano sottoposti tutti i corpi che si spostano in un mezzo liquido o gassoso (vengono chiamate talvolta anche forze d'attrito, cfr. § 17). Tutte queste forze dipendono non soltanto dalla configurazione dei corpi, ma anche dalle loro *velocità relative*. Esse sono sempre orientate in direzione opposta alla velocità del mobile (rispetto alla superficie sulla quale esso scivola o rispetto al mezzo che oppone resistenza al suo moto). Se il corpo scivola su una superficie immobile o si muove in un mezzo resistente «immobile». Il lavoro delle forze d'attrito applicate al corpo in moto è negativo. Ma il lavoro delle forze d'attrito può divenire positivo se la superficie di scivolamento o il mezzo resistente sono in moto. Consideriamo, per esempio, un corpo B sulla cui superficie scivola il corpo C con velocità rela-

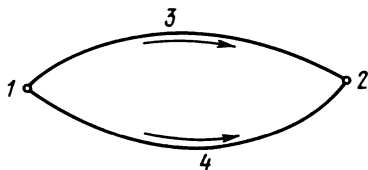
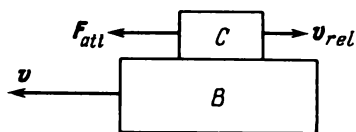



Fig. 41. Fig. 42.

tiva v_{rel} (fig. 42). La forza d'attrito F_{att} che agisce sul corpo C è diretta in senso opposto a quella del vettore v_{rel}. Supponiamo che il corpo B si muova in senso inverso alla velocità v. Se $v > v_{rel}$, in un sistema di riferimento «immobile» il corpo C si sposterà ad una velocità $v - v_{rel}$ diretta nello stesso senso della forza di attrito. La forza d'attrito effettua in ogni istante un lavoro positivo sul corpo C; questo lavoro è $A_1 = F_{att}(v - v_{rel})$. Ma se il sistema è chiuso, il lavoro totale delle forze d'attrito che agiscono su tutti i corpi del sistema sarà sempre negativo. Anche nell'esempio citato la forza d'attrito che agisce sul corpo B effettua un lavoro negativo $A_2 = -F_{att}v$. Il lavoro totale delle forze d'attrito è uguale a $A = A_1 + A_2 = -F_{att} \cdot v_{rel}$, cioè è negativo. Perciò possiamo dare la definizione seguente delle forze dissipative: si chiamano forze *dissipative* quelle forze il cui lavoro totale, qualunque sia il moto in un sistema chiuso, è sempre negativo.

6. Segnaliamo, per finire, l'esistenza di un altro tipo di forze non conservative — le *forze* chiamate *giroscopiche. Sono le forze che dipendono dalla velocità del punto materiale e che agiscono sempre lungo una direzione perpendicolare al vettore velocità.* Il lavoro di queste forze è uguale a zero qualunque sia lo spostamento del punto materiale, in particolare nel moto su un percorso chiuso. Le forze giroscopiche si differenziano dalle forze conservative per il fatto che dipendono non soltanto dalla posizione ma anche dalla velocità del punto materiale mobile. Il solo esempio di forze giroscopiche, conosciuto in fisica, è la *forza di Lorentz*, ossia la forza che agisce su una particella carica posta in un campo magnetico. La forza di Lorentz è proporzionale al prodotto vettoriale $[\boldsymbol{vB}]$ ed è dunque perpendicolare sia alla direzione della velocità $\boldsymbol{v}$ che a quella del vettore *intensità del campo magnetico* $\boldsymbol{B}$. È vero che ci sono in meccanica delle forze giroscopiche di tipo differente; sono le cosiddette *forze di Coriolis*. Ma prese nel senso della meccanica di Newton, queste forze non sono «vere forze», poiché lo studio del moto rispetto a sistemi di riferimento inerziali (si tratta proprio dei moti che abbiamo esaminato finora) non permette di scoprire l'esistenza di queste «forze». Esse vengono introdotte artificialmente nello studio del moto in sistemi di riferimento, che ruotano rispetto ai sistemi di riferimento inerziali, per conferire alle equazioni del moto in questi sistemi la stessa forma esibita dalle equazioni ottenute in sistemi di riferimento inerziali (cfr. cap. IX).

§ 25. *Energia potenziale e legge di conservazione dell'energia in meccanica*

1. Quando un sistema è sottoposto all'azione di sole forze conservative e giroscopiche, si può introdurre in questo sistema la nozione di *energia potenziale. Definiamo posizione di riferimento (posizione zero)* di un sistema una posizione caratterizzata dall'indicazione delle coordinate di tutti i punti materiali del sistema. Il lavoro eseguito dalle forze conservative durante lo spostamento del sistema da una posizione qualunque alla posizione di riferimento viene chiamato energia potenziale del sistema nella posizione iniziale. Poiché il lavoro delle forze conservative non dipende dal percorso effettuato ma solo dalle posizioni iniziale e finale, l'energia potenziale di un sistema, in cui sia stata scelta una posizione di riferimento, dipende esclusivamente dalle coordinate dei punti materiali nella posizione di partenza.

In altre parole, *l'energia potenziale U di un sistema è funzione solamente delle sue coordinate.*

Il valore che prende l'energia potenziale di un sistema dipende dalla scelta della posizione di riferimento. Se si sceglie come riferimento la posizione O (fig. 43,*a*), l'energia potenziale del sistema che si trova nella posizione *1* è data da $U = A_{1O}$, dove A_{1O}, rappresenta il lavoro effettuato dal-

le forze conservative per far passare il sistema dalla posizione *1* alla posizione O. Se si sceglie invece come riferimento la posizione O', l'energia potenziale è data da $U' = A_{1O'}$. Grazie alla natura conservativa delle forze che agiscono sul sistema, il lavoro che esse effettuano lungo il percorso $1O'$ è uguale al lavoro effettuato lungo il percorso $1OO'$: $A_{O'} = A_{1O} + A_{OO'}$ o $U' = U + A_{OO'}$. Il lavoro $A_{OO'}$ è invariabile poiché esso non dipende dalle coordinate del sistema che si trova nello stato considerato *1*. Il suo valore viene completamente definito dalla scelta delle

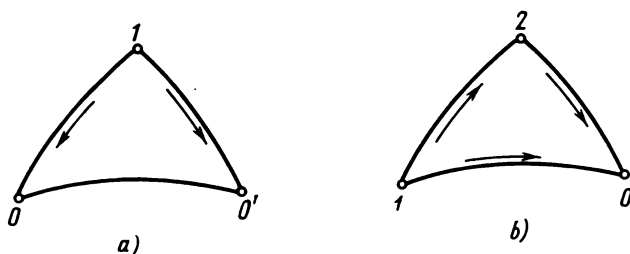



Fig. 43.

posizioni O e O'. Questo mostra che quando si sostituisce una posizione nulla con un'altra, l'energia potenziale del sistema cambia di una quantità costante. L'indeterminatezza sul valore dell'energia potenziale diventa ancora più chiara se si conviene di attribuirle, nella posizione di riferimento, non un valore nullo, ma un valore costante qualsiasi. In questo caso si dovrà sostituire, nella definizione sopra citata, all'espressione « energia potenziale » l'espressione « differenza di energia potenziale ». La *differenza di energie potenziali tra una posizione considerata e la posizione di riferimento* è il lavoro pordotto dalle forze conservative durante il passaggio del sistema dalla posizione considerata alla sua posizione di riferiamento. Quindi, *l'energia potenziale di un sistema è determinata soltanto a meno di una costante arbitraria*. Ma questa indeterminatezza non può influire sull'esattezza delle conclusioni fisiche raggiunte, perché l'evoluzione dei fenomeni fisici dipende non dal valore assoluto dell'energia potenziale, ma soltanto dalle differenze dei suoi valori nei diversi stati. E queste differenze non dipendono dal valore della costante qualunque essa sia.

Consideriamo il passaggio di un sistema da uno stato *1* a uno stato *2* lungo il cammino *12* (fig. 43,*b*). Il lavoro A_{12} effettuato dalle forze conservative durante questo passaggio può essere espresso attraverso le energie potenziali U_1 e U_2 corrispondenti ai due stati del sistema. Per farlo, supponiamo che questo passaggio si effettui passando attraverso la posizione di riferimento O, cioè lungo il percorso *1O2*. Dato che le forze sono conservative, possiamo scrivere $A_{12} = A_{1O2} = A_{1O} + A_{O2} = A_{1O} - A_{2O}$. Secondo la definizione di energia potenziale $U_1 = A_{1O} + C$ e

$U_2 = A_{2O} + C$, dove C è la stessa constante additiva. Quindi

$$A_{12} = U_1 - U_2, \qquad (25.1)$$

cioè il *lavoro delle forze conservative è uguale alla diminuzione di energia potenziale del sistema*.

2. Come abbiamo dimostrato lo stesso lavoro A_{12} può essere espresso in funzione dell'incremento d'energia cinetica del sistema considerato, secondo la formula (22.9). Uguagliando la formula (22.9) e la formula (25.1) si ottiene $K_2 - K_1 = U_1 - U_2$, da cui

$$K_1 + U_1 = K_2 + U_2.$$

La somma di energia cinetica e potenziale di un sistema porta il nome di *energia totale* E. Quindi, $E_1 = E_2$, o

$$E \equiv K + U = \text{cost}. \qquad (25.2)$$

In un sistema dove si manifestano soltanto forze conservative (e giroscopiche) l'energia totale è invariabile. In un tale sistema possono prodursi solamente conversioni d'energia potenziale in energia cinetica e conversioni inverse, mentre la riserva totale di energia del sistema resta invariabile. Questo enunciato porta il nome di *legge di conservazione dell'energia in meccanica.*

3. Calcoliamo l'energia potenziale in qualche caso semplice.

a) Energia potenziale di un corpo in un campo di gravità uniforme. Se un punto materiale che si trova a una altezza h cade fino al livello zero (cioè al livello in cui $h = 0$), la forza di gravità effettuerà il lavoro $A = mgh$. Perciò un punto materiale che si trova ad un'altezza h possiede un'energia potenziale $U = mgh + C$. Il livello zero si può scegliere arbitrariamente: il livello del pavimento del laboratorio, ad esempio, dove si effettua l'esperienza, oppure il livello del mare, ecc. La costante C è uguale all'energia potenziale al livello zero. Imponendo che sia nulla, si ottiene

$$U = mgh. \qquad (25.3)$$

b) Energia potenziale di una molla tesa. Le forze elastiche, che compaiono quando si comprime o quando si tende una molla, sono forze centrali. Sono perciò conservative e si può parlare di energia potenziale di una molla deformata, che in questo caso porta il nome di *energia elastica*. Denotiamo con x *l'allungamento della molla* dato dalla differenza $x = l - l_0$ delle lunghezze della molla nello stato deformato e nello stato non deformato. La forza elastica F dipende soltanto dall'allungamento della molla. Se l'allungamento x non è grande, la forza elastica gli è proporzionale: $F = Kx$ (legge di Hook, cfr. § 11). Quando la molla dallo stato deformato ritorna allo stato non deformato, la forza F effettua il lavoro

$$A = \int_0^x F\,dx = k\int_0^x x\,dx = \frac{1}{2}kx^2.$$

Considerando uguale a zero l'energia elastica di una molla non deformata, si ottiene

$$U = \frac{1}{2}kx^2. \tag{25.4}$$

c) Energia potenziale di attrazione gravitazionale di due punti materiali. Per la legge di Newton sulla gravitazione universale la forza di attrazione gravitazionale tra due corpi puntiformi è inversamente proporzionale al quadrato della loro distanza

$$F = G\frac{Mm}{r^2}, \tag{25.5}$$

dove G è la *costante gravitazionale*. Le forze di attrazione gravitazionale, essendo forze centrali, sono conservative. Si può dunque parlare di energia potenziale. Per calcolarla si può considerare immobile una delle masse, la massa M, ad esempio, e considerare l'altra m in moto nel campo gravitazionale della prima. Quando la mass m viene spostata dall'infinito, le forze gravitazionali effettuano il lavoro

$$A = \int_r^\infty G\frac{Mm}{r^2}\,dr = G\frac{Mm}{r},$$

dove r è la distanza tra le masse M e m nelle loro posizioni finali. Questo lavoro è uguale alla diminuzione di energia potenziale

$$A = U_\infty - U(r).$$

Di solito si considera uguale a zero l'energia potenziale all'infinito ($U_\infty = 0$). In questo caso

$$U = -G\frac{Mm}{r}. \tag{25.6}$$

La quantità (25.6) risulta essere negativa, ma questo si spiega facilmente nella seguente maniera. L'energia potenziale di due masse che si attirano reciprocamente è massima quando esse si trovano a distanza infinita una rispetto all'altra. Poiché solitamente si pone che in questa situazione l'energia potenziale sia uguale a zero, ne consegue che, per ogni altra posizione mutua delle masse, l'energia potenziale deve essere minore, deve quindi assumere valori negativi.

4. Supponiamo ora che assieme alle forze conservative e giroscopiche si manifesino nel sistema anche forze dissipative. Quando il sistema passa

dallo stato *1* allo stato *2*, il lavoro A_{12} di tutte le forze sarà sempre uguale all'incremento della sua energia cinetica $K_2 - K_1$. In questo caso il lavoro può essere considerato la somma del lavoro delle forze conservative A_{12}^{cons} e del lavoro delle forze dissipative A_{12}^{diss}. Il primo termine di questa somma può essere espresso attraverso la diminuzione dell'energia potenziale del sistema: $A_{12}^{\text{cons}} = U_1 - U_2$. Quindi

$$A_{12} = U_1 - U_2 + A_{12}^{\text{diss}}.$$

Uguagliando questa espressione all'incremento dell'energia cinetica, otteniamo

$$K_2 - K_1 = U_1 - U_2 + A_{12}^{\text{diss}},$$

ossia

$$E_2 - E_1 = A_{12}^{\text{diss}}, \qquad (25.7)$$

dove $E = K + U$ è l'energia totale del sistema. Quindi in questo caso l'energia meccanica E del sistema non resta costante, ma diminuisce, dato che il lavoro delle forze dissipative A_{12}^{diss} è negativo.

L'equazione (25.7) si può generalizzare. Suddividiamo tutte le forze che agiscono sul sistema in due gruppi. Al primo gruppo assegnamo le forze di cui occorre tener conto nel calcolo dell'energia potenziale U, ed al secondo gruppo tutte le altre forze esterne ed interne applicate al sistema o scambiate nel sistema. Denotiamo con A_{12} il lavoro di queste ultime forze. Riprendendo il ragionamento che ci ha portata alla formula (25.7), otteniamo

$$E_2 - E_1 = A_{12}. \qquad (25.8)$$

5. Supponiamo di nuovo che nessuna forza dissipativa agisca nel sistema. Allora la legge di conservazione dell'energia, nella forma espressa dalla (25.2), è verificata. Dato che per definizione l'energia cinetica K non può essere negativa, ne deriva dalla (25.2) che $E \geqslant U$. Questa relazione definisce la *zona di variazione di tutte le coordinate del sistema* in cui esso può torvarsi per un valore dell'energia E assegnato. Il sistema non può trovarsi là dove $U > E$, poiché l'energia potenziale non può essere maggiore dell'energia totale.

Esaminiamo come esempio il moto rettilineo di una particella che si sposti lungo una retta determinata, considerata come asse X. Lungo quest'asse il valore di U sarà funzione solo di x: $U = U(x)$. Se E è l'energia totale della particella, la particella potrà trovarsi sull'asse X soltanto là dove $U(x) \leqslant E$. Supponiamo che la curva che rappresenta la funzione $U(x)$ abbia l'andamento indicato nella figura 44. Tracciamo su questo grafico una retta orizzontale $U = E_1$, dove E_1 sia una costante qualunque. Supponiamo ancora che questa retta attraversi la « *curva potenziale* » $U = U(x)$ in tre punti A, B e C, di coordinate x_A, x_B, x_C. Si vede subito che una particella di energia totale E_1 non può trovarsi nelle zone *I* e *III*; può spostarsi soltanto all'interno delle zone *II* o *IV* e non può passare da

una zona all'altra. Non può farlo perché esiste una « *barriera di potenziale* » *BNC* sulla curva potenziale. Nella zona *II* una particella d'energia totale E_1 effettua un *moto* cosiddetto *finito*, cioè un moto che si effettua in una zone limitata di spazio. La particella si trova anche rinchiusa nella « *buca di potenziale* » *AMB* e oscillerà tra i punti estremi x_A e x_B, detti *punti di svolta*. Ma se la particella si trova nella zona *IV* e si muove verso sinistra, dopo aver raggiunto il punto x_C, essa retrocederà e « si allontanerà verso l'infinito ». Un tale moto viene chiamato *infinito*. Supponiamo ora che la particella possieda un'energia più grande $E_2 > E_1$ e che la retta orizzontale $U = E_2$ attraversi la curva potenziale in un solo punto D dell'ascissa x_D. La particella può allora spostarsi in qualsiasi direzione dello spazio a destra del punto x_D ed il suo moto sarà infinito.

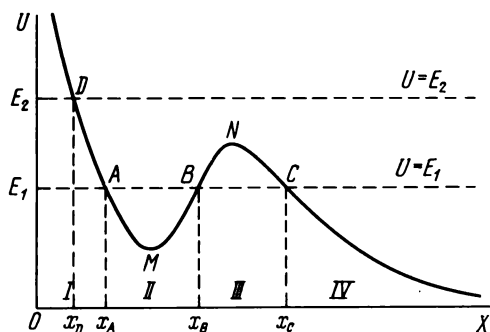



Fig. 44.

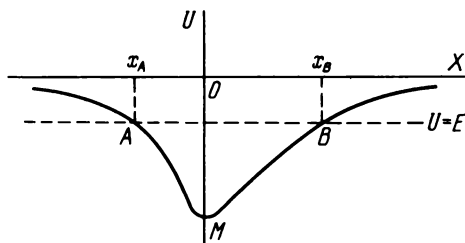



Fig. 45.

Supponiamo infine che la buca di potenziale abbia la forma della curva rappresentata nella figura 45. Da ambedue le parti del punto M le due linee della curva potenziale sono ascendenti. Supponiamo che per $x = \pm\infty$ la funzione $U(x)$ si annulli, cioè l'asse x delle ascisse è *asintoto* per la curva potenziale da entrambi i lati. Possiamo affermare allora che il *moto della particella sarà finito se la sua energia totale è negativa e infinito se la sua energia totale è positiva*.

Per dare una descrizione qualitativa del moto di una particella in un campo di forze di energia potenziale $U(x)$, consideriamo l'esempio seguente. Costruiamo una piccola pista da toboga perfettamente rigida e perfettamente liscia che abbia esattamente lo stesso profilo della curva potenziale $U = U(x)$ (quella della curva della figura 44, ad esempio). Collochiamo questa pista in un campo di gravità omogeneo e, in un punto elevato, posiamo una piccola palla. Il moto di questa palla sotto l'azione del campo di gravità riprodurrà pressoché esattamente il moto di un punto materiale sottoposto all'azione del campo di forze considerato $U = U(x)$, a condizione di fornire una conveniente energia totale alla palla. Questo esempio presenta qualche deviazione dal comportamento previsto teoricamente, perché il moto della palla sulla pista è disturbato dalla sua rotazione che consuma una parte di energia. Sarebbero riprodotti appieno i tratti caratteristici del moto studiato, se la palla invece di rotolare sulla pista scivolasse su di essa senza attrito. Se una tale palla fosse collocata nel punto A, priva di velocità iniziale (fig. 44), effettuerebbe delle oscillazioni lungo la curva AMB tra i punti estremi A e B. Se fosse posta nel punto D, la palla potrebbe sormontare la barriera di potenziale BNC e « scappare nell'infinito ».

6. I moti finiti soddisfano il cosiddetto *teorema del viriale*, che trova numerose applicazioni in diversi rami della fisica. Questo teorema è stato formulato e dimostrato da Clausius (1822—1888). Per un sistema qualunque di punti materiali si può scrivere

$$\frac{d}{dt}\sum pr = \sum rF + \sum pv,$$

poiché $\dot{p} = F$ e $\dot{r} = v$ (l'addizione è estesa a tutti i punti materiali del sistema). L'ultimo termine del secondo membro è il doppio dell'energia cinetica del sistema: $2K = \sum pv = \sum mv^2$, quindi si può riscrivere l'uguaglianza precedente nella forma

$$K = -\frac{1}{2}\sum rF + \frac{d}{dt}\sum \frac{1}{2}(pr). \tag{25.9}$$

La grandezza $-\frac{1}{2}\sum rF$ si chiama *viriale delle forze che agiscono sul sistema.*

Chiamiamo valore medio rispetto al tempo della funzione $f(t)$ nell'*intervallo* di tempo $(t, t + T)$ la grandezza definita dall'espressione

$$\overline{f(t)} = \frac{1}{T}\int_{t}^{t+T} f(t')\,dt'. \tag{25.10}$$

Se la funzione $f(t)$ è periodica, si prende il tempo T uguale al periodo; se non è periodica, ma limitata nel tempo, si prende un intervallo di tempo T

sufficientemente grande e si passa al limite

$$\bar{f} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} f(t')\,dt' \tag{25.11}$$

supponendo naturalmente che il limite esista. Se $f(t)$ è la derivata di una funzione limitata nel tempo: $f = \dfrac{d\varphi}{dt}$, allora $\bar{f} = 0$. Infatti

$$\bar{f} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \frac{d\varphi}{dt'}\,dt' = \lim_{T\to\infty} \frac{\varphi(t+T) - \varphi(t)}{T}.$$

Prendendo in considerazione questo risultato, cerchiamo il valore medio rispetto al tempo di (25.9) facendo tendere T verso l'infinito. Per un moto finito l'ultimo termine di (25.9) si annulla e noi avremo

$$\bar{K} = -\frac{1}{2}\overline{\sum rF}. \tag{25.12}$$

Per un moto finito il valore medio nel tempo dell'energia cinetica è uguale al valore medio nel tempo del viriale delle forze che agiscono nel sistema, e questo è l'enunciato del teorema del viriale di Clausius.

Problemi

1. Determinare il rapporto delle energie potenziali di deformazione U_1 e U_2 di due molle con coefficiente di elasticità k_1 e k_2 nei due casi seguenti: a) le molle attaccate l'una all'altra sono sottopposte all'azione di un peso P (fig. 46, *a*); b) le molle sono fissate con una estremità

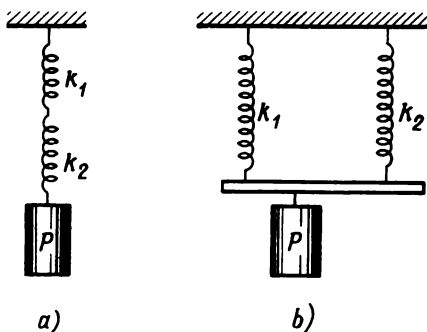



Fig. 46.

ad un supporto, le altre due estremità sono legate da un'asta; ad un certo punto di quest'asta viene sospeso un peso P che comunica alle due molle il medesimo allungamento (fig. 46,*b*). Trascuriamo la deformazione delle molle dovute al loro stesso peso.

Risposta. a) $\dfrac{U_1}{U_2} = \dfrac{k_2}{k_1}$; b) $\dfrac{U_1}{U_2} = \dfrac{k_1}{k_2}$.

Se una delle molle ha una durezza assai maggiore dell'altra, in pratica la totalità dell'energia potenziale sarà accumulata nel caso a) nella molla di durezza minore e nel caso b) nella molla di durezza maggiore.

2. Due protoni con la medesima energia $E = 0{,}5$ MeV volano l'uno verso l'altro ed entrano in collisione diretta. Qual'è la distanza minima tra loro a cui possono arrivare se si tiene conto soltanto delle loro interazioni coulombiane?

Risposta. $r = \dfrac{e^2}{2E}$, dove e è la carica del protone.

Per effettuare i calcoli si raccomanda di modificare la formula ponendo $E = eV$; si trova allora $r = \dfrac{e}{2V} = 1{,}4 \cdot 10^{-13}$ cm ($2V = 10^6$ V). Le esperienze sulla diffusione (scattering) di particelle nucleari hanno dimostrato che il raggio d'azione delle forze nucleari è dell'ordine di 10^{-13} cm. Quindi, per calcolare i parametri d'urto di protoni con energia superiore a 0,5 MeV circa, si devono fare intervenire sia le forze nucleari che quelle elettrostatiche.

3. Tre elettroni si trovano in stato di quiete ai vertici di un triangolo equilatero, il cui lato $a = 1$ cm. Si mettono poi in movimento sotto l'azione delle forze di repulsione mutua. Calcolare il valore limite della loro valocità.

Risposta. $v = \sqrt{\dfrac{2e^2}{ma}} = 2{,}2 \cdot 10^4$ cm/s.

4. Postulare nel problema precedente la presenza di velocità relativistiche e trovare a quali distanze a si può utilizzare l'approssimazione non relativistica.

Risposta. $v = c\,\dfrac{\sqrt{2m_0c^2\dfrac{e^2}{a} + \dfrac{e^4}{a^2}}}{m_0c^2 + \dfrac{e^2}{a}}$.

L'approssimazione non relativistica è valida per

$$a \gg \frac{e^2}{m_0c^2} = 2{,}8 \cdot 10^{-13}\ \text{cm}.$$

5. Per quali valori della distanza a del problema 3 le correzioni quantistiche sono superflue?

Risposta. Per $a \gg \dfrac{h^2}{2me^2} \approx 10^{-7}$ cm.

6. Quattro elettroni sono posti in stato di quiete ai vertici di un quadrato il cui lato $a = 1$ cm. Si mettono poi in movimento sotto l'azione delle forze di repulsione mutua. Calcolare la loro velocità massima.

Risposta. $v = \sqrt{\left(2 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\dfrac{e^2}{ma}} = 2{,}6 \cdot 10^4$ cm/s.

7. Un punto materiale compie un moto finito unidimensionale tra i punti di svolta x_A e x_B in un campo di forze conservative (cfr. fig. 45). Dimostrare che il tempo che esso impiega per andare da x_A a x_B è uguale al tempo che impiegherà per compiere in senso inverso il percorso da x_B fino a x_A.

8. Un punto materiale (una piccola palla sospesa ad una molla, ad esempio) oscilla, sotto l'azione di una forza quasi elastica $F = -kx$, lungo l'asse X attorno alla sua posizione d'equilibrio. Dimostrare, usando il teorema del viriale, che per queste oscillazioni i valori medi nel tempo delle energie cinetica e potenziale sono uguali.

9. Una pallina perfettamente elastica effettua un moto dall'alto verso il basso e dal basso verso l'alto in un campo gravitazionale omogeneo rimbalzando ogni volta da terra conforme-

mente alle leggi dell'urto elastico. Trovare la relazione tra i valori medi nel tempo della sua energia cinetica $\bar{K}$ e della sua energia potenziale $\bar{U}$.

Soluzione. Poniamo l'origine delle coordinate in un punto a terra e dirigiamo l'asse X lungo la verticale ascendente di questo punto affinché la pressione che esercita il suolo sulla pallina non influisca sul valore del viriale (tale pressione si manifesta soltanto per posizioni della pallina in cui $x = 0$). Si terrà quindi conto soltanto della forza gravitazionale $F = -mg$ (il segno « meno » appare poiché questa forza è diretta verso il basso, lungo il senso negativo dell'asse X). Il viriale di questa forza è uguale a $-1/2Fx = 1/2mgx = 1/2U$. Applicando il teorema del viriale, troviamo

$$\bar{K} = \frac{1}{2}\bar{U}.$$

§ 26. *Urto perfettamente anelastico*

1. Un caso interessante di energia meccanica che si perde sotto l'azione di forze dissipative è quello di *un urto perfettamente anelastico*. Si chiama così la collisione di due corpi in seguito alla quale essi si uniscono e continuano il loro moto come un corpo unico. Questo accade, per esempio, sparando una pallottola di fucile contro un sacco di sabbia sospeso ad una corda. La pallottola bloccata dalla sabbia resta nel sacco e si muove con esso. Quando due blocchi di argilla o di plastilina entrano in collisione, si incollano generalmente uno all'altro e si muovono poi come un corpo unico. Una tale collisione illustra il caso di un urto che è praticamente anelastico. Il caso in cui due blocchi di piombo entrino in collisione può ugualmente essere considerato, con buona approssimazione, un urto perfettamente anelastico.

I fenomeni fisici che accompagnano l'urto di due corpi sono assai complicati. I corpi che entrano in collisione si deformano per la comparsa di forze elastiche e di forze d'attrito, nei corpi compaiono oscillazioni ed onde, ecc. Ma se l'urto è anelastico, tutti questi processi alla fine si ammortizzano e i due corpi proseguono il loro moto uniti e si comportano come un

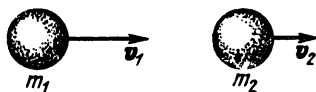



Fig. 47.

solo corpo solido. Si può calcolarne la velocità senza entrare nel merito del meccanismo del fenomeno, applicando semplicemente la legge di conservazione dell'impulso.

Studiamo un urto perfettamente anelastico prendendo come esempio la collisione di due blocchi che si spostino lungo la retta che congiunge i loro cenri con velocità v_1 e v_2 (fig. 47). In questo caso diciamo che si tratta di un urto *centrale*. Indichiamo con v la velocità comune dei due blocchi uniti

dopo la collisione. Secondo la legge di conservazione dell'impulso

$$m_1v_1 + m_2v_2 = (m_1 + m_2)v,$$

dove m_1 e m_2 sono le masse dei due blocchi. Ne deriva

$$v = \frac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1 + m_2}. \tag{26.1}$$

Le energie cinetiche del sistema prima e dopo la collisione sono rispettivamente uguali a

$$K_1 = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2, \quad K_2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2.$$

Da qui è facile dedurre

$$K_1 - K_2 = \frac{1}{2}\mu(v_1 - v_2)^2, \tag{26.2}$$

dove $\mu = \dfrac{m_1m_2}{m_1 + m_2}$ è la massa ridotta dei due blocchi. Quindi, l'*urto perfettamente anelastico di due blocchi è accompagnato da una perdita di energia cinetica del moto macroscopico, che è uguale alla metà del prodotto della massa ridotta dei blocchi per il quadrato della loro velocità relativa.*

2. L'urto anelastico di due corpi deve essere sempre accompagnato da una diminuzione dell'energia cinetica del moto macroscopico. In effetti, secondo il teorema di König, l'energia cinetica di un sistema meccanico è costituita di due parti: 1) l'energia cinetica del moto dell'intero sistema alla velocità del suo centro di massa; 2) l'energia cinetica del moto relativo dei punti materiali come risultato di una decomposizione immaginaria del sistema, attorno al suo centro di massa. Ambedue le parti, in quanto energie cinetiche, sono essenzialmente positive. In virtù del teorema del moto dei centri di masse la collisione dei corpi non investe la prima parte. Quanto alla seconda parte, essa deve sparire dopo la collisione poiché dopo una collisione anelastica il moto relativo delle parti del sistema cessa di esistere, lasciando proseguire il moto d'insieme delle due parti del sistema alla velocità del suo centro di massa. Quindi, la collisione porta a una diminuzione dell'energia cinetica totale del moto macroscopico. Al contrario, l'energia interna del corpo aumenta (cfr. paragrafo seguente).

3. È facile spiegare perché della formula (26.2) fanno parte la massa ridotta e la velocità relativa dei blocchi che entrano in collisione. Conformemente alla formula generale (25.7) la perdita di energia cinetica è uguale in valore assoluto al lavoro delle forze dissipative che si esercitano nel sistema durante l'urto. Abbiamo mostrato nel § 24 che, per calcolare questo lavoro, si poteva supporre che uno dei blocchi fosse immobile e l'altro in moto rispetto al primo. Il moto relativo di due punti materiali è regolato

dall'equazione $\mu\ddot{r} = F$ che è analoga alla seconda legge di Newton. Quindi, il lavoro compiuto dalla forza dissipativa F per tutto il tempo che dura l'urto è uguale a $\frac{1}{2}\mu(v_1 - v_2)^2$. È questa quantità che determina la diminuzione di energia cinetica durante il medesimo intervallo di tempo.

Quando due corpi entrano in collisione, l'effetto distruttivo che accompagna l'urto dipende soltanto dalla loro velocità relativa $v_1 - v_2$. La parte di energia cinetica da cui dipende l'effetto distruttivo è uguale a $\frac{1}{2}\mu(v_1 - v_2)^2$. La restante energia cinetica è legata al moto del centro di massa del sistema; questa energia non varia in conseguenza della collisione e quindi non contribuisce all'effetto distruttivo. Quando due automobili identiche, ad esempio, si muovono una contro l'altra ad identica velocità v ed entrano in collisione frontale, l'energia che determina la distruzione è uguale a

$$\frac{1}{2}\mu(v_1 - v_2)^2 = \frac{1}{2}\frac{mm}{m+m}(2v)^2 = mv^2,$$

cioè, la totalità dell'energia cinetica è utilizzata per l'effetto distruttivo. Questo risultato è evidente senza calcolo poiché dopo la collisione le due automobili devono fermarsi indipendentemente dai danni causati. Si otterrà il medesimo effetto distruttivo quando una vettura con velocità $2v$ si scontra con una vettura immobile. In questo caso, l'energia cinetica iniziale del sistema è uguale a $\frac{1}{2}m(2v)^2 = 2mv^2$, è cioè due volte maggiore che nel caso precedente, ma solo metà di questa energia è distruttrice.

Gli effetti distruttivi di tali incidenti sono evidentemente spiacevoli. Ma talvolta, per esempio nello studio delle trasformazioni che subiscono i nuclei atomici che entrano in collisione con particelle elementari, l'effetto distruttivo stesso diventa oggetto di studio. *Si cerca anzi di rafforzare l'effetto distruttivo e ci si riesce — come risulta da quanto esposto — facendo collidere tra di loro due particelle in moto. Con un uguale consumo di energia, l'effetto distruttivo è maggiore quando il centro di massa delle particelle che entrano in collisione è immobile nel sistema di riferimento del laboratorio*. Questo principio è sfruttato *negli acceleratori a fasci opposti*. Gli acceleratori moderni sono istallazioni complicate e costose, utilizzate per trasmettere grande energia alle particelle caricate: elettroni, protoni. ecc. Vengono utilizzati nella fisica nucleare e nella fisica delle particelle elementari per lo studio dei processi che si producono al momento dell'urto tra particelle di grande energia. Di solito le particelle accelerate vengono dirette contro un bersaglio immobile (targhetta); è durante l'impatto delle particelle col bersaglio che si verificano i fenomeni da studiare. Il medesimo effetto può essere ottenuto, con un minor consumo di energia, imprimendo al bersaglio un moto diretto verso il fascio di particelle accelerate. Viene

utilizzato allora come bersaglio un secondo fascio di particelle accelerate che si propaga in senso opposto al primo. Se la massa e la velocità delle particelle sono uguali nei due fasci, secondo la meccanica non relativistica il consumo di energia diminuirà di due volte. Ma poiché negli acceleratori vengono utilizzati *fasci relativistici*, i calcoli devono basarsi sulla meccanica relativistica. Nei casi relativistici risulta che il guadagno d'energia è in teoria illimitato se la velocità delle particelle si avvicina alla velocità della luce (cfr. T.IV).

4. Durante la collisione si manifestano nel sistema forze dissipative che diminuiscono l'energia cinetica del moto macroscopico. Non si può quidni applicare la legge di conservazione dell'energia meccanica ai processi che si verificano durante l'urto. Ma una volta verificatosi l'urto e unitisi i due corpi in uno solo, si può utilizzare la legge di conservazione dell'energia (a condizione però che non siano più in azione forze dissipative).

Studiamo a titolo d'esempio il problema del *pendolo balistico*. Questo dispositivo viene utilizzato per misurare la velocità delle pallottole e dei proiettili. Il pendolo balistico è generalmente costituito da una grossa cassa sospesa riempita di sabbia che può oscillare attorno ad una asse orizzontale. Un poriettile che colpisca la cassa rimane bloccato nella sabbia ed il pen-

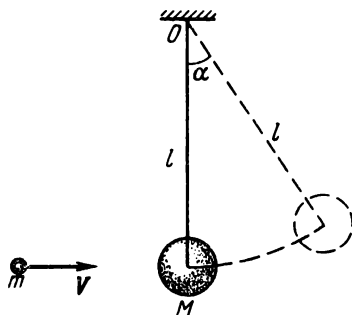



Fig. 48.

dolo si sposta dalla sua posizione d'equilibrio. Per semplificare il calcolo ammettiamo di trattare un pendolo matematico. Il processo di collisione è così rapido che durante l'urto il pendolo non riesce a spostarsi di un angolo apprezzabile dalla sua posizione d'equilibrio. L'urto non fa che mettere il pendolo in moto, il problema consiste nel determinare la velocità v di questo moto subito dopo l'urto. Prima dell'urto, quando il pendolo era in equilibrio, le forze esterne cui era sottoposto (forze di gravità e tensione del filo di sospensione) si compensavano. Nell'urto l'equilibrio di queste forze viene compromesso, anzi compaiono nuove forze, come, ad esempio, le forze d'attrito. Ciò nondimeno, nel momento stesso dell'urto si possono trascurare tutte queste forze, poiché la loro risultante è infinitamente piccola rispetto alla forza del proiettile che agisce sul pendolo. Si può dunque ammettere che il sistema costituito dal pendolo e dal proiettile (fig. 48) è un

sistema isolato durante l'urto; si può quindi applicargli la legge di conservazione dell'impulso. Partendo da questa legge si determina la velocità cercata v che acquista il sistema subito dopo l'urto

$$v = \frac{m}{M + m} V,$$

dove V è la velocità del proiettile prima della collisione. Verificatosi l'urto, le forze dissipative (interne) non agiscono più e si può applicare la legge di conservazione dell'energia. La velocità v deve essere considerata come la velocità iniziale con la quale il pendolo comincia ad oscillare nella posizione inferiore. In questa posizione il pendolo e il proettile possiedono l'energia cinetica $\frac{1}{2}(M + m)v^2$ che, avendo il pendolo deviato dalla sua posizione di equilibrio, si trasforma in energia potenziale $(M + m)gh$. Se ne deduce l'altezza a cui può sollevarsi il pendolo

$$h = \frac{v^2}{2g} = \frac{1}{2g}\left(\frac{m}{M + m}\right)^2 V^2. \tag{26.3}$$

Avendo misurato l'altezza h, si può calcolare la velocità V della pallottola (del proiettile).

Sarebbe un grave errore fare il ragionamento seguente. Quando il pendolo è nella posizione di riposo, prima cioè dell'urto, l'energia totale del sistema è uguale all'energia cinetica della pallottola (del proiettile) $1/2\, mV^2$. Quando il pendolo sale, questa energia si trasforma nell'energia potenziale $(M + m)gh$. Questo ragionamento conduce alla formula erronea

$$h = \frac{1}{2g}\frac{m}{M + m} V^2.$$

Dato che nel caso del pendolo balistico $m \ll M$, questa formula attribuisce un valore del tutto inesatto all'altezza h, di molte volte più grande del valore sperimentale. Soltanto nel caso limite, in cui $m \gg M$, le due formule praticamente coincidono. L'errore del ragionamento riportato sta nel fatto che non si tiene conto delle perdite d'energia meccanica durante l'urto.

Nei calcoli pratici è comodo esprimere l'altezza h mediante l'angolo di deviazione α del pendolo rispetto alla sua posizione di equilibrio, più facile da misurare di h. È evidente che $h = l(1 - \cos\alpha) = 2l\sin^2(\alpha/2)$, dove l è la lunghezza del pendolo. Con questa espressione la formula (26.3) si trasforma in

$$V = 2\,\frac{M + m}{m}\sqrt{gl}\,\sin\frac{\alpha}{2} \approx 2\frac{M}{m}\sqrt{gl}\,\sin\frac{\alpha}{2}\,. \tag{26.4}$$

§ 27. *Energia interna. Legge fisica generale di conservazione dell'energia*

1. Una diminuzione di energia cinetica senza l'aumento corrispondente di energia potenziale, di cui si è parlato nel paragrafo precedente, si manifesta non soltanto negli urti anelastici, ma anche in molti altri processi. Per esempio, i moti che si svolgono in un sistema isolato, nel quale agiscono forze di attrito, vengono attenuati fino all'arresto completo così che la riserva di energia cinetica del sistema diminuisce in conseguenza; può anche verificarsi una perdita di energia potenziale. Se, per esempio, si allungasse una molla al di là del suo limite di elasticità e la si abbandonasse poi a se stessa, questa non tornerebbe allo stato iniziale, perché sussisterebbe un allungamento residuo. Il lavoro che può fornire una molla tesa in questo modo è inferiore al lavoro speso per allungarla. In tutti questi casi si constata una perdita di energia meccanica. La meccanica macroscopica formale spiega l'esistenza di queste perdite col fatto che un lavoro deve essere effettuato contro le forze dissipative che agiscono nel sistema. Una tale spiegazione è puramente formale e non fisica, poiché trascura la natura fisica delle forze dissipative.

2. Ogni volta che un sistema subisce una perdita di energia meccanica, possiamo dire che al suo interno si verificano dei cambiamenti. Se viene misurata, per esempio per mezzo di un termometro sensibile o di una termocoppia, la temperatura delle sfere prima e dopo la collisione, si constata che l'urto determina un leggero riscaldamento. La stessa cosa si produce nel caso di attrito o di deformazione residua. Se un attrito intenso dura a lungo, il riscaldamento diventa talmente evidente che si nota senza ricorrere a misurazioni. I popoli primitivi producevano il fuoco fregando un pezzo di legno contro l'altro. Se si fissa all'asse di un motore un disco di cartone (dello spessore di 1 mm circa) e lo si fa quindi ruotare rapidamente si può segare una tavola di legno accostata al bordo del disco in rotazione (sega di cartone). Questo effetto di taglio si spiega con l'intensa produzione di calore dovuta all'attrito. La tavola è carbonizzata e distrutta nel punto di contatto con il disco di cartone. Il disco di cartone invece non viene distrutto poiché la rotazione provoca un raffreddamento intenso dovuto all'aria ambientale. La superficie del taglio risulta liscia e ben levigata, di un bel color bruno rossastro dovuto alla carbonizzazione. Nel caso indicato la tensione prodotta nel disco dalla rotazione gli conferisce durezza sufficiente. Non si potrebbe tagliare la tavola di legno facendola ruotare attorno al disco di cartone immobile.

Le perdite di energia meccanica possono anche creare effetti più complicati, del tipo di quelli osservati nel caso seguente. Si arrotoli su una puleggia di legno fissata all'albero di una dinamo un filo lungo e solido. Si faccia passare il filo per una carrucola fissata al soffitto e si attacchi all'estremità libera un peso di parecchi chilogrammi. Facendo girare l'albe-

ro della dinamo, si faccia sollevare il peso fino al soffitto. Il circuito della dinamo può essere chiuso su una piccola lampada ad incandescenza. Se si lascia cadere il peso senza chiudere il circuito, la dinamo, anche se messa in rotazione dalla caduta del peso, non genererà corrente elettrica. Il peso cade con un moto accelerato e questo significa che la sua energia potenziale è convertita in energia cinetica. Se si rifa l'esperimento, chiudendo il circuito della lampada, la lampada si illuminerà quando il perso avrà percorso metà circa del tragitto verso il suolo, ed a partire da questo momento la caduta del peso e la velocità di rotazione della dinamo rallenteranno. Il peso si abbassa fino al suolo a velocità costante e la lampada resta illuminata finché il peso raggiunge il suolo. L'energia potenziale del peso diminuisce costantemente durante la caduta, ma non sparisce senza lasciare traccia, poiché la dinamo produce durante tutto questo tempo una corrente elettrica che genera calore nel filamento della lampada.

3. La meccanica macroscopica tiene conto non soltanto dell'energia cinetica del moto macroscopico dei corpi o delle loro parti macroscopiche, ma anche delle loro energie potenziali. Tuttavia essa ignora completamente la struttura atomica interna delle sostanze. Durante gli urti, gli attriti ed altri fenomeni di questo genere, l'energia cinetica del moto visibile dei corpi non scompare, ma si trasforma in energia cinetica del moto disordinato e invisibile degli atomi e delle molecole dei corpi, come pure in energia potenziale delle loro interazioni reciproche. Questa parte di energia prende il nome di *energia interna*. Il moto disordinato degli atomi e delle molecole è percepito dai nostri sensi sotto forma di *calore*. Così la fisica spiega la perdita apparente di energia meccanica che accompagna gli urti, gli attriti ed altri fenomeni analoghi.

La teoria che spiegava la produzione di calore col moto disordinato degli atomi e delle molecole fu definitivamente accettata soltanto nella seconda metà del XIX secolo e costituì un evento storico. È nella stessa epoca che si afferma l'idea che considera la legge sulla conservazione dell'energia, *una legge generale della fisica* che non subisce eccezioni. Questa legge afferma che l'*energia non può essere né creata né distrutta, può soltanto passare da una forma all'altra*. Questa affermazione richiede un ampliamento della nozione di energia con l'introduzione di *altre forme* di energia quali l'energia del campo elettromagnetico, l'energia nucleare, ecc. Si noti tuttavia che a tutt'oggi è impossibile dare una classificazione definitiva delle diverse forme di energia. Saremmo in grado di farlo se conoscessimo tutte le leggi della natura e se lo sviluppo della scienza, almeno nelle sue strutture di base, fosse completato.

La suddivisione dell'energia in energia cinetica e potenziale ha senso soltanto in meccanica, poiché non abbraccia anche tutte le altre forme di energia. D'altra parte, spesso la classificazione dell'energia dipende dal punto di vista. Per esempio, in meccanica macroscopica, l'energia elastica di un gas perfetto compresso è considerata energia potenziale. Ma dal pun-

to di vista della fisica molecolare, l'elasticità del gas viene attribuita all'agitazione termica delle sue molecole e deve perciò essere considerata energia cinetica.

4. Il principio di conservazione dell'energia, oltre a numerose applicazioni ai fenomeni già conosciuti, serve da guida in campi ancora inesplorati. In tutti i casi in cui questo principio sembra violato, si può essere certi che ci troviamo di fronte a nuovi fenomeni che superano i limiti delle conoscenze scientifiche acquisite. Ciò è accaduto, per esempio, con la scoperta della *radioattività* e del *neutrino*. L'esperienza aveva fatto rilevare apparenti deviazioni delle leggi di conservazione dell'energia e dell'impulso nei fenomeni di disintegrazione β dei nuclei atomici. Questo fenomeno costrinse Pauli (1900—1958) a formulare l'ipotesi (confermata più tardi dall'esperienza) che alla disintegrazione β partecipasse, insieme alle particelle cariche già note (elettroni e nuclei atomici), una nuova particella neutra che fu quindi chiamata *neutrino*. È questa particella che porta con sé la parte mancante di energia e di impulso. Dato che la sua interazione con la sostanza è particolarmente debole, essa sfugge all'osservazione. (Più tardi, quando fu chiaro che ad ogni particella corrisponde un'antiparticella, risultò che nelle disintegrazioni β elettroniche compare non il neutrino, ma l'*antineutrino*).

Il principio fisico generale della conservazione dell'energia riguarda dunque non soltanto i fenomeni studiati dalla meccanica macroscopica, ma anche i fenomeni fisici ai quali le leggi di questa meccanica non sono applicabili. Esso non può dunque essere dedotto dalle equazioni della meccanica macroscopica e deve essere considerato come *una delle più ampie generalizzazioni dei dati sperimentali*.

§ 28. *Urto perfettamente elastico*

1. L'urto perfettamente elastico permette di mettere in evidenza interessanti trasformazioni dell'energia cinetica in energia potenziale e viceversa. Un urto è detto *perfettamente elastico* se l'energia interna del corpo resta immutata. L'urto tra corpi macroscopici non è mai perfettamente elastico, ma può approssimarlo molto bene. Ciò accade, per esempio, nel momento dell'urto tra due palle da biliardo in avorio o in altro materiale plastico convenientemente scelto. Un urto perfettamente elastico può realizzarsi in caso di collisione tra particelle atomiche, nucleari o elementari. Il verificarsi di un caso così perfetto è determinato dalle *leggi quantistiche*. Gli stati interni ed i valori corrispondenti delle energie interne delle particelle atomiche sono *discrete* (*quantizzate*). Dopo la collisione le particelle possono continuare a muoversi senza cambiare il loro stato interno. Una tale collisione sarà perfettamente elastica. E così sarà ogni volta che l'energia cinetica delle particelle che entrano in collisione sia insufficiente a far passare an-

che solo una delle particelle dal suo stato *normale* allo stato *eccitato* che viene caratterizzato da un valore più grande della sua energia interna. Per energie cinetiche più grandi, l'urto può essere accompagnato dall'eccitazione di una sola o di due particelle, con aumento delle loro energie interne. È ugualmente possibile che si verifichi una collisione tra particelle eccitate dopo la quale le loro energie interne diminuiscono. In tutti gli altri casi l'urto sarà chiamato *anelastico*.

2. Studiamo dapprima il caso di *urti centrali* di palle perfettamente elastiche. In questo caso, prima dell'urto, le velocità v_1 e v_2 sono dirette lungo la retta che collega i centri delle palle. Questa retta si chiama *linea dei centri*. Al momento dell'urto, l'energia cinetica delle palle $1/2(m_1 + m_2)V^2$ legata al moto del loro centro di massa non può variare perché non può variare la velocità del centro di massa. Può variare soltanto l'energia cinetica $1/2\mu(v_1 - v_2)^2$ del moto relativo delle palle. Quando l'urto è perfettamente elastico, le palle si appiattiscono al momento dell'urto e una parte dell'energia cinetica si trasforma in energia potenziale delle deformazioni elastiche. In un certo istante la totalità di energia cinetica del moto relativo $1/2\mu(v_1 - v_2)^2$ si trasforma in energia potenziale delle palle elasticamente deformate. In questo istante, le palle sono analoghe alle molle compresse tendenti a ritornare allo stato non deformato. Cioè subito dopo la collisione comincia il processo inverso di trasformazione dell'energia delle deformazioni elastiche in energia cinetica del moto di traslazione delle palle. Quando questo processo finisce, le palle si allontanano e scompare la deformazione. Quindi, l'energia cinetica del moto di transizione delle palle riprende il suo valore iniziale di prima della collisione. Per i corpi reali questo processo si complica perché è accompagnato dalla comparsa di perturbazioni elastiche che si propagano nelle palle con la velocità del suono, dall'emissione di onde sonore, da attriti interni e da deformazioni residue. Dopo la collisione, una parte di energia si perde sotto forma di perturbazioni elastiche, di moti interni e di onde sonore emesse nell'ambiente circonvicino. Questa parte di energia è convertita alla fine in energia termica (interna) e può essere molto piccola e nel caso limite di palle perfettamente elastiche si riduce a zero.

3. la velocità delle palle dopo la collisione v_1' e v_2' si deduce agevolmente tramite le leggi di conservazione dell'energia e dell'impulso

$$m_1 v_1' + m_2 v_2' = m_1 v_1 + m_2 v_2$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_2'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2. \qquad (28.1)$$

Dato che una di queste equazioni è lineare mentre l'altra è di secondo grado, il sistema (28.1) deve fornire due soluzioni per v_1' e v_2'. Una delle soluzioni è evidente $v_1' = v_1$ e $v_2' = v_2$. Ma questa soluzione non soddisfa alle condizioni del problema, poiché implica che l'urto non avvenga e le velocità delle palle non cambino. L'esistenza di una tale soluzione è inevitabile.

Si può in effetti scrivere le leggi di conservazione dell'energia e dell'impulso per due stati qualsiasi del sistema separati da un intervallo di tempo Δt. Ma le leggi di conservazione non implicano di per se stesse che la collisione sia avvenuta. Va specificato a parte se l'urto si è verificato o meno. Se l'urto non è avvenuto, la velocità delle palle è uguale e la soluzione è $v_1' = v_1$ e $v_2' = v_2$, sopra riportata. Per trovare la soluzione corrispondente, nel caso in cui l'urto sia avvenuto, dobbiamo evidentemente supporre *una variazione* della velocità delle palle, cioè $v_1' \neq v_1$, $v_2' \neq v_2$. Scriviamo allora le equazioni (28.1) nella forma seguente:

$$m_1(v_1' - v_1) = m_2(v_2 - v_2'), \quad m_1(v_1'^2 - v_1^2) = m_2(v_2^2 - v_2'^2).$$

Poiché le quantità $v_1' - v_1$ e $v_2' - v_2$ sono diverse da zero, si possono dividere queste equazioni membro a membro. Ne deriva

$$v_1 + v_1' = v_2 + v_2'.$$

Dunque, il problema si riduce ad un sistema di due equazioni lineari, risolvendo le quali si trova l'unica soluzione

$$v_1' = -v_1 + 2\,\frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}, \quad v_2' = -v_2 + 2\,\frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} \qquad (28.2)$$

che soddisfa alla condizione del problema.

4. È utile riportare qui un altro procedimento di soluzione di questo stesso problema che semplifica i calcoli e mette meglio in rilievo la struttura delle formule finali. Studiamo dapprima il processo di collisione nel *sistema di riferimento legato al centro di masse*, cioè in quel sistema in cui il centro di massa sia immobile. Rispetto al sistema di riferimento immobile (detto *del laboratorio*) il centro di masse si muove con la velocità

$$V = \frac{m_1 v_2 + m_2 v_2}{m_1 + v_2}. \qquad (28.3)$$

Designiamo le velocità nel sistema di riferimento del centro di masse attraverso gli stesi simboli usati nei casi precedenti, introducendo però l'indice O. In questo sistema l'impulso totale è uguale a zero e le leggi di conservazione dell'impulso e dell'energia vengono riscritte nella forma

$$m_1 v_{10}' + m_2 v_{20}' = m_1 v_{10} + m_2 v_{20} = 0,$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_{10}'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{20}'^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{10}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{20}^2. \qquad (28.4)$$

Questo sistema ha due soluzioni che si possono indicare senza calcoli; la prima

$$v_{10}' = v_{10}, \quad v_{20}' = v_{20}$$

non soddisfa alle condizioni del problema. La seconda è la sola valida

$$v_{10}' = -v_{10}, \quad v_{20}' = -v_{20}.$$

Ciò dimostra che nel sistema di riferimento legato al centro di masse l'urto porta semplicemente a un cambiamento di segno di ciascuna delle velocità.

Passiamo ora al sistema di riferimento del laboratorio. È evidente che $v_{01} = v_1 - V$, $v'_{01} = v'_1 - V$, ecc. Quindi

$$(v'_1 - V) = -(v_1 - V), \quad (v'_2 - V) = -(v_2 - V),$$

da cui

$$v'_1 = -v_1 + 2V, v'_2 = -v_2 + 2V. \tag{28.5}$$

Introducendo i valori di V derivati da (28.3) troviamo le formule (28.2).

5. Consideriamo il caso in cui la seconda palla sia inizialmetne immobile ($v_2 = 0$). Allora

$$v'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1, \quad v'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1.$$

Se $m_1 > m_2$, la prima palla continuerà a muoversi nel senso iniziale, ma se $m_1 < m_2$ essa rimbalzerà in senso inverso. Con $m_1 = m_2$, la prima palla si arresterà e la seconda si metterà in moto con la velocità che possedeva inizialmente la prima. In generale con $m_1 = m_2$, dalle formule (28.2) possiamo trarre

$$v'_1 = v_2, \quad v'_2 = v_1,$$

cioè *nel caso di urto di due palle perfettamente elastiche e di uguale massa queste semplicemente si scambiano la velocità.*

Consideriamo una serie di palle perfettamente elastiche, di uguali masse, in contatto l'una coll'altra, i cui centri siano situati su una stessa retta (fig. 49). Per le dimostrazioni le palle vengono sospese a fili, e non allineate

Fig. 49.

sulla superficie di una tavola, per evitare una rotazione e quindi attrito tra questa e le palle imponiamo una deviazione alla palla *1* rispetto alla verticale e poi lasciamola andare. La palla *1* entrerà in collisione con la palla *2* alla velocità v e si fermerà trasmettendo la sua velocità, alla palla *2*. La palla *2* si comporterà allo stesso modo e si arresterà dopo aver urtato la palla *3*, quest'ultima acquisterà la velocità v. Questo processo si propaga sia a sinistra che a destra; alla fine l'ultima palla rimbalzerà a destra, con la velocità v_1 mentre tutte le altre resteranno immobili.

Imponiamo adesso una deviazione a due palle lasciandole poi andare. Ripassando per la loro posizione iniziale, esse avranno una stessa velocità v

e, con questa velocità, urteranno la palla limitrofa (fig. 50). L'esperienza dimostra che in questo caso sono solo le due ultime palle che saranno messe in moto con la velocità v, tutte le altre rimarranno in stato di quiete. Questo effetto viene così interpretato. La palla *2* urta la palla *3*; la palla *2* si arresta e la palla *3* acquista la velocità v. Ma subito dopo la palla *2* viene urtata dalla palla *1* e acquista a sua volta la velocità v. Quindi la palla *1* si arre-

Fig. 50.

sta, mentre le palle *2* e *3* si muovono entrambe a velocità v. Riprendendo il ragionamento, constateremo che è la palla *2* che si arresterà mentre le palle *3* e *4* si metteranno in moto, e così via. Alla fine le due ultime palle si metteranno in moto con la velocità v, e tutte le altre resteranno immobili. Invece di mettere in moto due palle a velocità v, se ne possono muovere *3*, *4*, ecc. Dopo l'urto si vedrà rimbalzare uno stesso numero di palle, tutte le altre rimarranno immobili.

6. Studiamo ora *un urto non centrale* (obliquo) tra due palle elastiche. L'urto si dice obliquo quando, al momento dell'urto, le direzioni delle ve-

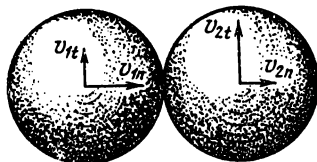



Fig. 51.

locità iniziali non coincidono con la linea dei centri delle palle. Scomponiamo, nell'istante dell'urto, la velocità iniziale di ogni palla nelle sue componenti normale v_n e tangenziale v_t (una delle componenti è diretta lungo la linea dei centri e l'altra le è perpendicolare, fig. 51). Facciamo lo stesso con la velocità che le palle acquisteranno subito dopo l'urto. Le leggi della conservazione dell'impulso e dell'energia vengono scritte in questo caso nella forma seguente:

$$m_1 v'_{1n} + m_2 v'_{2n} = m_1 v_{1n} + m_2 v_{2n}, \quad m_1 v'_{1t} + m_2 v'_{2t} = \\ = m_1 v_{1t} + m_2 v_{2t}, \qquad (28.6)$$

$$\frac{1}{2} m_1 (v'^2_{1n} + v'^2_{1t}) + \frac{1}{2} m_2 (v'^2_{2n} + v'^2_{2t}) = \frac{1}{2} m_1 (v^2_{1n} + v^2_{1t}) + \frac{1}{2} m_2 (v^2_{2n} + v^2_{2t}).$$

Abbiamo tre equazioni per determinare quattro incognite v'_{1n}, v'_{1t}, v'_{2n}, v'_{2t}. Per trovare la quarta equazione che ci serve supporremo che l'*urto non ge-*

neri forze tangenziali. Introdurre una tale supposizione ci è imposto dal fatto di scrivere la legge di conservazione dell'energia. In realtà, se le velocità tangenziali delle palle che entrano in collisione fossero uguali ($v_{1t} = v_{2t}$), il caso che stiamo studiando si ridurrebbe al problema dell'urto centrale già illustrato. Per farlo sarebe sufficeinte passare a un sistema di riferimento dove $v_{1t} = v_{2t}$. Possiamo quindi supporre, senza danneggiare la validità generale, che $v_{1t} \neq v_{2t}$. Ma se in questa situazione l'urto provocasse lo sviluppo di forze tangenziali di attrito o di scivolamento, non si potrebbe più assicurare la conservazione dell'energia meccanica. Quindi, postulando che l'urto sia *perfettamente elastico*, dobbiamo anche ammettere che le palle siano perfettamente lisce, perché in questo caso l'urto non potrà produrre forze tangenziali. Così, non si avranno variazioni delle velocità tangenziali e all'equazione (28.6) si potranno aggiungere le equazioni $v'_{1t} = v_{1t}$ e $v'_{2t} = v_{2t}$. Allora rimarranno soltanto le equazioni per le velocità normali che si distinguono dalle equazioni (28.1) soltanto per i simboli utilizzati. In definitiva si arriva alla conclusione seguente.

In caso di urto tra palle lisce e perfettamente elastiche le loro velocità tangenziali non variano, mentre le velocità normali variano esattamente come nel caso di un urto centrale. In particolare, lo stato di rotazione delle palle non cambia in seguito all'urto, potrebbe infatti cambiare soltanto sotto l'azione di forze tangenziali. *Se le palle sono identiche, il loro urto genera lo scambio delle loro velocità normali, mentre le velocità tangenziali rimangono immutate*.

7. Si consideri il caso in cui la massa di una delle palle sia infinitamente grande. In questo caso la velocità della palla grande durante la collisione non varierà. Facendo tendere il raggio di questa palla all'infinito, al limite si arriverà al problema dell'urto di una palla liscia ed elastica contro *una parete piana e liscia*. Se si collega il sistema di riferimento a una tale parete piana, si può dire, che la velocità tangenziale di una palla che entra in collisione con la parete non varierà, mentre la sua velocità normale cambierà di segno. Questo significa che la parete riflette la palla come farebbe *uno specchio*: il modulo della sua velocità non varia e l'angolo di incidenza è uguale all'angolo di riflessione.

Problemi

1. Sulla superficie orizzontale e liscia di una tavola riposa una palla di massa m_1. La palla è attaccata a una molla il cui coefficiente di elasticità è K. L'altra estremità della molla è fissa (fig. 52). La palla subisce un urto centrale elastico con un'altra palla, la cui massa è $m_2 < m_1$ e la cui velocità è uguale a v. In che direzione si sposterà la seconda palla dopo la collisione? Calcolare l'ampiezza A delle oscillazioni della prima palla dopo l'urto.

Risposta. Dopo l'urto, la seconda palla si sposterà in senso inverso

$$A = \frac{2m_2 v}{m_1 + m_2}\sqrt{\frac{m_1}{K}}.$$

2. Un sistema è composto di due palle di massa m e M legate l'una all'altra da una molla senza peso di coefficiente di elasticità k (fig. 53). Una terza palla di massa m che si sposta lungo l'asse della molla a velocità v entra in collisione elastica con la palla di massa m (fig. 53). Considerando la palla assolutamente dura, trovare dopo l'urto i valori di: 1) l'energia cinetica K del moto del sistema come intero; 2) l'energia interna E_{int} del sistema; 3) l'ampiezza A delle oscillazioni relative delle palle. Supponiamo che prima dell'urto il sistema sia in stato di quiete el la molla non sia deformata. Quali palle possono essere considerate come assolutamente dure?

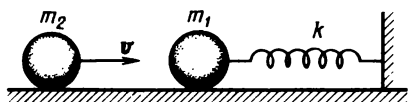



Fig. 52.

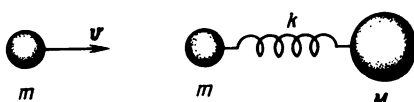



Fig. 53.

Risposta. 1) $K = \dfrac{(mv)^2}{2(M+m)}$; 2) $E_{\text{int}} = \dfrac{Mmv^2}{2(M+m)}$; 3) $A = v\sqrt{\dfrac{Mm}{k(M+m)}}$.

3. I nuclei di deuterio D e di tritio T reagiscono nel modo seguente

$$D + T \rightarrow {}^4He + n + 17{,}6\ \text{MeV}.$$

In seguito a questa reazione vengono prodotti neurtoni n e particelle α, cioè nuclei di elio ^{4}He; la reazione libera un'energia di 17,6 MeV. Calcolare la parte d'energia sottratta rispettivamente dal neutrone e dalla particella α tenendo conto del fatto che le energie cinetiche delle particelle prima della reazione erano trascurabili.

Commento. Il deuterio è l'isotopo dell'idrogeno con massa atomica uguale a 2; il tritio è l'isotopo dell'idrogeno con massa atomica uguale a 3; ^{4}He è l'elio ordinario con massa atomica 4.

Risposta. La particella α sottrae 3,5 MeV e il neutrone 14,1 MeV.

4. I nuclei di deuterio D possono interagire producendo un protone e un nucleo di tritio T. Ciascun protone sottrae un'energia cinetica di 3 MeV. Quale energia cinetica sottrae il nucleo di tritio e qual'è il rendimento energetico totale della reazione? Le energie cinetiche delle particelle prima della reazione erano trascurabili.

Risposta. L'energia che il nucleo di tritio sottrae è di 1 MeV. Il rendimento energetico totale della reazione è di 4 MeV.

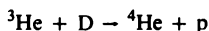
5. I nuclei di deuterio possono anche reagire secondo l'equazione

$$D + D \rightarrow {}^3He + n + 3{,}25\ \text{MeV}.$$

Quale energia sottraggono rispettivamente il neutrone e il nucleo dell'elio ^{3}He con massa atomica 3? Le energie cinetiche delle particelle prima della reazione erano trascurabili.

Risposta. L'energia sottratta dal neutrone è di 2,44 MeV, quella del nucleo ^{3}He è di 0,81 MeV.

6. Nella reazione

$${}^3He + D \rightarrow {}^4He + p$$

vengono prodotti protoni che hanno un'energia di 14,6 MeV. Qual'è l'energia sottratta dal nucleo di elio-4 (^{4}He) e qual'è il rendimento energetico totale della reazione? Le energie cinetiche delle particelle prima della reazione erano trascurabili.

Risposta. Il nucleo di ^{4}He sottrae un'energia di 3,7 MeV e il rendimento energetico totale della reazione è di 18,3 MeV.

7. Una particella in moto subisce un urto elastico con una particella della medesima massa a riposo. Dimostrare che se l'urto non fosse centrale, le particelle si disperderebbero in direzioni ortogonali. In che direzione si disperderebbero se l'urto fosse centrale?

Soluzione. Supponiamo che v sia la velocità della prima particella prima dell'urto, mentre v_1 e v_2 siano le velocità della prima e della seconda particella dopo l'urto. Le leggi di conservazione dell'impulso e dell'energia ci danno

$$v = v_1 + v_2, \qquad v^2 = v_1^2 + v_2^2.$$

Elevando la prima uguaglianza al quadrato e sottraendone la seconda uguaglianza otteniamo: $(v_1 v_2) = 0$. Se ambedue i vettori v_1 e v_2 non sono uguali a zero, il che succede nel caso di un urto non centrale, allora l'angolo formato tra di loro sarà di 90°. Per un urto centrale $v_1 = 0$, $v_2 = v_1$, cioè le particelle si scambiano le velocità.

8. Sottoponendo dell'elio a un bombardamento di particelle α di energia 1 MeV, si è constatato che la particella incidente veniva deflessa con un angolo di 60° rispetto alla sua direzione iniziale. Considerando l'urto elastico, si calcoli la sua energia e quella del nucleo di rinculo.

Risposta. 1/4 MeV e 3/4 MeV.

9. Calcolare la parte d'energia che perde una particella di massa m_1 nel momento del suo urto elastico contro una particella immobile di massa m_2, supponendo che dopo l'urto la particella incidente continui a muoversi nella stessa direzione che aveva prima dell'urto (qualora $m_1 > m_2$) o in direzione opposta (qualora $m_1 < m_2$). Dimostrare che la perdita d'energia non dipende dal fatto che le particelle siano in moto o in stato di quiete. Quale dovrà essere il valore di rapporto delle masse m_1/m_2 perché la perdita d'energia sia massima? Utilizzate i risultati ottenuti per spiegare come mai per rallentare i neutroni nei reattori nucleari, la loro dispersione viene effettuata per mezzo dei nuclei di atomi leggeri (deuterio, carbonio) e non di atomi pesanti.

Risposta. $\dfrac{\Delta E}{E} = 4\dfrac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2}$. La perdita d'energia è massima quando $m_1 = m_2$.

10. Calcolare la parte d'energia α, che viene persa da un protone in una collisione elastica con un angolo di 180° su un protone, su un deutone, su un nucleo di elio e su un nucleo di carbonio.

Risposta. $\alpha = \dfrac{4A}{(1 + A)^2}$, dove A è il peso atomico della particella contro cui urta il protone:

A	1	2	4	12
α	1	0,89	0,64	0,284

11. Qual'è nell'idrogeno l'angolo massimo di deviazione ϑ di una particella α e di un deutone durante una collisione elastica?

Soluzione. Supponiamo che m_1 sia la massa della particella deviata (particella α o deutone), v sia la sua velocità prima della collisione, m_2 sia la massa della particella urtata (atomo di idrogeno), v_1 e v_2 siano le velocità delle particelle dopo l'urto (fig. 54). Le leggi di conservazione dell'impulso e dell'energia ci danno

$$m_1 v = m_1 v_1 \cos\alpha + m_2 v_2 \cos\beta,$$

$$m_1 v_1 \sin\alpha = m_2 v_2 \sin\beta,$$

$$m_1 v^2 = m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2.$$

Eliminando l'angolo β e la velocità v_2, torviamo per v_1 un'equazione quadratica

$$(m_1 + m_2)v_1^2 - 2m_1 v v_1 \cos\alpha + (m_1 - m_2)v^2 = 0.$$

In virtù della realtà delle radici occorre che sin $\alpha \leq m_2/m_1$. L'angolo α massimo, che soddisfa a questa condizione, sarà uguale all'angolo ϑ cercato. Quindi, sin $\vartheta = m_2/m_1$. Da cui otterremo per la perticella α, $\vartheta = 14°30'$ e per il deutone $\vartheta = 30°$.

12. Una particella α che vola con velocità v_0 subisce un urto elastico contro un nucleo immobile, dopo di che prosegue il suo volo con un angolo di 90° rispetto alla direzione iniziale. Quale rapporto tra la massa m di una particella α e la massa M del nucleo soddisfa a questa condizione? Calcolare anche l'angolo ϑ tra la direzione della velocità del nucleo lanciato e la direzione iniziale della particella α incidente.

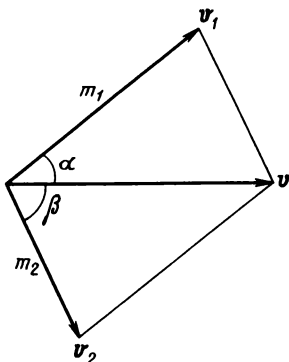



Fig. 54.

Risposta. La massa della particella α deve essere più piccola della massa del nucleo

$$v = v_0\sqrt{\frac{M-m}{M+m}}; \quad V = \frac{mv_0}{M}\sqrt{\frac{2M}{M+m}}; \quad \text{tg}\,\vartheta = \sqrt{\frac{M-m}{M+m}}.$$

13. Una particella di massa m che vola in direzione orizzontale con velocità V urta contro un atomo immobile non eccitato di massa M e dopo l'urto rimbalza indietro con velocità $V/2$; l'atomo passa ad uno stato eccitato, cioè ad uno stato di maggiore energia interna. Calcolare la velocità v dell'atomo dopo l'urto e l'enegia E spesa per la sua eccitazione. Per quali atomi non eccitati questo processo è irrealizzabile?

Risposta. $v = \frac{3}{2}\frac{mV}{M}$, $E = \frac{3mV^2}{8}\left(1 - \frac{3m}{M}\right)$. Il processo è irrealizzabile se $M < 3m$.

14. Due fasci di nuclei, uno di deuterio ed uno di tritio, vengono scagliati l'uno contro l'altro di modo che il centro di masse di queste particelle rimane immobile. L'energia cinetica totale delle particelle dei due tipi è uguale a $E = 15$ keV. Fino a quale valore E_D dell'energia si deve accelerare il nucleo di deuterio, quando il nucleo di tritio è immobile, perché il rendimento della reazione sia lo stesso? Quale energia E_T del tritio sarebbe necessaria per arrivare allo stesso risultato? La reazione in esame, come pure la reazione di cui si tratta nel problema seguente, è la reazione principale per mezzo della quale si progetta di realizzare una reazione di sintesi termonucleare controllata utilizzabile per scopi pacifici.

Risposta. $E_D = \frac{m_D + m_T}{m_T} E = \frac{5}{3} E = 25$ keV,

$$E_T = \frac{m_D + m_\mu}{m_D} E = \frac{5}{2} E = 37{,}5 \text{ keV}.$$

15. Un nucleo di deuterio viene fatto collidere contro un nucleo di tritio e reagisce con esso. Per realizzare questa reazione si propone di accelerare prima dell'urto solo una particella

per conferirle un'energia $E = 20$ keV, lasciando l'altra immobile. Che cosa è preferibile: accelerare la particella leggera o la particella pesante, supponendo che l'urto delle particelle sia centrale?

Risposta. Se viene accelerato il deuterio, l'energia legata al moto del centro di masse

$$E/(1 + m_T/m_D) = 8 \text{ keV}$$

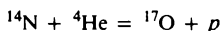
non potrà determinare la reazione. Nel caso di accelerazione del tritio questa energia sarebbe uguale a

$$E/(1 + m_D/m_T) = 12 \text{ keV}.$$

È preferibile dunque accelerare il deuterio, poiché il guadagno di energia sarebbe allora uguale a

$$\frac{m_T - m_D}{m_T + m_D} E = \frac{1}{5} E = 4 \text{ keV}.$$

16. La prima reazione nucleare artificiale

$$^{14}\text{N} + {}^{4}\text{He} = {}^{17}\text{O} + p$$

fu osservata da Rutherford nel 1919. Essa evolve assorbendo un'energia $E = 1{,}13$ MeV. Quale energia minima E_0 bisognerebbe comunicare alla particella α (cioè, al nucleo dell'atomo di elio) nel sistema di riferimento del laboratorio per ottenere, bombardando un bersaglio di ^{14}N immobile, la reazione di Rutherford?

Soluzione. Sia p_0 l'impulso della particella α prima dell'urto. Questo impulso non cambia in seguito all'urto. All'impulso corrisponde l'energia cinetica K del moto del centro di masse data da

$$K_{\text{c.m}} = \frac{p_0^2}{2(m_{\text{He}} + m_{\text{N}})} = \frac{m_{\text{He}}}{m_{\text{He}} + m_{\text{N}}} E_0,$$

che pure non cambia e perciò non partecipa in nessun modo alla reazione necleare.

Quindi, l'energia cercata viene dedotta dalla condizione seguente:

$$E_0 = E + K_{\text{c.m}} = E + \frac{m_{\text{He}}}{m_{\text{He}} + m_{\text{N}}} E_0,$$

da cui

$$E_0 = \frac{m_{\text{He}} + m_{\text{N}}}{m_{\text{N}}} E = 1{,}45 \text{ MeV}.$$

17. Si chiama *energia di soglia* E_s oppure *soglia* di una reazione nucleare il valore dell'energia della particella incidente $E \geqslant E_s$ che rende possibile la reazione nucleare quando urta contro un bersaglio immobile; con $E \leqslant E_s$ la reazione non è realizzabile. L'energia di soglia della reazione nucleare $^7\text{Li} + \text{p} \to {}^7\text{Be} + \text{n}$ (il litio è immobile) è $E_s = 1{,}88$ MeV. Nel caso di quali valori dell'energia E_p dei protoni incidenti i neutroni prodotti possono essere proiettati all'indietro rispetto agli stessi protoni?

Soluzione. Il valore minimo dell'energia cercata del protone E_p corrisponde ad un urto centrale tale che tutte le particelle si muovano prima e dopo l'urto lungo una stessa retta. Si considerano dunque soltanto gli urti centrali.

Supponiamo dapprima che l'energia del protone incidente sia uguale all'energia di soglia E_s della reazione. Il nucleo di Be e il neutrone che sono prodotti nella reazione devono allora essere in stato di quiete nel sistema di riferimento del centro di masse e muoversi in avanti con la stessa velocità nel sistema di riferimento da laboratorio. Effettuando questo moto, le particelle possiedono una energia cinetica

$$E_0 = P_s^2/2(m_{\text{Be}} + m_{\text{n}}),$$

dove P_s è l'impulso del protone corrsipndente all'energia di soglia

$$E_s = P_s^2/(2m_p).$$

La differenza tra queste energie

$$E_s - E_0 = \frac{m_{Be} + m_n - m_p}{m_{Be} + m_n} E_s \tag{28.7}$$

viene consumata nella reazione nucleare.

Calcoliamo ora l'energia E_p del protone incidente per la quale i neutroni prodotti sono immobili e i nuclei di berillio volano in avanti. Se P_p è l'impulso del protone prima della reazione, allora

$$E_p = P_p^2/(2m_p),$$

l'energia cinetica del nucleo di berillio prodotto è $E_{Be} = P_p^2/(2m_{Be})$. La differenza tra queste energie

$$E_p - E_{Be} = 1/2P_p^2\left(\frac{1}{m_p} - \frac{1}{m_{Be}}\right) = \frac{m_{Be} - m_p}{m_{Be}} E_p \tag{28.8}$$

viene consumata nella reazione e perciò deve essere uguale alla quantità (28.7). Uguagliando (28.7) e (28.8) troviamo

$$E_p = \frac{m_{Be}(m_{Be} + m_n - m_p)}{m_{Be}^2 - m_p^2} E_s,$$

o trascurando la differenza tra la massa del protone e quella del neutrone

$$E_p = \frac{m_{Be}^2}{m_{Be}^2 - m_p^2} E_s = \frac{49}{48} E_s = 1{,}92 \text{ MeV}.$$

Solo per grandi energie compariranno neutroni che si propagheranno in senso inverso rispetto alle particelle incidenti.

§ 29. *Le forze e l'energia potenziale*

1. Si può descrivere la *mutua interazione dei corpi sia in termini di forze, sia in termini di energia potenziale espressa in funzione delle coordinate delle particelle che interagiscono*. In meccanica macroscopica vengono utilizzati ambedue i procedimenti di descrizione. Il primo procedimento possiede un campo di applicazione più vasto, perché si applica anche alle forze cui non si può attribuire un'energia potenziale (le forze di attrito, per esempio). Il secondo procedimento si applica soltanto alle forze conservative. In meccanica quantistica, che si occupa soltanto dei fenomeni del microcosmo dove mancono perciò le forze dissipative, viene utilizzato esclusivamente il secondo procedimento per descrivere le interazioni delle particelle. Nelle equazioni del moto della meccanica quantistica le forze non figurano, ma è presente l'energia potenziale delle particelle che interagiscono. In questo paragrafo il problema viene trattato solo nel quadro della meccanica macroscopica.

2. Conoscendo le forze che agiscono in funzione delle coordinate dei punti materiali del sistema, se ne può calcolare l'energia potenziale. Questo problema viene risolto per mezzo del metodo di *integrazione* di cui è stato dato qualche esempio molto semplice al § 25. Si può porre anche il problema inverso: calcolare le forze applicate conoscendo l'energia potenziale in funzione delle coordinate dei punti materiali che interagiscono. Questo problema viene risolto per mezzo di un procedimento matematico più semplice, cioè per mezzo della *derivazione*. Consideriamo dapprima un punto materiale che si trovi nel campo di forza di corpi immobili qualunque. Se le forze sono conservative si può introdurre l'energia potenziale U, posseduta dal punto materiale nel campo di forza considerato. La grandezza U sarà funzione del raggio vettore $\boldsymbol{r}$ o delle coordinate x, y e z di questo punto materiale. Supponiamo che questo punto abbia subìto uno spostamento infinitesimo $d\boldsymbol{r}$. Se $\boldsymbol{F}$ è la forza applicata al punto materiale, il lavoro prodotto da queste forze durante un tale spostamento sarà uguale alla diminuzione dell'energia potenziale:

$$\boldsymbol{F}\, d\boldsymbol{r} = -\mathrm{d}U. \tag{29.1}$$

Dato che questa uguaglianza è valida per qualunque spostamento $\mathbf{d}\boldsymbol{r}$, essa definisce completamente la forza $\boldsymbol{F}$ in modulo, direzione e verso, se le funzione $U(\boldsymbol{r})$ è conosciuta. In effetti, per trovare il vettore $\boldsymbol{F}$, è sufficiente determinare le sue proiezioni F_x, F_y, F_z sugli assi di un sistema di coordinate ortogonali. In funzione di queste proiezioni l'equazione (29.1) verrà scritta

$$F_x dx + F_y dy + F_z dz = -dU. \tag{29.2}$$

Supponiamo che lo spostamento avvenga lungo un asse qualunque, l'asse X per esempio. Allora

$$F_x dx = -[dU]_{y,\, z}$$

e quindi

$$F_x = -\left(\frac{dU}{dx}\right)_{y,\, x}.$$

Gli indici y, z indicano che durante lo spostamento del punto materiale e, quindi nella derivazione, le coordinate y e z devono rimanere costanti. In altre parole, $U(x, y, z)$ deve essere considerata, per la derivazione, funzione della sola variabile x; le variabili y e z sono allora *parametri* che restano costanti mentre si deriva rispetto a x. Le grandezze che risultano da una tale derivazione si chiamano *derivate parziali della funzione* U e vengono designate col simbolo ∂ a differenza del simbolo d utilizzato per la derivazione delle funzioni di una sola variabile indipendente. Le stesse considerazioni valgono per il calcolo delle proiezioni della forza lungo gli altri due assi Y

e Z. Quindi

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}. \tag{29.3}$$

Se la funzione $U(x, y, z)$ è conosciuta, la determinazione delle componenti F_x, F_y, F_z si riduce al calcolo delle sue derivate parziali rispetto alle coordinate. È chiaro che le formule (29.3) sono valide soltanto per le forze conservative.

Diamo un esempio. Misurando l'energia potenziale di una molla a spirale sotto tensione, è risultato che essa viene definita attraverso la formula $U = 1/2\ kx^2$ dove x è l'allungamento e k il coefficiente di elasticità della molla. Poniamo l'asse X lungo l'asse della molla; fissiamo una delle estremità della molla e teniamo l'altra estremità in mano. Allora U sarà funzione della sola coordinata x. La molla tesa trasmette alla mano una forza

$$F = -\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{dU}{dx} = -\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}kx^2\right) = -kx,$$

Il segno « meno » indica che la forza F agisce in senso opposto allo spostamento, è cioè *una forza di attrazione*.

3. Si possono riunire le tre formule (29.3) in una sola formula vettoriale. A questo scopo moltiplichiamo queste formule per i vettori unitari degli assi delle coordinate $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ e addizioniamo i risultati. Allora otterremo

$$\boldsymbol{F} = -\operatorname{grad} U, \tag{29.4}$$

dove il simbolo grad U rappresenta la somma

$$\operatorname{grad} U \equiv \frac{\partial U}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\boldsymbol{k}. \tag{29.5}$$

Conformemente alla (29.4) questa somma è un vettore. Il vettore definito dalla relazione (29.5) si chiama *gradiente dello scalare U*. Al pari del simbolo grad U si utilizza anche il simbolo ∇U. Il simbolo ∇ (nabla) rappresenta un vettore simbolico chiamato *operatore di Hamilton* (1805—1865)

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}. \tag{29.6}$$

Quindi, ∇U può essere formalmente considerato come il prodotto del vettore simbolico ∇ rispetto allo scalare U. È evidente che si può parlare di gradiente non solo della funzione U, ma di qualsiasi altra funzione scalare delle coordinate. La nozione di gradiente trova numerose applicazioni in fisica e in matematica.

Per comprendere meglio il significato geometrico del gradiente è utile introdurre le *superfici di livello*, cioè la superficie su cui lo scalare U è costante. Sia S una di queste superfici che passa per il punto 1 dello spazio in cui si voglia determinare il valore del grad U (fig. 55). Poniamo l'origine

delle coordinate in questo punto e orientiamo l'asse X lungo la normale alla superficie di livello U = cost, con il versore $\boldsymbol{i}$ puntato verso gli U crescenti. Gli assi Y e Z si troveranno allora nel piano tangente alla superficie di livello U = cost. È chiaro che per questa scelta degli assi delle coordinate le derivate parziali $\frac{\partial U}{\partial y}$ e $\frac{\partial U}{\partial z}$ saranno nulle nel punto considerato, così che nella formula (29.5) resterà solo il primo termine grad $U = \frac{\partial U}{\partial x}\,\boldsymbol{i}$. Cambiamo ora le notazioni. Designamo con il simbolo $\boldsymbol{n}$ il versore della normale alla superficie di livello U = cost e con il simbolo dn la distanza (misurata lungo la normale) tra due superficie di livello U e $U + dU$ infinitamente vicine l'una all'altra, cioè la distanza tra i punti *1* e *2* (fig. 55). Si

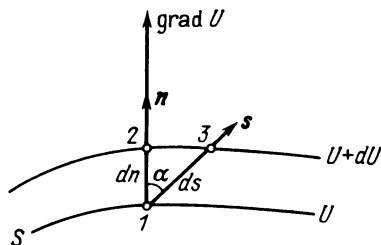



Fig. 55.

avrà allora $\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{dU}{dn}$; quest'ultima quantità, che viene designata di solito attraverso $\frac{\partial U}{\partial n}$, si chiama *derivata dello scalare U in direzione normale* alla superficie di livello. La grandezza U evidentemente cambia più rapidamente in questa direzione che in tutte le altre. Quindi, con questi nuovi simboli, la formula (29.5) acquisterà l'aspetto

$$\text{grad } U = \frac{\partial U}{\partial n}\,\boldsymbol{n}. \tag{29.7}$$

Ne deriva chiaramente che il *gradiente di una funzione U è un vettore orientato lungo la normale alla superficie di livello U* = cost *verso gli U crescenti; il suo modulo è numericamente uguale al valore della derivata della funzione U lungo la normale a questa stessa superficie.* Questa definizione presenta rispetto alla definizione (29.5) il vantaggio di essere *invariante*, contiene cioè soltanto quantità e nozioni aventi un significato geometrico diretto e non contiene nessuna quantità legata alla scelta arbitraria di un sistema di coordinate.

Stabiliamo ancora una formula assai cemplice ma importante. Facciamo passare per il punto *1* un segmento di retta *13* che forma un angolo α con la normale $\boldsymbol{n}$ (cfr. fig. 55). Scegliamo il punto *3* sulla superficie di livel-

lo $U + dU$ e designamo con ds la lunghezza di questo segmento di retta. Poiché il punto *3* si trova sulla stessa superficie di livello del punto *2*, gli incrementi della funzione U saranno gli stessi lungo i segmenti *12* e *13*. Dato che questi segmenti di retta sono infinitamente corti, si può considerare, che le aree elementari delle superfici di livello a cui giungono i segmenti, siano piane, e perciò $ds = \frac{dn}{\cos\alpha}$. Quindi

$$\frac{dU}{ds} = \frac{dU}{dn}\cos\alpha.$$

o in altri simboli

$$\frac{\partial U}{\partial s} = \frac{\partial U}{\partial n}\cos\alpha = \frac{\partial U}{\partial n}(\boldsymbol{ns}).$$

dove $\boldsymbol{s}$ è il vettore unitario lungo il segmento *13*. La quantità $\frac{\partial U}{\partial s}$ si chiama derivata della funzione U lungo la direzione del segmento *13*. Tenendo conto della definizione (29.7) del gradiente, troviamo

$$\frac{\partial U}{\partial s} = (\boldsymbol{s}\ \mathrm{grad}\ U). \tag{29.8}$$

Questa formula è verificata qualsiasi sia il significato concreto della funzione U. Se U rappresenta l'energia potenziale di un punto materiale, tenendo conto della (29.4) la formula diventa

$$\frac{\partial U}{\partial s} = -(\boldsymbol{Fs}),$$

ossia

$$F_s = -\frac{\partial U}{\partial s}. \tag{29.9}$$

È facile dedurre questa formula direttamente dalla (29.1).

4. Le formule (29.3) si possono generalizzare con facilità ad un sistema qualunque di punti materiali sottoposti soltanto a forze conservative. In questo caso l'energia potenziale U è funzione delle coordinate di tutti i punti in interazione. Invece della (29.3) scriveremo allora

$$F_{ix} = -\frac{\partial U}{\partial x_i}, \quad F_{iy} = \frac{\partial U}{\partial y_i}, \quad F_{iz} = \frac{\partial U}{\partial z_i}, \tag{29.10}$$

dove x_i, y_i, z_i sono le coordinate dell'i-esimo punto materiale del sistema e F_{ix}, F_{iy}, F_{iz} sono le componenti della forza a cui è sottoposto il sistema. L'indice i può percorrere tutti i valori possibili: ciò vuol dire che le formule (29.10) sono valide per tutti i punti del sistema.

5. In meccanica la legge di conservazione dell'energia è una conseguenza dell'equazione del moto di Newton. Si può fare il ragionamento inverso, cioè dedurre l'equazione del moto di Newton dalla legge di conservazione dell'energia? A questa domanda si deve dare risposta negativa. L'equazione che esprime la conservazione dell'energia è un'equazione *scalare*, mentre l'equazione del moto è un'equazione *vettoriale* equivalente a tre *equazioni analitiche indipendenti*. È chiaro che una sola equazione scalare non basta per dedurne tre equazioni analitiche indipendenti. Ma se il moto è unidimensionale, si può dedurre dalla legge di conservazione dell'energia, premettendo alcune ipotesi supplementari, l'equazione del moto di Newton. Ammettiamo che il punto materiale si sposti lungo una linea fissa soltanto sotto l'azione di forze conservative. Secondo la legge di conservazione dell'energia $1/2\, mv^2 + U = \text{cost}$. Per un tal moto si può ammettere che l'energia potenziale U sia funzione soltanto della distanza s misurata lungo la traiettoria del punto. Derivando l'ultima relazione rispetto al tempo, otteniamo

$$m v \dot{v} + \frac{dU}{ds} \dot{s} = 0,$$

da cui, osservando che $v = \dot{s}$ e $F_s = -\dfrac{dU}{ds}$

$$v(m\dot{v} - F_s) = 0. \tag{29.11}$$

Dividendo per v si ottiene l'equazione del moto di Newton.

Si deve osservare però che in meccanica l'equazione del moto di Newton ha un valore più generale della legge di conservazione dell'energia. Da una parte, il calcolo riportato è valido soltanto se le forze sono conservative. Dall'altra, per arrivare all'equazione del moto bisogna eliminare v dall'equazione (29.11), il che porta *l'introduzione dell'ipotesi supplementare* $v \neq 0$, che la legge di conservazione dell'energia non prende affatto in considerazione. L'equazione (29.11) ammette due soluzioni che soddisfano ugualmente alla condizione di conservazione dell'energia. Abbiamo scartato una di queste soluzioni $v = 0$ benché non sia giustificato dalla legge di conservazione dell'energia. Questa soluzione $v = 0$ tuttavia non verifica l'equazione di Newton a meno che la forza F non si annulli.

6. Per mezzo della nozione di energia potenziale si può esprimere la *condizione di equilibrio* e di stabilità di un sistema meccanico. consideriamo dapprima un sistema di punti materiali in interazione mutua non soggetto ad alcun vincolo. Poniamo che tutte le forze attive siano conservative; si può allora rappresentare le loro componenti per mezzo delle formule (29.10). In stato di equilibrio tutte le forze e anche tutte le derivate prime dell'energia potenziale U rispetto alle coordinate devono annullarsi. Ne deriva che lo *stato di equilibrio esige che l'energia potenziale sia stazionaria*. Ciò significa che la funzione U deve restare pressappoco costante quando si

sposta il sistema dal suo stato di equilibrio e le coordinate dei punti materiali subiscono incrementi infinitesimi δx_1, δy_1, . . . , δz_n. In termini più precisi, gli incrementi della funzione U, che corrispondono agli incrementi infinitesimi delle coordinate, sono degli infinitesimi *d'ordine superiore*. In particolare il *sistema sarà in equilibrio se l'energia potenziale U è minima o massima.*

Se l'energia potenziale è minima, il sistema sarà in uno stato d'equilibrio stabile. Infatti, sia U_0 il valore dell'energia potenziale all'equilibrio. Secondo il nostro teorema si può definire in vicinanza dello stato di equilibrio una piccola zona dove la differenza $U - U_0$ sia positiva. Scegliamo questa zona in modo che $0 < U - U_0 < \varepsilon$, dove ε è un numero positivo piccolo quanto si voglia. Perturbiamo l'equilibrio del sistema comunicandogli l'energia cinetica $K_0 < \varepsilon$. Poi abbandoniamo il sistema a se stesso. Il moto libero del sistema deve soddisfare alla legge di conservazione dell'energia $K + U = K_0 + U_0$ o $U - U_0 = K_0 - K$. Ne deriva che $U - U_0 < \varepsilon$, poiché l'energia cinetica K non può essere negativa. Quindi, in assenza di azione esterna il sistema non può uscire dall'intervallo $0 < U - U_0 < \varepsilon$ ed effettuerà un moto finito. Questo significa che al minimo dell'energia potenziale l'equilibrio del sistema sarà *stabile, più precisamente stabile rispetto a perturbazioni infinitamente deboli.*

Quanto sopra esposto resta valido in presenza di forze dissipative del tipo delle forze di attrito liquido o di forze giroscopiche. In effetti, all'equilibrio, quando tutti i punti materiali sono a riposo, queste forze sono nulle. Quindi la condizione necessaria per l'equilibrio, che esige che l'energia potenziale U sia stazionaria, resta valida. Resta ugualmente valida la dimostrazione della stabilità dell'equilibrio per U minima. La sola differenza consiste nel fatto che in presenza di forze dissipative l'uguaglianza che esprime la legge di conservazione dell'energia sarà sostituita dalla disuguaglianza $(K + U) - (K_0 + U_0) < 0$, o $U - U_0 < K_0 - K$, il che dà ulteriore forza alla conclusione. *La presenza di forze dissipative rende l'equilibrio ancora più stabile.* Se si sposta il sistema dal suo stato di equilibrio per poi abbandonarlo a se stesso, le forze dissipative lo ricondurranno all'equilibrio.

Per meglio evidenziare la ragione della stabilità dell'equilibrio che corrisponde al minimo di U, consideriamo un solo punto materiale che possa effettuare un moto unidimensionale. In questo caso la curva che rappresenta la variazione della funzione U si presenta come una buca di potenziale (analoga a quella rappresentata nella figura 45). In stato di equilibrio il punto materiale « riposa sul fondo della buca di potenziale » e nessuna forza agisce su di esso. È facile osservare che spostando il punto, appare subito una forza diretta verso la posizione di equilibrio, che cerca di riportare il punto materiale in questa posizione. Ma se il punto materiale è in equilibrio là dove l'energia potenziale è massima (si trova alla sommità del picco di potenziale, per esempio, il punto N nella fig. 44), il suo spostamento farà

apparire una forza il cui senso è tale da allontanarlo ancora di più dalla posizione di equilibrio. Si ha quindi uno stato di equilibrio instabile. Più generalemente si può affermare che l'equilibrio di ogni sistema meccanico è instabile se la sua energia potenziale è massima.

Queste considerazioni possono essere estese ai sistemi la cui libertà di spostamento è limitata da *vincoli imposti*. Ma si deve esigere che questi vincoli siano *ideali*, cioè tali da non effettuare alcun lavoro, qualunque siano gli spostamenti del sistema. Da esempio serva una palla perfettamente liscia infilata su un asse assolutamente rigido e perfettamente liscio che impone alla palla la sua direzione di spostamento. La forza che l'asse applica alla polla è perpendicolare agli spostamenti possibili della polla e non effettua lavoro.

In presenza di vincoli le condizioni di equilibrio di un punto materiale prendono la forma

$$-\frac{\partial U}{\partial x}+R_x=0, \qquad -\frac{\partial U}{\partial y}+R_y=0, \qquad -\frac{\partial U}{\partial z}+R_z=0, \qquad (29.12)$$

dove $\boldsymbol{R}$ è la *reazione vincolare*, cioè la forza con cui i legami agiscono sul punto materiale considerato. Per brevità, consideriamo un solo punto materiale. Nel caso di un sistema cambierà solo il numero delle equazioni, mentre il ragionamento resterà invariato. Supponiamo che δx, δy, δz siano *spostamenti possibili* del punto materiale lungo gli assi delle coordinate. Moltiplicando le equazioni (29.12) per questi spostamenti, addizionando i risultati ottenuti e facendo attenzione che le reazioni dei vincoli non producono lavoro, otterremo $\delta U \equiv \frac{\partial U}{\partial x}\delta x+\frac{\partial U}{\partial y}\delta y+\frac{\partial U}{\partial z}\delta z=0$, che è la condizione necessaria all'equilibrio. Questo significa che *in stato di equilibrio l'energia potenziale U è stazionaria*. I nostri ragionamenti concernenti la stabilità dell'equilibrio restano ancora validi. A titolo illustrativo consideriamo una palla pesante posta sul fondo di una coppa sferica (equilibrio stabile) o sulla sommità di una superficie convessa (equilibrio instabile). *In presenza di forze d'attrito a secco il carattere stazionario dell'energia potenziale U non è più indispensabile*. Da esempio serva una sbarra in equilibrio su di un piano inclinato.

V. MOMENTO DELLA QUANTITÀ DI MOTO

§ 30. *Momento di una forza e momento della quantità di moto rispetto a un'origine fissa*

1. Importanti leggi della meccanica sono legate alle nozioni di *momento di una forza* e di *momento di un impulso*. Si deve distinguere questi momenti e fare bene attenzione a non confondere i momenti di questi vettori *rispetto a un punto* e *rispetto a un asse*. Il momento di un vettore rispetto a un punto e rispetto a un asse sono due nozioni differenti benché strettamente correlate. Il momento di un vettore rispetto a un punto è esso stesso *un vettore,* mentre il momento di questo stesso vettore rispetto a un asse è la *proiezione* lungo quest'asse del suo momento rispetto a un punto preso su questo asse. Quindi il momento di un vettore rispetto ad un asse non è un vettore. Esaminiamo dapprima il momento rispetto a un punto.

Supponiamo che O sia un punto qualunque rispetto al quale si definisce il momento del vettore forza ed il momento del vettore impulso (quantità di moto). Questo punto si chiama *origine* o *polo*. Indichiamo con la lettera $\boldsymbol{r}$ il raggio vettore che collega questo punto con l'origine della forza $\boldsymbol{F}$ (fig. 56). Si chiama *momento della forza* $\boldsymbol{F}$ *rispetto al punto* O il prodotto vettoriale tra il raggio vettore $\boldsymbol{r}$ e la forza $\boldsymbol{F}$

$$\boldsymbol{M} = [\boldsymbol{rF}]. \tag{30.1}$$

Questa definizione implica che il *momento* $\boldsymbol{M}$ *non viene modificato se si fa scorrere il punto d'applicazione della forza* $\boldsymbol{F}$ *in qualsiasi altro punto situato lungo la retta di azione della forza.* In effetti, se si sposta l'origine della forza da A a A', il parallelogramma $OABC$ si trasformerà nel parallelogramma $OA'B'C$. I due parallelogrammi hanno la stessa base OC e la stessa altezza. Quindi le loro aree sono uguali, il che dimostra la nostra affermazione.

Nel caso in cui $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2$ in virtù della nota proprietà del prodotto vettoriale si deve trovare

$$[\boldsymbol{rF}] = [\boldsymbol{rF}_1] + [\boldsymbol{rF}_2]. \tag{30.2}$$

Ciò significa che il *momento della risultante di due o più forze rispetto a un punto è uguale alla somma geometrica dei momenti delle componenti rispetto a questo stesso punto.*

Nello stesso modo viene difinito anche il momento dell'impulso $\boldsymbol{p}$ di un punto materiale rispetto al polo O: esso è dato dal prodotto vettoriale

$$\boldsymbol{L} = [\boldsymbol{r}\boldsymbol{p}]. \tag{30.3}$$

2. L'introduzione di queste due nozioni si giustifica con il fatto che tra i momenti dell'impulso e della forza esiste una relazione importante che ora ricaveremo dalle equazioni di Newton. Supponiamo dapprima che l'origine O sia fissa. Derivando (30.3) rispetto al tempo, si ottiene

$$\boldsymbol{L} = [\dot{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{p}] + \boldsymbol{r}\dot{\boldsymbol{p}}].$$

Poiché per ipotesi l'origine O è fissa, la derivata $\dot{\boldsymbol{r}}$ è la velocità del punto materiale, che è legata al suo impulso dalla relazione $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$. Quindi il pri-

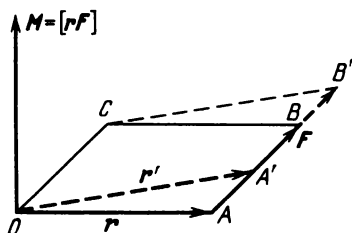



Fig. 56.

mo termine del secondo membro è uguale a zero, essendo il prodotto vettoriale dei vettori collineari $\dot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$. Per mezzo dell'equazione di Newton $\dot{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{F}$, il secondo termine della somma si può trasformare in $\dot{\boldsymbol{L}} = [\boldsymbol{r}\boldsymbol{F}]$, ossia

$$\dot{\boldsymbol{L}} = \boldsymbol{M}. \tag{30.4}$$

È la relazione che abbiamo voluto stabilire. Essa si chiama *equazione dei momenti e si esprime così: la derivata rispetto al tempo del momento della quantità di moto di un punto materiale rispetto ad una origine fissa è uguale al momento della forza attiva rispetto alla stessa origine.* Dato che non abbiamo postulato che la massa m debba rimanere costante, l'equazione (30.4) risulta valida anche nella meccanica relativistica, cioè per velocità qualsiasi di un punto materiale, perché ammesse dalla teoria della relatività.

Si può generalizzare l'equazione dei momenti (30.4) al caso di un qualunque sistema di punti materiali. Il *momento dell'impulso di un sistema di punti materiali rispetto ad un'origine qualunque* è la somma vettoriale dei momenti dell'impulso di tutti i punti materiali del sistema rispetto alla stessa origine. Anche il *momento di tutte le forze applicate a un sistema dei punti materiali* è la somma vettoriale dei momenti di ciascuna delle forze. Invece di sommare i momenti di tutte le forze, è preferibile, tenendo pre-

sente la relazione (30.2), determinare dapprima la risultante di tutte le forze e calcolare il momento di questa risultante. Si può procedere nello stesso modo per calcolare il momento dell'impulso di un sistema di punti materiali: dapprima sommare gli impulsi di tutti i punti materiali, poi calcolare il momento del vettore risusltante rispetto al punto considerato.

Postulando l'origine fissa, scriviamo l'equazione dei momenti per ogni punto materiale, e poi sommiamoli. Otterremo di nuovo la relazione (30.4) che questa volta verrà per il nostro sistema di punti materiali. È evidente che M rappresenterà allora il momento di tutte le forze esterne e interne. Quanto alle forze interne, queste possono essere ignorate, poiché il loro momento totale rispetto a un'origine qualunque è sempre uguale a zero, per la seguente ragione. Le forze interne in un sistema sono sempre opposte due a due: a una forza F_{ik} con la quale il punto k agisce sul punto i, corrisponde la forza F_{ki} uguale e opposta con la quale il punto i agisce sul punto k; queste due forze agiscono lungo la stessa retta. Siccome si può far scivolare lungo questo supporto le origini delle due forze per farle coincidere, esse si compensano allora esattamente e il loro momento totale è quindi nullo.

Quindi l'uso della terza legge di Newton permette di escludere le forze interne dall'equazione (30.4); si ottiene quindi un risultato più concreto

$$\dot{L} = M_{est}, \tag{30.5}$$

cioè la *derivata rispetto al tempo del momento dell'impulso di un sistema di punti materiali rispetto a un'origine fissa arbitraria è uguale alla somma geometrica dei momenti rispetto alla stessa origine di tutte le forze esterne.*

3. *Se il momento delle forze esterne rispetto a un'origine fissa O è uguale a zero, il momento dell'impulso del sistema rispetto alla stessa origine è costante nel tempo.* Questa è la *legge di conservazione del momento dell'impulso* (quantità di moto). Nel caso particolare di un sistema isolato di punti materiali, il suo momento della quantità di moto si conserva.

Prendiamo in esame il caso importante delle forze centrali in cui tutte le forze, applicate ai punti materiali del sistema, passano per uno stesso punto fisso O. Siccome il momento di queste forze rispetto al punto O è uguale a zero, il momento dell'impulso del sistema rispetto a questo stesso punto deve restare invariato nel tempo; viene conservato il momento dell'impulso anche se le forze dipendono dalle velocità.

La legge di conservazione del momento dell'impulso, insieme con le leggi di conservazione dell'energia e dell'impulso, è una fra le più importanti *leggi fondamentali della fisica.* Nella fisica atomica la nozione di momento dell'impulso deve essere generalizzata. In effetti, nella meccanica classica, il momento dell'impulso è determinato attraverso le coordinate e le velocità delle particelle; secondo il principio di indeterminazione di Heisenberg, queste grandezze non possono avere simultaneamente valori ben determinati nello stesso stato. Oltre a ciò, non soltanto le particelle ma anche i

campi di forze (il campo elettromagnetico per esempio) posseggono momenti dell'impulso. Ed infine i concetti e le leggi della meccanica classica non sono sempre applicabili ai processi che coinvolgono atomi, nuclei atomici o particelle elementari. Nello studio di questi processi non è sempre possibile utilizzare le nozioni classiche, in particolare quella di momento dell'impulso, così come sono state definite. Ci si può limitare ad osservare che in fisica la nozione di momento dell'impulso è generalizzabile ma è prematuro indicarne le modalità. Chi comincia a studiare la fisica deve prestare attenzione al fatto che in fisica si generalizza la nozione di momento dell'impulso della meccanica e si postula la legge della sua conservazione in tutti i processi fisici. La *legge generalizzata della conservazione del momento dell'impulso non è quindi più un teorema della meccanica e deve essere considerato come un principio indipendente della fisica che generalizza i dati sperimentali.*

Nell'esposizione della meccanica si potrebbe includere la legge di conservazione del momento dell'impulso di due punti materiali nel numero dei postulati fondamentali, come abbiamo fatto per la legge di conservazione dell'impulso di un sistema di due punti materiali. Si dovrebbe escludere allora la terza legge di Newton dal numero dei postulati fondamentali della meccanica. Abbiamo dimostrato al § 12 che questa legge è soltanto in parte una conseguenza della legge di conservazione dell'impulso. Ma se si aggiunge alla legge di conservazione dell'impulso la legge di conservazione del momento dell'impulso, la terza legge di Newton diviene una semplice conseguenza di queste due leggi. Consideriamo un sistema isolato costituito da due punti materiali che interagiscono con forze $\boldsymbol{F}_1$ e $\boldsymbol{F}_2$. Dalla legge di conservazione dell'impulso si deduce $\boldsymbol{F}_1 = -\boldsymbol{F}_2$, e dalla legge di conservazione del momento dell'impulso

$$[\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{p}_1] + [\boldsymbol{r}_2\boldsymbol{p}_2] = \text{cost.}$$

Derivando questa equazione rispetto al tempo, si ottiene

$$[\boldsymbol{r}_1\dot{\boldsymbol{p}}_1] + [\boldsymbol{r}_2\dot{\boldsymbol{p}}_2] = 0,$$

quindi

$$[\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{F}_1] + [\boldsymbol{r}_2\boldsymbol{F}_2] = 0.$$

Dato che $\boldsymbol{F}_1 = -\boldsymbol{F}_2$ si ha

$$[(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2)\boldsymbol{F}_1] = 0.$$

Ne deriva che i vettori $\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2$ e $\boldsymbol{F}_1$ sono collineari, come i vettori $\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_1$ e $\boldsymbol{F}_2$. Ciò significa che le forze $\boldsymbol{F}_1$ e $\boldsymbol{F}_2$ agiscono lungo la retta che congiunge i punti materiali in interazione.

4. Il momento delle forze e il momento dell'impulso dipendono non soltanto dal modulo, dalla direzione e dal senso dei vettori forza e impulso, ma anche dalla posizione dell'origine rispetto alla quale si definiscono i

momenti. In generale questi momenti cambiano se si adotta una nuova origine. Siano O e O' due origini fisse. I raggi vettori $\boldsymbol{r}$ e $\boldsymbol{r}'$ dello stesso punto rispetto a queste origini sono legati dalla relazione

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}' - \boldsymbol{R},$$

dove $\boldsymbol{R} = \overrightarrow{O'O}$ è il raggio vettore dell'origine O rispetto all'origine O'. Scrivendo le espressioni dei momenti dell'impulso di ciascun punto materiale del sistema e sommando queste espressioni per tutti i punti materiali troviamo

$$\Sigma[\boldsymbol{r}m\boldsymbol{v}] = \Sigma[\boldsymbol{r}'m\boldsymbol{v}] - [\boldsymbol{R}\Sigma m\boldsymbol{v}],$$

ossia

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}' - [\boldsymbol{R}\boldsymbol{p}], \tag{30.6}$$

dove $\boldsymbol{p}$ è l'impulso totale del sistema e $\boldsymbol{L}$ e $\boldsymbol{L}'$ sono rispettivamente i momenti dell'impulso rispetto alle origini O e O'. Se l'impulso $\boldsymbol{p}$ è nullo, si ha $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}'$ e il vettore del momento dell'impulso del sistema non dipende dall'origine.

Analogamente

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}' - [\boldsymbol{R}\boldsymbol{F}], \tag{30.7}$$

dove $\boldsymbol{M}$ e $\boldsymbol{M}'$ sono i momenti delle forze applicate al sistema rispetto alle origini O e O', mentre $\boldsymbol{F}$ è la somma geometrica di queste forze. Se la risultante $\boldsymbol{F}$ di tutte le forze è nulla, si ha $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}'$. Così avviene, per esempio, per *una coppia di forze,* cioè per due forze uguali e opposte agenti lungo rette parallele. Ecco perché si può indicare il momento di una coppia senza fare riferimento a un punto particolare.

§ 31. *Relazione tra il momento dell'impulso di un punto materiale e la sua velocità areolare. Il teorema delle aree*

1. Se il sistema è costituito da un solo punto, il momento dell'impulso ha un significato geometrico sempice. Poniamo che in un istante t la posizione del punto materiale sia data dal raggio vettore $\boldsymbol{r}$ (fig. 57). Nel tempo dt il raggio vettore acquista un incremento $\boldsymbol{v}dt$ e descrive l'area del triangolo infinitamente piccolo tratteggiato nella figura 57. L'area di questo triangolo può essere rappresentata dal vettore

$$d\boldsymbol{S} = \frac{1}{2}[\boldsymbol{r}\boldsymbol{v}]dt,$$

il cui modulo è uguale all'area del triangolo e la cui direzione è perpendicolare al suo piano. La derivata

$$\dot{S} = \frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}[\boldsymbol{rv}] \tag{31.1}$$

definisce l'area descritta dal raggio vettore nell'unita di tempo, e viene chiamata velocità *areolare* del moto. Dato che per definizione $\boldsymbol{L} = m[\boldsymbol{rv}]$,

$$\boldsymbol{L} = 2m\dot{\boldsymbol{S}}. \tag{31.2}$$

Nei moti non relativistici la massa m è costante, quindi il momento dell'impulso $\boldsymbol{L}$ è proporzionale alla velocità areolare $\dot{\boldsymbol{S}}$.

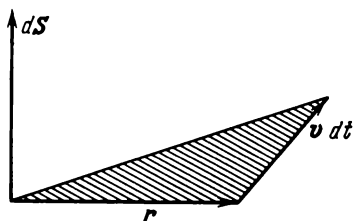



Fig. 57.

2. Se la forza che agisce su un punto materiale è centrale e passa per il polo O, il vettore $\boldsymbol{L}$ sarà costante nel tempo. Se il moto non è relativistico, anche la velocità areolare $\dot{\boldsymbol{S}}$ sarà quindi costante e la legge di conservazione del momento dell'impulso si trasforma nella *legge delle aree*

$$\dot{\boldsymbol{S}} = \text{cost}. \tag{31.3}$$

Ne derivano due conseguenze. La prima è che il piano nel quale sono contenuti i vettori $\boldsymbol{r}$ e $\boldsymbol{v}$ è perpendicolare alla direzione del vettore $\dot{\boldsymbol{S}}$. Siccome questa direzione è fissa, il piano definito è fisso. Ciò significa che *in un campo di forze centrali la traiettoria del punto materiale è una curva piana.* Siccome il modulo del vettore $\dot{\boldsymbol{S}}$ è costante, ne deriva una seconda conseguenza: *in tempi uguali, il raggio vettore di un punto materiale descrive aree uguali.* Questa proposizione viene spesso chiamata anche *legge delle aree.* Noi, invece, preferiamo attribuire alla legge delle aree una portata più vasta, caratterizzando la superficie coperta non soltanto per mezzo della sua area ma anche per il suo orientamento nello spazio.

L'inverso è ugualmente vero. *Se la traiettoria di un punto materiale è una curva piana e se il raggio vettore che passa per il polo fisso O copre in tempi uguali aree uguali, la direzione della forza applicata passa costantemente per il polo O.* In effetti, poiché il teorema equivale ad affermare che la velocità areolare $\dot{\boldsymbol{S}}$ è un vettore costante, il momento dell'impulso $\boldsymbol{L}$ sarà anch'esso costante. Quindi, dalla (30.4) $\dot{\boldsymbol{L}} = \boldsymbol{M} = [\boldsymbol{rF}] = 0$. Ne deriva che il vettore $\boldsymbol{F}$ è collineare al raggiovettore $\boldsymbol{r}$ e passa quindi costantemente per il polo O. Questo polo è quindi il *centro di forza* da cui si irradiano le forze di attrazione o di repulsione applicate al punto materiale.

3. Il teorema delle aree è valido non soltanto per un centro di forza immobile. Consideriamo due punti materiali che interagiscano tra di loro mediante forze centrali. Per mezzo della nozione di massa ridotta il problema del moto relativo dei due punti si riconduce al problema del moto di un solo punto nel campo di forza di un punto immobile (cfr. § 20). Il ruolo di centro di forza può essere assunto da una dei punti considerati rispetto al quale il secondo punto è in movimento. Allora il raggiovettore che collega questi punti descriverà, durante il moto relativo, aree uguali in tempi uguali.

§ 32. *Momento dell'impulso e momento delle forze rispetto ad un asse fisso*

1. L'equazione vettoriale (30.5) è equivalente alle tre equazioni scalari

$$\frac{dL_x}{dt} = M_x^{\text{est}}, \frac{dL_y}{dt} = M_y^{\text{est}}, \frac{dL_z}{dt} = M_z^{\text{est}}, \tag{32.1}$$

che vengono dedotte dall'equazione (30.5) attraverso la proiezione sugli assi fissi di un sistema di coordinate ortogonali. L'indice « est » ci indica che, nel calcolare il momento, le forze interne possono essere ignorate, e sarà di solito omesso d'ora in avanti. Quindi $\boldsymbol{M}$ indicherà sempre il momento delle forze esterne. Le grandezze L_x e M_x si chiameranno rispettivamente *momento dell'impulso* (quantità di moto) e *momento delle forze rispetto all'asse X*. Si dice così anche dei momenti rispetto agli assi Y e Z.

In generale, si chiamano *momento dell'impulso* L_x e *momento delle forze* M_x *rispetto ad un asse X qualunque,* le proiezioni su questo asse dei vettori $\boldsymbol{L}$ e $\boldsymbol{M}$, supponendo che il punto O sia preso lungo questo asse.

L'equazione

$$\frac{dL_x}{dt} = M_x \tag{32.2}$$

si chiama *equazione dei momenti rispetto all'asse fisso X*. Se il momento delle forze esterne rispetto a un asse fisso è nullo, il momento dell'impulso del sistema rispetto a questo stesso asse è costante. È questa la *legge di conservazione del momento dell'impulso rispetto a un asse fisso.*

2. Per chiarire il significato geometrico del momento M_x, rappresentiamo i vettori $\boldsymbol{r}$ e $\boldsymbol{F}$ nella forma

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_\perp + \boldsymbol{r}_\parallel, \boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_\perp + \boldsymbol{F}_\parallel,$$

dove $\boldsymbol{r}_\perp$ è la componente del vettore $\boldsymbol{r}$ perpendicolare all'asse X e $\boldsymbol{r}_\parallel$ è la componente dello stesso vettore parallela all'asse X. I vettori $\boldsymbol{F}_\perp$ e $\boldsymbol{F}_\parallel$ hanno

un significato analogo. Utilizzando queste scomposizioni possiamo scrivere

$$\boldsymbol{M} = [\boldsymbol{rF}] = [\boldsymbol{r}_\perp \boldsymbol{F}_\perp] + \{[\boldsymbol{r}_\perp \boldsymbol{F}_\parallel] + [\boldsymbol{r}_\parallel \boldsymbol{F}_\perp]\} + [\boldsymbol{r}_\parallel \boldsymbol{F}_\parallel].$$

L'ultimo termine è uguale a zero, essendo il prodotto vettoriale di due vettori paralleli. La somma in parentesi graffa è un vettore perpendicolare all'asse X. La sua proiezione su questo asse è nulla. Quindi la componente del vettore $\boldsymbol{M}$, parallela all'asse X, è uguale a

$$\boldsymbol{M}_\parallel = [\boldsymbol{r}_\perp \boldsymbol{F}_\perp].$$

È la sola componente che ha importanza nella determinazione del momento M_x rispetto all'asse X. Anche per trovare la proiezione L_x è sufficiente proiettare soltanto la componente parallela del vettore $\boldsymbol{L}$

$$\boldsymbol{L}_\parallel = [\boldsymbol{r}_\perp \boldsymbol{p}_\perp].$$

Questi risultati si estendono facilmente a un sistema di più forze o ad un sistema di più punti materiali.

Il *momento di una forza rispetto ad un asse* può essere definito come il prodotto di segno conveniente della componente normale della forza per la distanza minima tra quest'asse e la retta d'azione della forza. È la definizione di momento data in fisica elementare. Siccome si può spostare il punto d'applicazione della forza lungo la sua retta d'azione, questa definizione cocilia con quella data sopra. La figura 58, dove si suppone che l'asse che

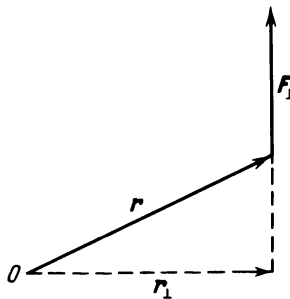



Fig. 58.

passa per il polo O sia perpendicolare al piano della figura, illustra questo fatto.

Nello stesso modo viene definito il *momento dell'impulso di un punto materiale rispetto ad un asse* come il prodotto di segno conveniente della componente dell'impulso perpendicolare a quest'asse per la distanza minima tra l'asse e la retta d'azione della forza.

§ 33. *Equazione del momento dell'impulso di un corpo sottoposto ad una rotazione attorno ad un asse fisso. Momento d'inerzia*

1. Applichiamo l'equazione dei momenti rispetto ad un asse allo studio del *moto di rotazione*. Prendiamo per asse fisso dei momenti l'*asse di rotazione*. Se il punto materiale percorre un cerchio di raggio r (fig. 59), il suo momento dell'impulso rispetto all'asse di rotazione O è $L = mvr$. Se ω è la velocità angolare di rotazione, allora $v = \omega r$ e quindi $L = mr^2\omega$. Se attorno

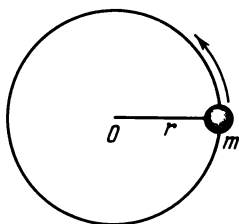



Fig. 59.

all'asse O ruota alla medesima velocità angolare ω un sistema di punti materiali, allora $L = \sum mr^2\omega$, dove la somma è estesa a tutti i punti materiali del sistema. Dato che la grandezza ω ha lo stesso valore per tutti i punti materiali, si può allora portarla fuori dal segno di somma e scrivere

$$L = I\omega, \tag{33.1}$$

dove

$$I = \sum mr^2. \tag{33.2}$$

La grandezza I, che è uguale alla somma dei prodotti delle masse dei punti materiali per i quadrati delle loro distanze dall'asse di rotazione, si chiama *momento d'inerzia del sistema rispetto a quest'asse*. L'equazione (33.1) dimostra che il *momento dell'impulso di un sistema rispetto al suo asse di rotazione è uguale al prodotto del momento d'inerzia rispetto allo stesso asse per la velocità angolare*.

La formula (33.1) continua a essere valida anche se al moto di rotazione di un sistema di punti materiali si sovrappone *un moto radiale* o *un moto di traslazione parallelamente all'asse* di rotazione. Questo risultato deriva dal fatto che il momento dell'impulso di un punto materiale è proporzionale alla sua velocità v. Se la velocità v è diretta radialmente o parallelamente all'asse di rotazione, il *momento dell'impulso rispetto a quest'asse è uguale a zero*. Questi moti non modificano quindi direttamente la forma della correlazione tra il momento dell'impulso rispetto all'asse di rotazione e la sua

velocità angolare. Ma essi esercitano un'influenza indiretta che fa sì che il momento d'inerzia I cessi si essere una costante e vari nel tempo conformemente alle variazioni istantanee della configurazione del sistema. In quest'ultimo caso l'equazione (32.2) viene riscritta nella forma

$$\frac{d}{dt}(I\omega) = M, \tag{33.3}$$

dove M è il momento delle forze esterne rispetto all'asse di rotazione. Questa è l'*equazione fondamentale della dinamica del moto di rotazione attorno ad un asse fisso* ed assomiglia all'equazione di Newton per il moto di un punto materiale. Il momento di inerzia I ha il ruolo della massa, la velocità angolare ω ha il ruolo della velocità, il momento della forza M ha il ruolo della forza ed il momento dell'impulso L ha il ruolo dell'impulso. Il momento dell'impulso L viene chiamato spesso *impulso rotazionale del sistema.* Usando questo termine si può dire che la *derivata dell'impulso rotazionale di un sistema rispetto al tempo è uguale al momento delle forze esterne rispetto all'asse di rotazione.*

Nel caso in cui il momento M delle forze esterne rispetto all'asse di rotazione è uguale a zero, l'impulso rotazionale $I\omega$ si conserva.

2. Un caso particolarmente importante è quello della rotazione di un sistema invariabile di punti materiali o di un corpo solido attorno a un asse fisso. Il momento d'inerzia I resta allora costante durante la rotazione del corpo e l'equazione (33.3) si trasforma in

$$I\frac{d\omega}{dt} = M. \tag{33.4}$$

Il *prodotto del momento d'inerzia di un corpo solido rispetto ad un asse di rotazione fisso per l'accelerazione angolare* $\frac{d\omega}{dt}$ *è uguale al momento delle forze esterne rispetto allo stesso asse.*

Per meglio capire l'equazione (33.4) vogliamo dedurla partendo direttamente dall'equazione del moto di un punto materiale. Per un moto di rotazione di un punto materiale attorno ad un asse fisso questa equazione viene scritta $m\frac{dv}{dt} = F_\tau$, dove F_τ è la componente tangenziale della forza applicata. Dato che $v = \omega r$, moltiplicando l'equazione precedente per r si ottiene $mr^2\frac{d\omega}{dt} = rF_\tau$. Facendo la somma delle equazioni che descrivono il moto di ciascuno dei punti, ritroveremo l'equazione (33.4) dove non figurano forze interne così che M rappresenta il momento delle forze esterne. Il procedimento per stabilire l'equazione (33.4) è assai semplice, ma presenta un inconveniente: conduce soltanto ad una forma particolare dell'equazione del moto di rotazione (33.4) e non alla sua forma generale (33.3).

3. Si possono stabilire altre analogie tra il moto di un punto materiale e la rotazione di un corpo solido attorno a un asse fisso. Quando un punto materiale effettua un moto di rotazione descrivendo una traiettoria circola-

re, il lavoro elementare che esso effettua ruotando di un angolo $d\varphi$ è uguale a $dA = Fds = Frd\varphi = Md\varphi$. La stessa equazione si ottiene anche per la rotazione di un corpo solido poiché si può assimilarlo ad un sistema di punti materiali che ruotano con la stessa velocità angolare ω. Le forze interne si trovano escluse perché non producono nessun lavoro nei corpi solidi (cfr. § 24). Dunque, per un corpo solido scriveremo

$$dA = Md\varphi. \tag{33.5}$$

Invece di una forza vi figura il momento delle forze esterne e invece dello spostamento lineare vi figura quello angolare.

L'energia cinetica di un corpo solido in rotazione si presenta nella forma seguente:

$$K = \frac{1}{2} \sum mv^2 = \frac{1}{2} \sum m(\omega r)^2 = \frac{\omega^2}{2} \sum mr^2,$$

quindi

$$K = \frac{1}{2} I\omega^2 = \frac{L^2}{2I} . \tag{33.6}$$

Queste espressioni somigliano alle formule corrispondenti dell'energia cinetica di un punto materiale e vengono ottenute da queste ultime operando, in modo del tutto formale, le sostituzioni $m \to I$, $v \to \omega$, $p \to L$.

§ 34. *Esempi di applicazione della legge di conservazione dell'impulso rotazionale*

1. Si possono realizzare dimostrazioni assai convincenti della legge di conservazione del momento dell'impulso per mezzo del cosiddetto *banco di Žukovskij* (1847-1921). Questo è uno sgabello rotondo che ruota liberamente su cuscinetti a sfera attorno al suo asse verticale. Durante l'esperienza lo sperimentatore sta seduto o in piedi sullo sgabello e può metterlo in movimento con una spinta dei piedi. Subito dopo la spinta le sole forze esterne che possano creare un momento rispetto all'asse di rotazione sono le forze d'attrito e la resistenza dell'aria. Le forze d'attrito sono molto deboli grazie all'uso dei cuscinetti a sfera; quanto alla resistenza dell'aria si può ignorarlo finché la velocità di rotazione dello sgabello non è grande. Quindi il momento dell'impulso del sistema costituito dallo sgabello e dello sperimentatore rispetto all'asse di rotazione non può variare nel tempo una volta che il sistema sia abbandonato a se stesso.

Lo sperimentatore sullo sgabello lo mette in rotazione e ruota insieme con esso. Durante la rotazione il momento rotazionale del sistema rimane costante. Qualsiasi siano i moti effettuati all'interno del sistema le forze interne non possono modificare il momento rotazionale. Se lo sperimentato-

re allarga le braccia, egli aumenterà il valore del momento d'inerzia I del sistema e la velocità angolare di rotazione ω deve diminuire affinché il momento rotazionale $I\omega$ rimanga costante. Quando lo sperimentatore incrocia le mani, avvicinandole dunque all'asse di rotazione, il momento d'inerzia I diminuisce e la velocità di rotazione aumenta subito. Perché l'effetto sia più evidente, lo sperimentatore tiene nelle sue mani due manubri pesanti. Quando i manubri sono allontanati il più possibile dall'asse di rotazione, il momento d'inerzia è massimo e può essere alcune volte maggiore di quando sono vicini. Quanto più aumenterà il momento d'inerzia tanto più diminuirà la velocità di rotazione angolare (fig. 60).

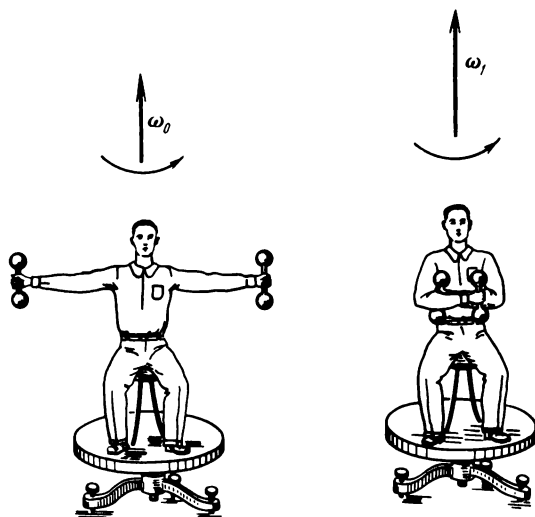



Fig. 60.

2. Quando una ballerina esegue delle piroette, gira sulla punta di un piede attormo ad un asse verticale. Le braccia e le gambe sono il più vicino possibile all'asse di rotazione e la velocità di rotazione è massima. Per rallentare e arrestare la sua rotazione la ballerina apre le braccia ed allunga una gamba. E viceversa, per comunicare al suo corpo una rotazione rapida, imprime una spinta contro il suolo e crea così un momento rotazionale nell'istante in cui il momento d'inerzia del suo corpo è più grande. Quindi, con gesti adeguati diminuisce il momento d'inerzia di più volte aumentando nello stesso tempo la sua velocità angolare di rotazione. Ella controlla così la sua velocità di rotazione modificando il momento d'inerzia del suo corpo. Fa quindi la stessa cosa dello sperimentatore sul sgabello. Il ginnasta che si esercita alla sbarra fissa utilizza lo stesso effetto.

3. Uno sportivo che effettua *un salto mortale* prende slancio battendo con due piedi sulla pedana ed imprime al suo corpo un impulso rotaziona-

le. Questo impulso si conserva sulla traiettoria in aria. All'inizio il corpo del saltatore è in estensione ed il suo momento d'inerzia è grande. Ad un certo istante egli si raggomitola (fig. 61) diminuendo così di più volte il suo momento d'inerzia. La sua velocità angolare aumenta di tanto che gli permette di fare due-tre rotazioni su se stesso. Ad un istante voluto egli ridistende il suo corpo e con una velocità angolare diminuita atterra al suolo (o si tuffa nell'acqua). Facendo questo esempio abbiamo un po' anticipato l'esposizione del problema poiché in questo caso l'asse attorno al quale ruota il corpo dello sportivo non è fisso ma anzi si muove nello spazio. Però, se l'asse di rotazione mobile passa attraverso il centro di massa dello sportivo, la sua rotazione obbedisce alle stesse leggi della rotazione attorno ad un asse fisso (cfr. § 37).

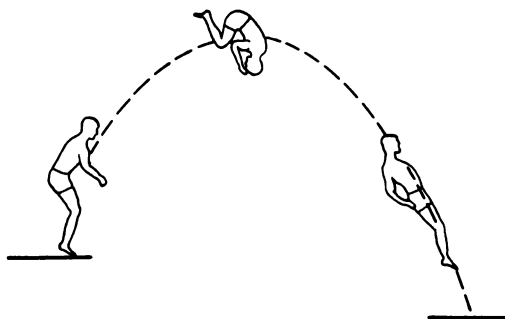



Fig. 61.

4. La Terra ruotando attorno al proprio asse si comporta come lo sgabello di Žukovskij. Ogni spostamento delle masse all'interno del globo terrestre (precipitazioni atmosferiche, attività vulcanica, orogenesi, ecc.) fa variare il momento d'inerzia della Terra e, quindi, la sua velocità angolare di rotazione. Questo causa delle fluttuazioni nella durata del giorno. In sede sperimentale si sono evidenziate delle oscillazioni periodiche nella durata del giorno, con un periodo principale di un anno e una ampiezza di circa 0,001 s. La Terra è sottoposta a differenti azioni esterne regolari come le forze d'attrito delle maree, determinate dall'attrazione gravitazionale della Luna e del Sole. Come risultato si ha un aumento del giorno solare medio di $1{,}640 \cdot 10^{-3}$ s in un secolo. È stato già menzionato nel § 1 che si possono osservare le irregolarità di rotazione della Terra per mezzo di orologi a quarzo, atomici e molecolari. La marcia di questi orologi viene regolata dalle oscillazioni del reticolo cristallino di un quarzo o per mezzo di oscillazioni interatomiche e intermolecolari che accompagnano l'emissione di linee spettrali. Queste differenti oscillazioni sono assai più stabili della rotazione della Terra attorno al suo asse o attorno al Sole. Questa è la ragione per cui il campione di tempo — il secondo — è attualmente stabilito per

mezzo dei processi oscillatori citati e non per mezzo della rotazione della Terra attorno al suo asse o attorno al Sole, come si faceva non molto tempo addietro (cfr. § 1).

5. Esaminiamo ancora una volta l'esperienza con lo sgabello di Žukovskij. Quando il momento d'inerzia di un corpo in rotazione diminuisce, la sua energia cinetica aumenta (a condizione che sia nullo il momento delle forze esterne). Un esame della formula (33.6) lo dimostra immediatamente poiché in questo caso l'impulso rotazionale del sistema $L = I\omega$ non varia. Una variazione dell'energia cinetica del sistema non può risultare che dall'azione di certe forze. Nell'esempio citato questo ruolo è assunto dalle forze interne che agiscono nel sistema. Esse non possono modificare il momento dell'impulso del sistema, ma il lavoro che esse effettuano, in generale, non è nullo e determina la variazione dell'energia cinetica di rotazione del sistema. Lo sperimentatore seduto sullo sgabello deve sviluppare una certa forza muscolare per mantenere i manubri sulle loro traiettorie circolari. La forza che egli applica ai manubri è la forza centripeta $F = m\omega^2 r$ dove m è la massa del manubrio e r è la sua distanza dall'asse di rotazione. Quando lo sperimentatore avvicina il manubrio all'asse di rotazione, la forza F effettua un lavoro positivo. Questo lavoro assicura l'aumento dell'energia cinetica del sistema. Quando i manubri vengono allontanati dall'asse di rotazione, il lavoro prodotto dalla forza F è negativo e l'energia cinetica diminuisce.

Cercheremo di convalidare queste considerazioni con un semplice calcolo. Per semplificare al massimo il calcolo si sostituisca il sistema reale con un modello ideale. Supponiamo che i manubri siano punti materiali e che le braccia dello sperimentatore abbiano una massa trascurabile. In queste condizioni il momento d'inerzia del sistema sarà espresso per mezzo della formula $I = I_0 + 2mr^2$, dove I_0 è il momento d'inerzia del sistema senza manubri, e il valore $2mr^2$ è il momento d'inerzia dei manubri (il fattore 2 tiene conto che abbiamo due manubri). Supponiamo che l'avvicinamento e l'allontanamento dei manubri dall'asse di rotazione siano infinitamente lenti. Si potrà allora ignorare in tutti gli istanti l'energia cinetica di questi moti radiali. Tutto il lavoro delle forze interne sarà utilizzato per far variare l'energia cinetica di rotazione del sistema. Calcoliamo il lavoro A, effettuato dallo sperimentatore quando egli avvicina i manubri all'asse di rotazione spostandoli dalla distanza r_1 alla distanza $r_2 < r_1$. Come è stato dimostrato nel § 24 nel calcolare il lavoro ha valore soltanto il moto relativo dei corpi in interazione. In questo problema è il moto dei manubri rispetto allo sperimentatore. Egli tira ciascun manubrio a sé con una forza $m\omega^2 r$. Il lavoro elementare che egli effettua è positivo e uguale a $-2m\omega^2 r\,dr$ (nel caso in esame $dr < 0$). Il lavoro totale A verrà determinato dall'integrale

$$A = -\int_{r_1}^{r_2} 2m\omega^2 r\,dr = -2m\int_{r_1}^{r_2} \frac{(I\omega)^2}{I^2}\,r\,dr = -2m\int_{r_1}^{r_2} \frac{L^2}{I^2}\,r\,dr.$$

Dato che il momento dell'impulso L resta costante durante il moto ed $I = I_0 + 2mr^2$, si ottiene

$$A = -2mL^2 \int_{r_1}^{r_2} \frac{r\,dr}{(I_0 + 2mr^2)^2} = \frac{L^2}{2}\left\{\frac{1}{I_0 + 2mr_2^2} - \frac{1}{I_0 + 2mr_1^2}\right\},$$

e finalmente

$$A = \frac{L^2}{2I_2} - \frac{L^2}{2I_1} = K_2 - K_1.$$

La stessa formula si applica quando i manubri si allontanano dall'asse di rotazione. La formula dimostra che l'*energia cinetica di rotazione varia in seguito al lavoro muscolare effettuato dallo sperimentatore.*

6. Le spiegazioni riportate non rispondono però alla domanda su quali siano le forze che determinano la variazione della velocità angolare di rotazione del sistema. Se il manubrio fosse stato sottoposto soltanto ad una forza centripeta, questa essendo una forza centrale, non avrebbe fatto variare l'impulso rotazionale del manubrio. Gli impulsi rotazionali dei manubri e dello sgabello con lo sperimentatore avrebbero dovuto consevarsi separatamente; i manubri e lo sgabello di Žukovskij avrebbero ruotato allora a velocità angolari differenti. In realtà invece non è così. Durante il moto radiale dei manubri le velocità agolari si uguagliano. Se ne può dedurre che in questo moto i manubri sono sottoposti non soltanto all'azione di forze centripete, ma anche a forze di pressione laterale esercitate dalle mani dello sperimentatore. Sono queste forze che fanno variare la velocità angolare di rotazione dei manubri. Anche i *manubri esercitano a loro volta una pressione laterale sulle mani dello sperimentatore facendo variare la velocità angolare di rotazione dello sgabello che porta lo sperimentatore e che subisce l'azione di queste forze di pressione laterali ad ogni moto radiale dei manubri e, soprattutto, quando esso è veloce.* Le forze supplementari di pressione laterali, ortogonali all'asse di rotazione e alla direzione della velocità relativa dei manubri, non effettuano nessun lavoro e non influenzano dunque in nessuna maniera i risultati del calcolo del lavoro A illustrati precedentemente. Le *forze di pressione laterali hanno,* però, *dei momenti rispetto all'asse di rotazione e determinano quindi una ridistribuzione del momento dell'impulso invariabile del sistema tra i manubri e lo sgabello con lo sperimentatore.* Come risultato abbiamo che tutti questi corpi ruotano con la medesima velocità angolare. Uno studio quantitativo di questo problema sarà presentato nel § 64.

7. Lo sgabello di Žukovskij permette anche di illustrare il carattere vettoriale del momento dell'impulso. A questo scopo si utilizza una ruota di bicicletta con corona appesantita. Quando la ruota gira attorno al suo asse, a causa della sua simmetria assiale il suo impulso totale p sarà nullo. È sta-

to dimostrato nel § 30 che in queste condizioni il momento dell'impulso $\boldsymbol{L}$ rispetto a un punto fisso è indipendente dalla posizione di questo punto. D'altra parte, la proiezione del vettore $\boldsymbol{L}$ sull'asse di rotazione della ruota è uguale a $I\Omega$ dove I è il momento d'inerzia della ruota e Ω è la sua velocità angolare. La proiezione del vettore $\boldsymbol{L}$ su qualsiasi direzione ortogonale all'asse della ruota è uguale a zero a causa della simmetria assiale. Ne consegue che il vettore $\boldsymbol{L}$ è diretto lungo l'asse della ruota ed ha per modulo $I\Omega$.

Lo sperimentatore sale sullo sgabello e gli viene data la ruota che gira rapidamene attorno all'asse verticale (fig. 62). Il momento dell'impulso to-

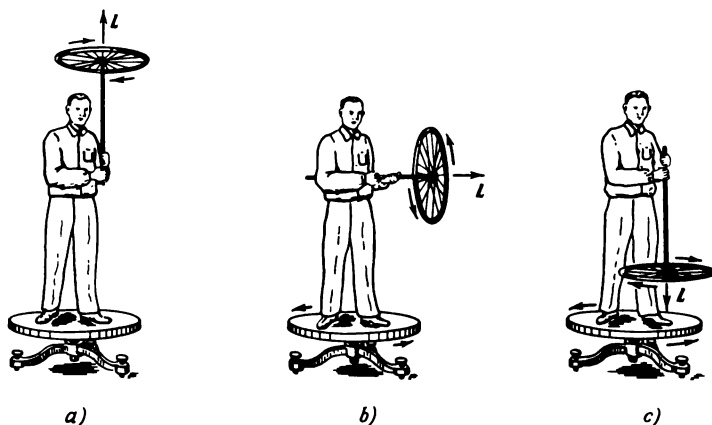



Fig. 62.

tale del sistema diretto lungo la verticale ha per modulo $I\Omega$. Facciamo coincidere l'asse verticale dello sgabello con l'asse X. Poiché il momento delle forze esterne rispetto all'asse X è uguale a zero, la proiezione L_x del momento dell'impulso totale del sistema su questo asse deve conservarsi. All'inizio dell'esperienza tutto l'impulso rotazionale è concentrato nella ruota. Poi lo sperimentatore inclina l'asse della ruota di un angolo α rispetto alla verticale; la proiezione del momento dell'impulso della ruota sull'asse X diventa allora uguale a $L_x^{ruot} = I\Omega \cos \alpha$, cioè diminuisce di $I\Omega$ (1 − cos α). Questa diminuzione deve essere compensata dall'incremento della proiezione corrispondente del momento dell'impulso dello sgabello e dello sperimentatore di una quantità $L_x^{sgab} = I\Omega(1 - \cos \alpha)$. L'insieme sgabello — sperimentatore si mette allora a ruotare con una velocità angolare ω, che viene determinata con l'equazione $I_0\omega = I\Omega(1 - \cos \alpha)$, dove I_0 è il momento di inerzia dello sgabello. Con $\alpha = 90°$, la proiezione L_x^{ruot} si annulla il che significa che essa è stata trasmessa totalmente all'insieme sgabello — sperimentatore. Con $\alpha = 180°$, la variazione dell'impulso rotazionale della ruota è massima: $\Delta L_x^{ruot} = 2L_x^{ruot}$, cioè lo sgabello e lo sperimentatore ruotano con

la velocità massima $\omega_{mass} = \frac{2I}{I_0}\Omega$. Facendo girare l'asse della ruota di180° lo sperimentatore lo riporta nella sua posizione iniziale e la rotazione dello sgabello cessa. Ma lo sgabello di solito non ritorna nella sua posizione iniziale, esso rimane ruotato rispetto all'asse verticale di un certo angolo.

Quando lo sperimentatore inclina l'asse della ruota egli subisce l'azione di considerevoli forze di pressione laterali. La ruota sembra tendere a sfugirgli dalle mani. Queste forze sono orizzontali e ortogonali all'asse della ruota e all'asse dello sgabello. La somma geometrica di queste forze è uguale a zero, però hanno un momento rispetto all'asse X: questo momento mette in rotazione lo sgabello con lo sperimentatore. L'origine di queste forze sarà precisata nel capitolo VII.

8. Per finire faremo la seguente osservazione. Prendiamo un sistema isolato, costituito da vari corpi (chiamiamolo sistema del laboratorio), che nell'istante iniziale sia in stato di quiete rispetto ad un sistema immobile (inerziale) di riferimento S. È possibile spostare il laboratorio nello spazio per mezzo soltanto di moti interni e in modo tale che tutti i corpi del laboratorio tornino alle loro posizioni iniziali? Per spostamento del laboratorio si intende una traslazione senza rotazione. Il teorema del moto del centro di massa ci dà risposta negativa a questo problema. Le cose vanno diversamente quando si tratta di una rotazione di un sistema isolato di corpi. In questo caso i *soli moti interni sono suffucienti per far ruotare nello spazio il laboratorio di un angolo qialsiasi in modo che i corpi nel laboratorio riprendano le loro posizioni iniziali.* Supponiamo che il laboratorio, ad esempio, sia costituito da un involucro chiuso A all'interno del quale si trova il solo corpo B. Supponiamo che il corpo B ad un istante dato si metta in rotazione attorno ad un asse con la velocità angolare $\dot{\varphi}_B$ (rispetto a un sistema di riferimento immobile). Allora l'involucro A si metterà a ruotare attorno allo stesso asse con la velocità angolare $\dot{\varphi}_A$. In virtù della legge di conservazione dell'impulso rotazionale $I_A\dot{\varphi}_A + I_B\dot{\varphi}_B = 0$, poiché, nell'istante iniziale, l'impulso rotazionale era nullo (I_A e I_B sono rispettivamente i momenti d'inerzia dell'involucro A e del corpo B). Se si conviene di misurare gli angoli φ_A e φ_B rispetto alle posizioni iniziali dei corpi A e B, l'integrazione porta a: $I_A\varphi_A + I_B\varphi_B = 0$. L'angolo di cui è ruotato il corpo B rispetto all'involucro A sarà uguale alla differenza $\varphi = \varphi_B - \varphi_A = -\left(\frac{I_A}{I_B} + 1\right)\varphi_A$.

Se $\varphi = 2\pi n$ (n è un *numero intero*), *il corpo B* riprenderà la sua posizione iniziale rispetto all'involucro A. L'angolo di rotazione dell'involucro φ_A, in generale, non sarà uguale a zero. La differenza di comportamento del laboratorio rispetto ad un moto di traslazione e ad un moto di rotazione viene determinata dalle circostanze seguenti. *Nel caso di un moto di traslazione continuo del corpo B, esso non riprende mai la sua posizione iniziale rispetto al corpo A.* A differenti valori della coordinata x corrispondono dif-

ferenti posizioni del corpo. Al contrario, *nel caso di una rotazione continua del corpo B, la disposizione relativa dei corpi A e B ristabilisce periodicamente:* ai valori dell'angolo φ, che differiscono di $2n\pi$, corrisponde la *stessa* posizione relativa dei corpi A e B. Un gatto in caduta libera facendo girare la sua coda e le zampe cerca di comunicare al suo sorpo una posizione che gli permetta di cadere sulle zampe. E ci riesce.

Questi processi possono essere imitati per mezzo dello sgabello di Žukovskij. Lo sperimentatore seduto sullo sgabello può, effettuando movimenti conici con un solo braccio o con le due braccia, far girare lo sgabello di un angolo qualunque. Per rafforzare l'effetto, egli può tenere in mano un oggetto pesente di grande momento d'inerzia.

§ 35. *Il teorema di Huygens-Steiner*

Stabiliamo una correlazione tra i momenti d'inerzia d'un corpo rispetto a due assi paralleli. Si suppone che questi assi siano perpendicolari al piano della figura e lo attraversino nei punti O e A. Per chiarezza indichiamo anche questi assi con O e A. Suddividiamo mentalmente il corpo in masse elementari dm. Chiamiamo $\boldsymbol{r}$ e $\boldsymbol{r}'$ i raggi vettori che congiungono una di queste masse elementari agli assi O e A, parallelamente al piano della figura (sulla figura 63 è rappresentato il caso in cui la massa elementare dm si tro-

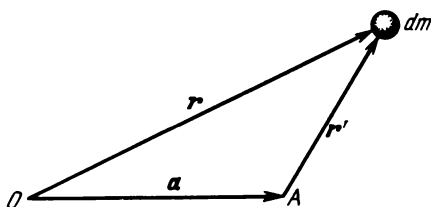



Fig. 63.

va nel piano del disengo). Allora $\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{a}$, dove $\boldsymbol{a}$ è il raggio vettore $\overrightarrow{OA}$. Ne consegue $r'^2 = r^2 + a^2 - 2(\boldsymbol{a}\boldsymbol{r})$, e

$$\int r'^2\, dm = \int r^2 dm + a^2 \int dm - 2\left(\boldsymbol{a} \int \boldsymbol{r}\, dm\right).$$

L'integrale a sinistra è il momento d'inerzia I_A del corpo rispetto all'asse A e il primo integrale a destra è il suo momento d'inerzia rispetto all'asse O. Si può scrivere l'ultimo integrale a destra nella forma $\int \boldsymbol{r}\, dm = m\boldsymbol{R}_C$, dove $\boldsymbol{R}_C$ è il raggio vettore del centro di massa C del corpo rispetto all'asse O (più precisamente $\boldsymbol{R}_C$ è la componente del raggio vettore del centro di massa C,

che è parallela al piano della figura). Quindi

$$I_A = I_O + ma^2 - 2m(\boldsymbol{aR}_C). \tag{35.1}$$

Supponiamo che l'asse O passi per il centro di masse C del corpo. Allora $\boldsymbol{R}_C = 0$, e la formula (35.1) si semplifica

$$I_A = I_C + ma^2. \tag{35.2}$$

Questa importante relazione geometrica si chiama *teorema di Huygens-Steiner* (1796-1863) *e si formula nel modo seguente: il momento d'inerzia d'un corpo rispetto ad un asse è uguale alla somma del suo momento d'inerzia, rispetto all'asse parallelo all'asse precedente e che passa per il centro di massa del corpo, e la grandezza ma^2, dove a è la distanza tra i due assi.*

§ 36. *Calcolo dei momenti d'inerzia*

1. Il momento d'inerzia di ciascun corpo rispetto ad un asse qualunque può essere calcolato o misurato [1]. Se la distribuzione di sostanza nel corpo è continua, il calcolo del suo momento d'inerzia si riconduce al calcolo dell'integrale

$$I = \int r^2 dm, \tag{36.1}$$

dove r è la distanza di un elemento di massa dm dall'asse di rotazione. L'integrazione deve essere estesa a tutta la massa del corpo. Il calcolo analitico di simili integrali è possibile per i casi più semplici di corpi di forma regolare geometrica. Per i corpi di forma irregolare il calcolo si può effettuare con metodi numerici.

In molti casi si può semplificare il calcolo dei momenti d'inerzia, applicando considerazioni di similitunde e di simmetria, il teorema di Huygens-Steiner, nonché alcune altre relazioni generali di cui si parlerà più avanti.

Consideriamo due corpi A e B simili, della stessa densità, disposti in maniera simile rispetto ad un asse di rotaizone. Le masse totali ed elementari di questi corpi hanno tra loro lo stesso rapporto che esiste tra i cubi delle loro dimensioni lineari l. Dato che le masse elementari vengono moltiplicate per i quadrati delle loro distanze dall'asse di rotazione, i momenti d'inerzia dei corpi A e B avranno tra loro il rapporto delle dimensioni lineari elevate alla quinta potenza. Quindi, $I \sim l^5$, dove

$$I = kml^2 \tag{36.2}$$

ed l indica *una dimensione caratteristica del corpo* o la distanza di una dei suoi punti caratteristici dall'asse di rotazione. Il coefficiente di proporzio-

[1] Nel § 42 si descrive un metodo di misura dei momenti d'inerzia.

nalità k dipende soltanto dalla forma del corpo e dalla sua posizione rispetto all'asse di rotazione.

2. In molti casi si può semplificare il calcolo del momento d'inerzia d'un corpo rispetto ad un esse, calcolando dapprima il suo *momento d'inerzia rispetto ad un punto.* Si noti che in dinamica il momento d'inerzia rispetto ad un punto non ha un ruolo specifico, non è che una nozione usata per semplificare i calcoli. Si chiama *momento d'inerzia d'un corpo rispetto ad un punto O* la somma dei prodotti delle masse dei punti materiali che costituiscono il corpo per i quadrati delle loro distanze R dal punto O: $\Theta = \Sigma mR^2$. Se la distribuzione della masse è continua, questa somma si riduce all'integrale $\Theta = \int R^2 dm$. È chiaro che non va confuso il momento Θ con il momento d'inerzia I rispetto ad un asse. Nel caso del momento I si devono moltiplicare le masse dm per i quadrati delle loro distanze dall'asse mentre nel caso del momento Θ si moltiplicano le masse per i quadrati delle loro distanze dal punto fisso.

Consideriamo dapprima un solo punto materiale di massa m e di coordinate ortogonali x, y, z (fig. 64). I quadrati delle distanze del punto mate-

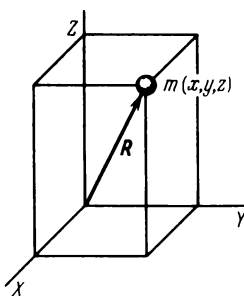



Fig. 64.

riale dagli assi delle coordinate X, Y, Z sono rispettivamente uguali a y^2+z^2, z^2+x^2, x^2+y^2, e i momenti d'inerzia rispetto a questi stessi assi sono

$$I_x = m(y^2 + z^2), \quad I_y = m(z^2 + x^2),$$

$$I_z = m(x^2 + y^2).$$

Addizionando queste uguaglianze otteniamo

$$I_x + I_y + I_z = 2m(x^2 + y^2 + z^2).$$

Ma $x^2+y^2+z^2=R^2$, dove R è la distanza del punto materiale m dall'origine delle coordinate O. Quindi

$$I_x + I_y + I_z = 2\Theta. \tag{36.3}$$

Questa relazione è valida non soltanto per un punto materiale, ma per un corpo qualunque, pòiché ogni corpo può sempre essere considerato come un insieme di punti materiali. Quindi, la *samma dei momenti d'inerzia di un corpo rispetto a tre assi ortogonali che convergono in un punto O è uguale al doppio del momento d'inerzia di questo corpo rispetto al punto O.*

Se si fanno ruotare gli assi delle coordinate X, Y, Z rispetto ai corpi, mantenendo ortogonale il sistema di coordimate, i momenti d'inerzia I_x, I_y, I_z in genere cambieranno, ma non cambierà la loro somma: essa resterà uguale a 2Θ, poiché la quantità Θ è indipendente dall'orientamento degli assi delle coordinate. Quindi la *somma dei momenti d'inerzia I_x, I_y, I_z rispetto a tre assi ortogonali d'origine O dipende soltanto dalla posizione di questa origine e non cambia se si fa variare l'orientamento degli assi*. Il significato geometrico di questa affermazione viene rivelato appieno nell'algebra tensoriale.

3. Si può ottenere un altro genere di correlazione nel caso di una distribuzione piana delle masse. Sia data una lastra di forma qualunque nel cui volume la massa è distribuita in maniera arbitraria. Se la lastra è molto sottile, si può supporre che la sostanza sia distribuita come uno strato infinitamente sottile su un piano matematico. Facciamo coincidere questo piano con il piano delle coordinate XY. Le coordinate z di tutti i punti materiali saranno nulle e il momento d'inerzia Θ della lastra rispetto all'origine delle coordinate O sarà determinato dall'espressione $\Theta = \Sigma\Delta m(x^2+y^2)$, uguale al momento d'inerzia della lastra rispetto all'asse Z. Quindi, nel caso di una distribuzione piana delle masse $I_x+I_y+I_z=2I_z$, cioè

$$I_x + I_y = I_z. \tag{36.4}$$

È quindi evidente che la grandezza Θ non sarà inferiore a ciascun momento d'inerzia I_x, I_y, I_z, ad esempio $\Theta \geqslant I_z$ (il segno di uguaglianza essendo valido soltanto per una distribuzione piana delle masse). Sottraendo la disuguaglianza $2I_z \leqslant 2\Theta$ dall'uguaglianza (36.3) si ottiene $I_x+I_y-I_z \geqslant 0$, ossia

$$I_x + I_y \geqslant I_z. \tag{36.4a}$$

Ne consegue che segmenti di retta le cui lunghezze sono numericamente uguali a I_x, I_y, I_z si può costruire un triangolo. Per la distribuzione piana delle masse (nel piano XY), la formula (36.4a) si riduce alla formula (36.4).

4. Momento d'inerzia di un'asta sottile omogenea rispetto ad un asse perpendicolare. Supponiamo che l'asse perpendicolare all'asta passi per la sua estremità A (fig. 65). Il momento d'inerzia si può scrivere $I_A = kml^2$, dove l è la lunghezza dell'asta. Il centro C dell'asta è il suo centro di massa. Secondo il teorema Huygens-Steiner $I_A = I_C + m(l/2)^2$. La grandezza I_C può essere presentata come la somma dei momenti d'inerzia di due aste CA e

di massa $m/2$ e, quindi, i momenti d'inerzia sono uguali a $k\frac{m}{2}\left(\frac{l}{2}\right)^2$. Quindi $I_C=km\left(\frac{l}{2}\right)^2$. La formula precedente può essere quindi espressa

$$kml^2 = km\left(\frac{l}{2}\right)^2 + m\left(\frac{l}{2}\right)^2,$$

quindi $k=1/3$. Si ha allora

$$I_A = \frac{1}{3}ml^2, \tag{36.5}$$

$$I_C = \frac{1}{12}ml^2. \tag{36.6}$$

È importante che l'asta sia sottile. Un'asta infinitamente sottile può essere considerata un segmento di retta e questo è sempre geometricamente simile ad una sua parte. Quindi il coefficiente k sarà lo stesso per un'asta intera o per una sua parte, ad esempio la metà. Ma per un'asta di spessore finito non esiste similitudine tra l'asta intera ed una sua parte. In questo caso il coefficiente numerico k avrà dei valori differenti per un'asta intera o la sua metà; quindi le formule (36.5) e (36.6) non sono valide per le aste di spessore finito; si può utilizzarle come approssimazioni qualora le dimensioni trasversali dell'asta siano molto piccole rispetto alla sua lunghezza.

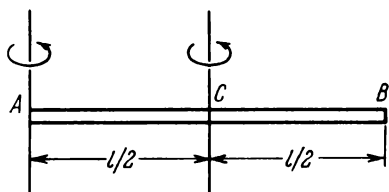
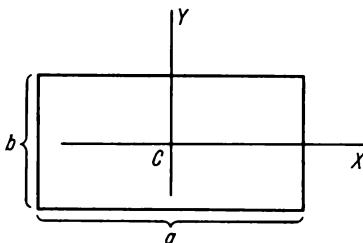



Fig. 65. Fig. 66.

5. Momento d'inerzia di una lastra e di un parallelepipedo rettangolare e omogeneo. Prendiamo gli assi coordinati X e Y in modo che passino per il centro della lastra C e siano paralleli ai suoi lati (fig. 66). Immaginiamo che tutta la sostanza della lastra si sia spostata parallelamente all'asse X e sia concentrata sull'asse Y. Con un tale spostamento le distanze tra tutti i punti materiali e l'asse X restano le stesse; di conseguenza il momento d'inerzia I_x rispetto all'asse X resta immutato. Ma in seguito a questo spostamento della sostanza, la lastra si troverà trasformata in un'asta infinitamente sottile di lunghezza l, il cui momento d'inerzia è determinato dalla formula (36.6). Si ottiene allora

$$I_x = \frac{m}{12}b^2, I_y = \frac{m}{12}a^2. \tag{36.7}$$

Il momento d'inerzia I_z della lastra rispetto all'asse Z, perpendicolare al suo piano, si calcola per mezzo della formula (36.4).

$$I_z = \frac{m}{12}(a^2 + b^2). \tag{36.8}$$

La formula (36.8) può servire ugualmente al calcolo del momento d'inerzia di un parallelepipedo rettangolo rispetto ai suoi assi geometrici. Per rendersene conto è sufficiente immaginare che il parallelepipedo sia compresso lungo uno dei suoi assi per trasformarsi in lastra; il momento d'inerzia rispetto a quest'asse non cambia in seguito a questa compressione. La formula (36.8) esprime il momento d'inerzia del parallelepipedo retto rispetto all'asse che passa per il centro della base di lati a e b. Nella figura 66 quest'asse è perpendicolare al piano della figura.

6. Momento d'inerzia di un anello infinitamente sottile. È evidente che il momento d'inerzia rispetto all'asse Z (fig. 67) è uguale a

$$I_z = mR^2 \tag{36.9}$$

dove R è il raggio dell'anello. Per simmetria $I_x = I_y$; perciò dalla formula (36.4) deriva che

$$I_x = I_y = \frac{1}{2} mR^2. \tag{36.10}$$

La formula (36.9) potrebbe servire anche a calcolare il momento d'inerzia di un cilindro vuoto omogeneo a pareti infinitamente sottili rispetto al suo asse geometrico.

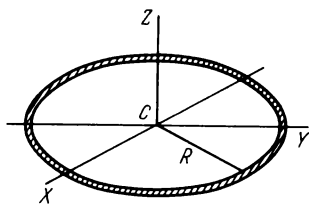



Fig. 67.

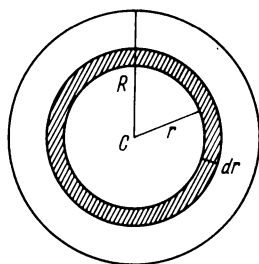



Fig. 68.

7. Momento d'inerzia d'un disco infinitamente sottile e di un cilindro pieno. Si suppone che il disco ed il cilindro siano omogenei, cioè che la sostanza che li costituise sia distribuita con densità costante. Scegliamo l'asse Z in modo che passi per il centro del disco C, perpendicolarmente al suo piano (fig. 68). Consideriamo un anello infinitamente sottile di raggio interno r e raggio esterno $r + dr$. L'area di quest'anello è $dS = 2\pi r dr$. Il suo

momento d'inerzia, calcolato per mezzo della formula (36.9), sarà $dI_z = r^2 dm$. Il momento d'inerzia del disco intero è $I_z = \int r^2 dm$. In virtù dell'omogeneità del disco $dm = m\frac{dS}{S} = 2m\frac{rdr}{R^2}$, dove $S = \pi R^2$ è l'area del disco intero. Sostituendo questa espressione sotto il segno di integrale, si ottiene

$$I_z = \frac{2m}{R^2}\int_0^R r^3 dr = \frac{1}{2} mR^2. \qquad (36.11)$$

Il momento d'inerzia del disco rispetto ad uno dei suoi diametri è, per simmetria, due volte più piccolo del valore dato dalla formula (36.4):

$$I_x = I_y = \frac{1}{4} mR^2. \qquad (36.12)$$

La formula (36.11) serve quindi anche a calcolare il momento d'inerzia d'un cilindro pieno ed omogeneo rispetto al suo asse geometrico longitudinale.

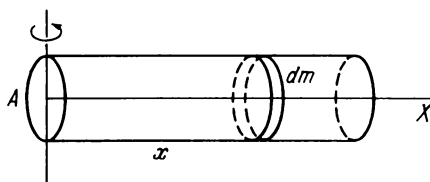



Fig. 69.

8. Momento d'inerzia d'un cilindro massiccio ed omogeneo rispetto ad un asse trasversale. Supponiamo che l'asse di rotazione passi per il centro della base A del cilindro perpendicolarmente al suo asse geometrico longitudinale (fig. 69). Immaginiamo di ritagliare un cilindro di altezza infinitesima di massa dm che si trova ad una distanza x dall'asse di rotazione. In virtù del teorema di Huygens-Steiner, il suo momento d'inerzia sarà

$$dI_A = dm \cdot x^2 + \frac{1}{4} dm \cdot R^2.$$

Allora il momento d'inerzia del cilindro intero sarà

$$I_A = \int x^2 dm + \frac{1}{4} R^2 \int dm.$$

Il primo integrale coincide nella forma con la formula del momento d'inerzia d'un asta omogenea infinitamente sottile, quindi è uguale a $1/3\ ml^2$. Il

secondo integrale è uguale a $1/4\, mR^2$. Quindi

$$I_A = \frac{1}{3} ml^2 + \frac{1}{4} mR^2. \qquad (36.13)$$

Il momento d'inerzia I_C rispetto ad un asse geometrico trasversale che passa per il centro di massa del cilindro può essere calcolato per mezzo della formula (36.13) a condizione di suddividere il cilindro in due metà di altezza $l/2$ e di massa $m/2$. Allora si ottiene

$$I_C = \frac{1}{12} ml^2 + \frac{1}{4} mR^2. \qquad (36.14)$$

Per $R \to 0$ le formule (36.13) e (36.14) si riducono alle formule (36.5) e (36.6) per un'asta infinitamente sottile.

9. Momento d'inerzia d'una sfera vuota a pareti infinitamente sottili. Calcoliamo dapprima il momento d'inerzia Θ rispetto al centro della sfera. È evidente che sarà uguale a $\Theta = mR^2$. Applichiamo poi la formula (36.3) supponendo per simmetria $I_x = I_y = I_z = I$. Ne deriva che il momento d'inerzia della sfera vuota rispetto al suo diametro è

$$I = \frac{2}{3} mR^2. \qquad (36.15)$$

10. Momento d'inerzia d'una sfera piena ed omogenea. Una sfera piena può essere considerata un insieme di strati sferici infinitamente sottili, ciascuno di massa dm (si veda fig. 68). Supponendo la sfera omogenea si avrà $dm = m\frac{dV}{V}$, dove $dV = 4\pi r^2 dr$ è il volume d'uno strato sferico e $V = \frac{4\pi}{3} R^3$ il volume della sfera intera. Per la formula (36.15) il momento d'inerzia d'uno strato sferico rispetto al suo diametro è $dI = 2/3\, dm\, r^2 = 2m\frac{r^4 dr}{R^3}$. Integrando si ottiene il momento d'inerzia della sfera piena

$$I = \frac{2}{5} mR^2. \qquad (36.16)$$

11. Momento d'inerzia di un'ellissi omogenea. Si supponga la massa uniformemente distribuita su tutta l'area dell'ellissi. Si può ottenere un ellissi per compressione uniforme di un cerchio lungo uno dei suoi diametri, lungo l'asse Y, ad esempio (fig. 70). In questo caso il momento d'inerzia rispetto all'asse Y non varia. Il suo valore iniziale era $1/4ma^2$ (a è il raggio del cerchio da cui per compressione si è ottenuta la nostra ellissi: questo raggio è uguale alla lunghezza del semi-asse maggiore dell'ellissi). Lo stesso

ragionamento è valido per l'asse X. Quindi si ha

$$I_x = \frac{1}{4} mb^2, \quad I_y = \frac{1}{4} ma^2. \tag{36.17}$$

La formula (36.4) permette di calcolare il momento d'inerzia rispetto all'asse Z perpendicolare al piano dell'ellissi:

$$I_z = \frac{m}{4}(a^2 + b^2). \tag{36.18}$$

La formula (36.18) permette anche di calcolare il momento d'inerzia d'un cilindro ellittico omogeneo rispetto al suo asse geometrico longitudinale.

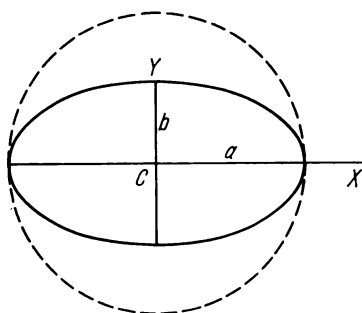



Fig. 70.

12. Momento d'inerzia di un ellissoide di rivoluzione. Si supponga la massa uniformemente distribuita in tutto il volume dell'ellissoide. Gli assi delle coordinate X, Y, Z sono orientati lungo gli assi principali dell'ellissoide. Chiamiamo a, b, c le lunghezze dei semi-assi dell'ellissoide. Calcoliamo il suo momento d'inerzia rispetto all'asse principale Z. Per compressione o per estensione uniforme d'una sfera lungo tre direzioni ortogonali, come ad esempio, le direzioni degli assi X, Y, Z, si ottiene un ellissoide. Prendiamo una sfera omogenea di raggio a, il suo momento d'inerzia è $I_s = \frac{2}{4} ma^2$. Sottoponiamola a una compressione uniforme lungo l'asse Z fino a farla diventare un disco circolare infinitamente sottile (con una distribuzione certo non uniforme delle masse). Il momento d'inerzia I_z resta lo stesso e i momenti d'inerzia I_x e I_y sono uguali per simmetria. In virtù della relazione (36.4) $I_x = I_y = \frac{1}{2} I_z = \frac{1}{5} ma^2$. Sottoponiamo intanto il disco circolare a una compressione uniforme lungo l'asse Y finché la sua dimensione lungo quest'asse sia uguale a $2b$. Il momento d'inerzia I_y non varierà durante

quest'operazione, mentre I_x sarà uguale a $I_x = 1/5\ mb^2$. Applicando di nuovo la formula (36.4) per il momento d'inerzia I_z del disco ellittico ottenuto, si ha $I_z = I_x + I_y = 1/5\ m\ (a^2 + b^2)$. Infine, sottoponendo il disco ellittico a un'estensione uniforme lungo l'asse Z fino a trasformarlo in un ellissoide di rivoluzione con semiassi a, b, c, la grandezza I_z non varierà. Quindi il momento d'inerzia dell'ellissoide di tre assi rispetto all'asse Z è

$$I_z = \frac{m}{5}(a^2 + b^2). \tag{36.19}$$

I momenti d'inerzia rispetto agli altri due assi principali sono:

$$I_x = \frac{m}{5}(b^2 + c^2),\ I_y = \frac{m}{5}(c^2 + a^2).$$

§ 37. *Equazione dei momenti rispetto ad un'origine e ad un asse mobili*

1. L'equazione dei momenti (30.5) è valida nel caso in cui l'origine O, rispetto alla quale vengono determinati i momenti $\boldsymbol{L}$ e $\boldsymbol{M}$, sia *fissa*. Così anche l'equazione (32.2) si riferisce ai momenti determinati rispetto ad *un asse fisso*. In alcuni casi però è necessario prendere in considerazione *origini* ed *assi mobili*. Esaminiamo allora come varia l'equazione dei momenti in tali casi. Sono particolarmente interessanti i casi in cui l'equazione dei momenti rispetto a un'origine mobile conserva la forma (30.5)

2. Consideriamo per cominciare un punto materiale. Poniamo che $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{p} \equiv m\boldsymbol{v}$ siano la velocità e l'impulso di questo punto rispetto ad un sistema di riferimento inerziale immobile S, ed $\boldsymbol{r}$ sia il raggio vettore che collega il punto materiale all'origine mobile O. Il moto dell'origine O può essere sia uniforme che variabile. Chiamiamo $\boldsymbol{v}_0$ la velocità di questo moto. Il momento dell'impulso di un punto in moto rispetto all'origine O può essere determinato dall'espressione (30.3), cioè $\boldsymbol{L} = [\boldsymbol{rp}]$. Derivandola otteniamo

$$\dot{\boldsymbol{L}} = [\dot{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{p}] + [\boldsymbol{r}\dot{\boldsymbol{p}}].$$

Però, adesso, $\dot{\boldsymbol{r}}$ indica non la velocità $\boldsymbol{v}$ di un punto materiale, ma la differenza tra questa velocità e la velocità $\boldsymbol{v}_O$ dell'origine mobile. Quindi

$$\dot{\boldsymbol{L}} = [(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_O)\boldsymbol{p}] + [\boldsymbol{r}\dot{\boldsymbol{p}}].$$

Applicando l'equazione di Newton $\dot{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{F}$ e tenendo conto della collinearità dei vettori $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{p}$ si ha $\dot{\boldsymbol{L}} = [\mathrm{rF}] - [\boldsymbol{v}_O\boldsymbol{p}]$ cioè

$$\dot{\boldsymbol{L}} = \boldsymbol{M} - [\boldsymbol{v}_O\boldsymbol{p}]. \tag{37.1}$$

Per generalizzare questa equazione ad un sistema di punti materiali, scriviamola per l'i-esimo punto materiale. $\dot{\boldsymbol{L}}_i = \boldsymbol{M}_i + [\boldsymbol{v}_O\boldsymbol{p}_i]$, poi sommiamo

su tutti i valori di i. In tal modo si otterrà l'equazione (37.1) nella quale p rappresenta adesso l'impulso di *tutto il sistema* di punti materiali ed M il momento delle forze esterne che agiscono su di esso.

L'impulso p può essere rappresentato da $p = mv_C$, dove v_C è la velocità del centro di massa del sistema. Quindi

$$\dot{L} = M - m[v_O v_C]. \qquad (37.2)$$

È questa l'*equazione dei momenti rispetto a un'origine mobile.*

Se l'origine mobile O coincide con il centro di massa C del sistema, si ha $v_O = v_C$ *e la formula* (37.2) *si trasforma nell'equazione* (30.5). *L'equazione dei momenti rispetto ad un centro di massa è dello stesso tipo di quella ottenuta rispetto ad un'origine fissa.* Per di più, in questo caso non è più indispensabile considerare le velocità v dei punti materiali rispetto ad un sistema di riferimento S fisso. Si può considerarle anche rispetto al centro stesso di massa C, supponendolo fisso. Se il centro C si muove in modo rettilineo e uniforme, quest'ultima asserzione deriva direttamente dal principio della relatività. Ma essa è valida anche se il moto del centro di massa è accelerato. In effetti, la velocità di ogni punto materiale può essere rappresentata nella forma $v = v_C + v_{rel}$, dove v_{rel} è la velocità del punto materiale rispetto al centro di massa C. Perciò

$$L = \sum [rmv] = \sum [rmv_C] + \sum [rmv_{rel}].$$

La penultima somma è uguale a zero; dato che la velocità v_C è la stessa per tutti i termini della somma, possiamo metterla fuori dal segno di somme, quindi $-[v_C \sum mr] = -[v_C r_C] \sum m$, dove r_C è il raggio vettore del centro di massa ed è uguale a zero, poiché per convenzione l'origine delle coordinate coincide con il centro di massa. Si ottiene quindi

$$L = \sum [rmv_{rel}],$$

il che dimostra la nostra asserzione.

Un altro caso, più generale, in cui l'equazione (37.2) si riduce alla formula semplice (30.5) si verifica quando le velocità v_O e v_C sono *sulla stessa linea.* Il prodotto $[v_O v_C]$ allora si annulla. Perciò, *quando la velocità dell'origine mobile O è parallela alla velocità del centro di massa C, l'equazione dei momenti assume la formula semplice* (30.5). Ne deriva però che nel calcolare il momento dell'impulso L bisogna riferire le velocità di tutti i punti materiali *ad un sistema di riferimento inerziale S e non al centro di massa.*

3. Si arriva ai risultati analoghi quando si tratta di assi in moto di traslazione (l'asse in moto resta costantemente parallelo alla sua direzione iniziale). Non è necessario esporre esplicitamente questi risultati, poiché l'equazione dei momenti rispetto ad un asse si deduce dall'equazione dei momenti rispetto ad un punto mediante proiezione su quest'asse.

Problemi

1. Calcolare le accelerazioni dei corpi e le tensioni dei fili di sospensione nella macchina di Atwood supponendo $m_2 > m_1$ (fig. 71). Il momento d'inerzia della puleggia rispetto al suo asse geometrico sia I ed il raggio della puleggia r. La massa del filo sia trascurabile.

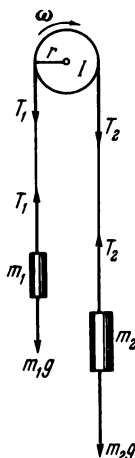
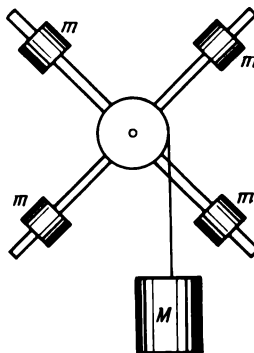



Fig. 71. Fig. 72.

Soluzione. Essendo la massa del filo trascurabile, le variazioni delle tensioni T_1 e T_2 lungo il filo possono essere ignorate. Le equazioni del moto dei pesi e della puleggia sono

$$m_1 a = T_1 - m_1 g,$$

$$m_2 a = m_2 g - T_2,$$

$$I \frac{d\omega}{dt} = r(T_2 - T_1).$$

Se il filo non slitta sulla puleggia, si ha

$$r \frac{d\omega}{dt} = a.$$

Risolvendo queste equazioni si ottiene

$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2 + \frac{I}{r^2}} g,$$

da cui poi si ricaverà T_1 e T_2. Se la massa della puleggia è trascurabile, si ha $T_1 = T_2$.

2. Una corda, che porta un carico la cui massa $M = 1$ kg, è arrotolata sulla puleggia di una croce di Oberbeck (fig. 72). Il carico viene abbassato di un'altezza $h = 1$ m fino alla posizione più bassa, poi viene risollevato. Durante questa operzione si produce una « scossa », cioè un aumento della tensione del filo. Determinare la tensione T del filo durante l'abbassamento e il sollevamento del carico e calcolare anche in modo approssimativo la tensione della corda al tempo T_{scossa} della scossa. Il raggio della puleggia è $r = 3$ cm. La croce porta quattro pesi, cia-

scuno di massa $m = 250$ g che si trovano a una distanza $R = 30$ cm dal suo asse. I momenti d'inerzia della croce e della puleggia possono essere ignorati rispetto al momento d'inerzia di tutto il carico. Non tener conto dell'allungamento del filo durante la scossa.

Risposta. $T = \dfrac{Mg}{1 + \dfrac{Mr^2}{I}} = \dfrac{Mg}{1 + \dfrac{Mr^2}{4mR^2}} = 0{,}99\, T_0,$

dove I è il momento d'inerzia del sistema e T_0 la tensione della corda quando il carico è in stato di quiete. Si può determinare la tensione media della corda al tempo T_{scossa} della scossa nel modo seguente. Si calcoli la velocità massima del carico M nella sua posizione più bassa: indichiamola con v. Durante il tempo $\Delta t = \dfrac{\pi r}{v}$, in cui la puleggia compie un mezzo giro, la quantità di moto del carico M varia di $2Mv$. Questa variazione della quantità di moto è uguale all'impulso della forza che agisce sul carico M durante lo stesso intervallo di tempo, cioè $(T_{scoss} - Mg)\Delta t$. Il calcolo dà $T_{scoss} = Mg + \dfrac{Mhr}{\pi mR^2}\, T \approx 1{,}42 T_0$.

3. Una moneta di massa m e di raggio r che ruota in un piano orizzontale attorno al suo asse geometrico con velocità angolare ω cade lungo la verticale e si incolla a un disco orizzontale montato su un asse verticale. Il disco si mette in moto. Il momento delle forze d'attrito che si crea nell'asse del disco è costante ed è uguale a M_0. Dopo quanto tempo il disco cesserà di ruotare? Quanti giri N farà il disco prima di arrestarsi? Il momento d'inerzia del disco rispetto al suo asse geometrico è I_0. La distanza tra l'asse della moneta e l'asse del disco è uguale a d.

Risposta. $t = \dfrac{mr^2}{2M_0}\omega;\quad N = \dfrac{M_0}{2I}t^2,\quad \text{dove } I = I_0 + m\left(d^2 + \dfrac{r^2}{2}\right).$

4. Un cilindro pieno, omogeneo, non lungo e di raggio r, che ruota attorno al suo asse geometrico alla velocità di n giri/s, è posto verticalmente su un piano orizzontale. Quanti giri N effettuerà il cilindro prima di cessare di ruotare attorno a se stesso? Il coefficiente di attrito di slittamento tra la base del cilindro e la superficie orizzontale non dipende dalla velocità di rotazione ed ha un valore costante k.

Risposta. $N = \dfrac{3\pi r n^2}{4kg}$.

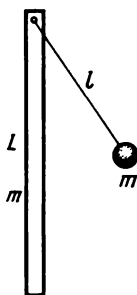
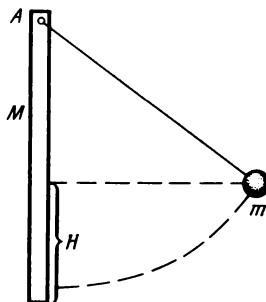



Fig. 73.

Fig. 74.

5. Un'asta sottile di massa m e di lunghezza L (fig. 73) è sospesa per una delle sue estremità all'asse orizzontale attorno al quale essa può ruotare senza attrito. Allo stesso asse orizzontale viene sospesa con un filo di lunghezza l una pallina con la stessa massa m. La pallina viene sol-

levata ad un certo angolo rispetto alla sua posizione di equilibrio e poi viene abbandonata a se stessa. Quale deve essere la lunghezza del filo di sospensione perché la pallina si arresti dopo aver urtato l'asta? Si suppone che l'urto sia perfettamente elastico.

Risposta. $l = \dfrac{L}{\sqrt{3}}$.

6. Un pendolo semplice, di massa m, e un'asta di massa M (fig. 74) sono sospesi ad uno stesso punto A attorno al quale essi possono oscillare liberamente. La pallina del pendolo viene sollevata di un'altezza H rispetto alla sua posizione di equilibrio e poi viene abbandonata a se stessa. Cadendo urta contro l'asta con un urto anelastico. Quali saranno i moti della pallina e dell'estremità inferiore dell'asta e a quali altezze arriveranno dopo l'urto?

Soluzione. La velocità della pallina, nell'istante in cui cadendo passa per la posizione di equilibrio prima dell'urto, è $v_0 = \sqrt{2gH}$. Dato che l'urto è anelastico, dopo l'urto la pallina e l'estremità inferiore dell'asta avranno la stessa velocità v. Questa velocità è determinata applicando la legge di conservazione del momento della quantità di moto rispetto all'asse A

$$mlv_0 = mlv + I\omega,$$

dove $I = 1/3\, Ml^2$ è il momento d'inerzia dell'asta rispetto all'asse stesso. Poiché $v = l\omega$, si ottiene

$$v = \frac{ml^2}{I + ml^2} v_0 = \frac{3m}{M + 3m} v_0.$$

Si tratta ora di sapere, se dopo l'urto la pallina e l'asta si muoveranno insieme o se i loro moti saranno distinti. Per rispondere a questa domanda calcoliamo la velocità v_1 della pallina e la velocità v_2 dell'estremità inferiore dell'asta che acquisterebbero se, sollevate ad una stessa altezza h_1 venissero lasciate ed i loro moti fossero indipendenti. Queste velocità vengono ottenute applicando l'equazione che esprime la legge di conservazione dell'energia

$$v^2 - v_1^2 = 2gh_1, \quad \frac{1}{2}\frac{I}{l^2}(v^2 - v_2^2) = Mg\frac{h_1}{2}.$$

Trasformando la seconda equazione si ottiene

$$v^2 - v_2^2 = 3gh_1,$$

ed osserviamo che $v_1 > v_2$. Perciò in qualsiasi posizione la pallina avrà una velocità maggiore dell'asta. Ma dato che nella nostra esperienza la pallina si muove dietro l'asta, essa vi aderirà. Ne deriva, che dopo l'urto la pallina e l'asta si solleveranno insieme; l'altezza di risalita h si deduce facilmente dalla legge di conservazione dell'energia

$$h = \frac{I + ml^2}{(M + 2m)gl^2} v^2 = \frac{6m^2}{(M + 2m)(M + 3m)} H.$$

7. Risolvere il problema precedente supponendo che prima dell'urto sia stata l'asta ad essere sollevata dalla sua posizione di equilibrio (la sua estremità inferiore sia stata sollevata ad un'altezza H).

Risposta. Dopo l'urto la pallina si solleverà ad un'altezza

$$h_1 = \frac{3}{2}\left(\frac{M}{M + 2m}\right)^2 H,$$

e l'estremità inferiore dell'asta ad un'altezza

$$h_2 = \left(\frac{M}{M + 3m}\right)^2 H = \frac{2}{3} h_1.$$

8. Un'asta rigida di lunghezza l e di massa M può ruotare attorno ad un asse orizzontale A che passa per l'estremità dell'asta (fig. 75). Si sospende a questo stesso asse A un pendolo sem-

plice, della stessa lunghezza l e di massa m. Nell'istante iniziale l'asta si trova in posizione orizzontale, e poi viene abbandonata a se stessa. Quando arriva nella posizione di equilibrio l'asta entra in collisione perfettamente elastica con la pallina del pendolo, quest'urto provoca la deformazione dei due corpi ed una parte di energia cinetica si converte in energia potenziale di deformazione. Subito dopo la deformazione si rilassa e l'energia potenziale accumulata si converte nuovamente in energia cinetica. Trovare il valore massimo dell'energia potenziale di deformazione U.

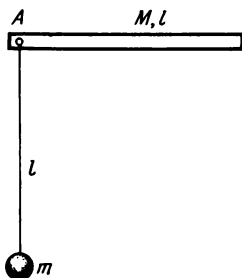
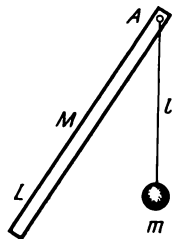



Fig. 75. Fig. 76.

Risposta. $U = \dfrac{1}{2}\dfrac{ml^2}{I + ml^2}Mgl = \dfrac{3}{2}\dfrac{Mm}{M + 3m}gl$, dove I è il momento d'inerzia dell'asta.

9. Una tavola di spessore omogeneo di lunghezza $L = 1{,}5\ m$ e di massa $M = 10$ kg sia sospesa alla sua estrmità superiore in posizione verticale; essa può ruotare attorno ad un asse orizzontale che passa per il punto di sospensione. Una pallottola operata lungo l'asse orizzontale con una velocità iniziale $V_0 = 600$ m/s colpisce l'estremità inferiore della tavola, la trapassa e prosegue il suo moto alla velocità V. Calcolare la velocità V sapendo che dopo l'impatto la tavola oscilla con un'ampiezza angolare $\alpha = 0{,}1$ rad. La massa della pallottola è $m = 10g$.

Risposta. $V = V_0 - \dfrac{M}{m}\sqrt{\dfrac{2}{3}gL}\,\sin\dfrac{\alpha}{2} = 444$ m/s.

10. Allo stesso punto A (fig. 76) sono sospesi una pallina attaccata ad un filo di lunghezza l e un'asta omogenea di lunghezza L; l'asta è deviata di un certo angolo dalla sua posizione di equilibrio. Nel momento in cui l'asta, abbandonata a se stessa, ritorna nella sua posizione di equilibrio entra in collisione elastica con la pallina. Quale deve essere il rapporto tra le masse dell'asta M e della pallina m perché, dopo l'urto, la pallina e il punto d'urto dell'asta si muovano in senso opposto con la stessa velocità? Quale deve esser il rapporto tra le masse M e m perché il processo descritto sia impossibile?

Risposta. $ML^2 = ml^2$. Dato che $L \geqslant l$, il processo descritto è possibile se $M \leqslant m$. Per $M > m$ il processo è impossibile.

11. Si fa cadere su un disco orizzontale che ruota attorno al suo asse geometrico con velocità angolare ω_1 un secondo disco che ruota attorno allo stesso asse con velocità angolare ω_2. I momenti d'inerzia dei dischi rispetto all'asse di rotazione sono I_1 e I_2. Quando i dischi entrano in collisione si uniscono per mezzo di denti. Quale sarà la variazione totale di energia cinetica di rotazione del sistema dopo la caduta del secondo disco? A che cosa è dovuto il cambiamento di questa energia? (Gli assi geometrici dei due dischi sono il prolungamento l'uno dell'altro).

Risposta. L'energia cinetica di rotazione diminuisce di

$$\Delta K = \frac{1}{2}\frac{I_1 I_2}{I_1 + I_2}(\omega_1 - \omega_2)^2.$$

12. Le pulegge di due alberi-motori sono legate da una cinghia di trasmissione (fig. 77). I raggi delle pulegge sono R_1 e R_2. I momenti d'inerzia dei due alberi rispetto ai loro assi geometrici sono I_1 e I_2. Bloccando il moto del secondo albero e della cinghia, si comunica al primo albero una velocità angolare ω_0, grazie a ciò si manifesta uno slittamento tra la cinghia e l'asse del primo albero. Si liberano poi la cinghia e l'asse del primo albero. Trascurando le forze d'attrito, ad eccezione delle forze di slittamento tra la cinghia e gli assi degli alberi, determinare le velocità di rotazione ω_1 e ω_2 in regime stazionario, cioè dopo la cessazione dello slittamento della cinghia. Calcolare anche la perdita ΔK d'energia potenziale determinata dall'attrito per slittamento ignorando la massa della cinghia.

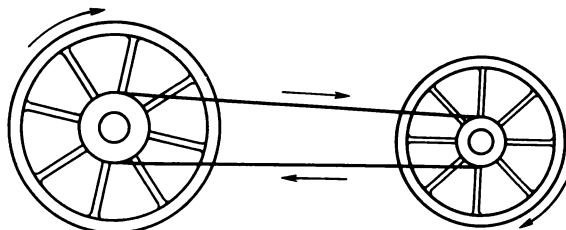



Fig. 77.

Soluzione. Grazie all'attrito per slittamento le tensioni T_1 del tratto superiore della cinghia e T_2 del tratto inferiore della cinghia saranno differenti. Applichiamo agli alberi l'equazione (33.4), si ottiene

$$I_1 \frac{d\omega_1}{dt} = (T_1 - T_2)R_1, \quad I_2 \frac{d\omega_2}{dt} = (T_2 - T_1)R_2.$$

Dividendo la prima di queste equazioni per R_1 e la seconda per R_2, addizionando e poi integrando, si ottiene

$$\frac{I_1\omega_1}{R_1} + \frac{I_2\omega_2}{R_2} = \text{cost.}$$

La costante è uguale a $I_1\omega_0/R_1$ poiché nell'istante iniziale $\omega_1 = \omega_0$ e $\omega_2 = 0$. Quando lo slittamento della cinghia cessa, allora $\omega_1 R_1 = \omega_2 R_2$. Risolvendo il sistema di equazione ottenuto, troviamo i valori delle velocità angolari dopo la cessazione dello slittamento

$$\omega_1 = \frac{I_1R_2^2}{I_1R_2^2 + I_2R_1^2}\omega_0, \quad \omega_2 = \frac{I_1R_1R_2}{I_1R_2^2 + I_2R_1^2}\omega_0.$$

La perdita d'energia cinetica dovuta all'attrito è

$$\Delta K = \frac{1}{2}\frac{I_1I_2R_1^2}{I_1R_2^2 + I_2R_1^2}\omega_0^2.$$

13. Spiegare perché nel problema precedente il momento totale della quantità di moto del sistema non si conserva.

14. Un disco omogeneo A di massa M_1 e di raggio r_1, che ruota con velocità angolare ω_0 è messo in contatto con un disco B il cui asse di rotazione è perpendicolare a quello del disco A (fig. 78). La massa del disco B è M_2, la distanza tra il punto di contatto dei dischi e l'asse del disco A è uguale a a. Determinare le velocità angolari stabilizzate ω_1 e ω_2 dei dischi e la perdita d'energia durante il processo di stabilizzazione, ignorando l'attrito degli assi nonché l'attrito di rotolamento.

Risposta. $\omega_1 = \dfrac{M_1 r_1^2}{M_1 r_1^2 + M_2 a^2}\omega_0, \quad \omega_2 = \dfrac{M_1 r_1^2}{M_1 r_1^2 + M_2 a^2}\dfrac{a}{r_2}\omega_0 = \dfrac{a}{r_2}\omega_1.$

La perdita d'energia è

$$\Delta K + \frac{M_1 M_2 r_1^2 a^2}{4(M_1 r_1^2 + M_2 a^2)}\omega_0^2.$$

15. Un palo verticale di altezza l segato alla base cade al suolo ruotando attorno alla sua base inferiore. Determinare la velocità lineare della sua estremità superiore nell'istante in cui essa urta contro il suolo. Quale punto del palo avrà in questo istante velocità uguale a quella d'un corpo in caduta libera da un'altezza uguale all'altezza iniziale del punto considerato?

Risposta. $v = \sqrt{3gl}$. Il punto cercato si trova ad una distanza $x = 2/3l$ dalla base del palo.

16. La risposta al problema precedente sarebbe diversa se il palo si trovasse inizialmente in posizione verticale su di una placca di ghiaccio perfettamente liscio e cadesse sotto l'azione della forza di gravità? In che modo il suo moto sarà differente da quello del problema precedente?

Soluzione. Secondo il teorema di König, l'energia cinetica del palo si compone dell'energia cinetica di moto del suo centro di massa $1/2\, mv_C^2$ con velocità v_C e dell'energia cinetica di rotazione attorno al centro di massa $1/2\, I\omega^2$ con velocità angolare ω. Durante la caduta il centro di massa percorre il tratto $l/2$; il lavoro prodotto durante la caduta $mgl/2$ serve ad incrementare l'energia cinetica

$$\frac{mv_C^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} = \frac{mgl}{2}.$$

Alla fine del tratto percorso, quando il palo prende la sua posizione orizzontale $v_C = 1/2l\omega$. Partendo quindi da questo presupposto ed utulizzando l'espressione $I = 1/2\, ml^2$, otteniamo $v_C = 1/2\sqrt{3gl}$. La velocità dell'estremità superiore del palo è due volte più grande e quindi uguale a $v = \sqrt{3gl}$. Si arriva quindi allo stesso risultato del problema precedente. Il carattere del moto invece, sarà differente nei due casi. Nel primo caso il palo, durante la sua caduta, effettuava un moto di rotazione attorno alla sua base inferiore e il suo centro di massa descriveva un arco di cerchio. Nel secondo caso, poiché tutte le forze che agiscono sono verticali, il centro di massa del palo descrive una retta verticale durante la sua caduta.

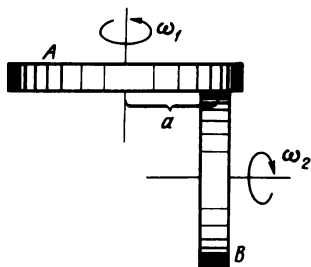
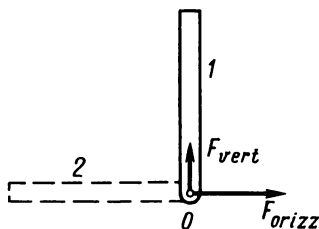



Fig. 78. Fig. 79.

17. Un'asta omogenea di massa m e di lunghezza l (fig. 79) cade con velocità iniziale nulla dalla posizione verticale 1 ruotando senza attrito attorno ad un asse orizzontale fisso O. Determinare le componenti orizzontali F_{oriz} e verticali F_{vert} della forza che applica l'asse O sull'asta in posizione orizzontale 2.

Soluzione. L'energia cinetica dell'asta, quando arriva alla posizione orizzontale, è $1/2\, I\omega^2 = 1/2mgl$. L'accelerazione centripeta del centro di massa dell'asta in questa posizione

è $\omega^2 l/2$. In virtù del teorema del moto del centro di massa si ha

$$F_{\text{oriz}} = m\omega^2 \frac{l}{2} = \frac{ml^2}{2I} mg = \frac{3}{2} mg.$$

Applicando alla rotazione dell'asta in posizione *2* l'equazione (33.4), si ottiene

$$I \frac{d\omega}{dt} = mg \frac{l}{2}.$$

Quindi la componente verticale dell'accelerazione del centro di massa nella stessa posizione sarà

$$a = \frac{l}{2} \frac{d\omega}{dt} = \frac{mgl^2}{4I} = \frac{3}{4} g.$$

Poiché, d'altra parte, deve essere

$$ma = mg - F_{\text{vert}},$$

si ottiene

$$F_{\text{vert}} = m(g - a) = 1/4\, mg.$$

18. Una trave omogenea, perfettamente rigida, di peso P, poggia con le due estremità su due supporti perfettamente rigidi (fig. 80,*a*). Si toglie all'improvviso l'uno dei supporti. Determinare la forza di pressione iniziale esercitata sul supporto rimasto (fig. 80,*b*).

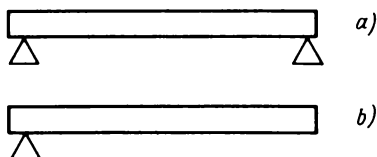



Fig. 80.

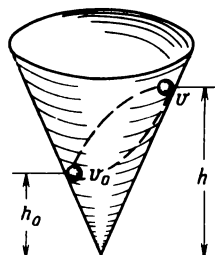



Fig. 81.

Risposta. $F = 1/4\, P$.

Spiegazione. Mentre la trave poggia sui suoi due supporti, ciascuno di loro è sottoposto ad una forza uguale a $1/2\, P$. Tolto istantaneamente uno dei supporti, la forza che esercita la trave sull'altro diminuisce in modo discontinuo dimezzandosi. Una simile discontinuità si spiega con le condizioni ideali poste: la trave ed i supporti siano perfettamente rigidi. Le trave ed i supporti reali sono deformabili. Tenendo conto di questa condizione la forza F applicata al supporto rimasto varierà continuamente.

19. Un ginnasta sta esercitandosi alla sbarra fissa e compie un grande giro in equilibrio sulle mani, cioè ruota senza piegarsi, attorno alla sbarra sotto l'azione del suo proprio peso. Calcolare in modo approssimato lo sforzo F applicato alle sue braccie ignorando l'attrito dei suoi palmi contro la sbarra.

Risposta. $F = \left(1 + \frac{4a^2 m}{I}\right) mg$, dove m è la massa, I il momento d'inerzia dell'uomo rispetto alla sbarra, a la distanza tra l'asse di rotazione e il centro di massa dell'uomo. Per calcolare il momento d'inerzia, si assimila l'uomo a un'asta omogenea che ruota attorno ad una delle sue estremità; si ottiene allora $F = 4\, mg$.

20. Sulla superficie interna di un imbuto conico in posizione veticale scivola senza attrito una pallina (fig. 81). Nell'istante iniziale essa si trova all'altezza h_0 e la sua velocità v_0 è orizzontale. Calcolare v_0 sapendo che nel suo moto ulteriore la pallina sale fino ad un'altezza h e poi comincia a scendere. Qual è la velocità v della pallina nell'istante in cui essa raggiunge l'altezza h massima?

Risposta. $v_0^2 = \dfrac{2gh^2}{h+h_0}$, $v^2 = \dfrac{2gh_0^2}{h+h_0}$.

21. Supponiamo che una corda pesante (di densità lineare ρ), di lunghezza L, passi su una puleggia di momento d'inerzia I e di raggio r. Nell'istante iniziale la puleggia è immobile ed il braccio più lungo della corda ha una lunghezza l. Calcolare la velocità angolare di rotazione della puleggia ω quando la corda cadrà a terra. La corda si muove sulla puleggia senza scivolare; si ignori l'attrito della puleggia sul suo asse.

Risposta. $\omega^2 = \dfrac{\rho g}{I + L\rho r^2}[L^2 + 4r^2 - l^2 - (L - l - \pi r)^2]$.

Suggerimento. Utilizzare la legge di conservazione dell'energia.

22. Un meteorite di massa $m = 10^5 t$ che si muove con velocità $v = 50$ km/s è entrato in collisione con la Terra in un punto di latitudine $\vartheta = 60°$. Tutta la sua energia cinetica è stata convertita in energia termica (energia interna) e il meteorite si è dissolto completamente. Quale potrebbe essere l'influenza massima di quest'urto sulla durata del giorno?

Risposta. La variazione massima ΔT della durata del giorno provocata dall'urto del meteorite viene determinata dalla formula

$$\frac{\Delta T}{T} = \pm\frac{mvR\cos\vartheta}{2\pi I}T,$$

dove $T = 86\ 164$ s è la durata del giorno, $R = 6.400$ km è il raggio della Terra, $M = 6\cdot 10^{21}$ t la massa della Terra, I il suo momento d'inerzia. Se assimiliamo la Terra a una sfera omogenea, allora $I = 2/5\ MR^2$ (in realtà, dato che la densità aumenta verso il centro della Terra, il suo momento d'inerzia è un po' più piccolo $I \approx 1/3\ MR^2$). Quindi si ha $\Delta T/T \sim 2\cdot 10^{-5}$, $\Delta T \sim 2\cdot 10^{-10}$ s.

23. Determinare quale valore minimo della velocità v di lancio all'equatore di un proiettile di massa $m = 1000$ t farebbe variare la durata del giorno terrestre di $\Delta T = 1$ min.

Risposta. In questo caso, per essere più efficace, il lancio deve essere orizzontale e nel piano dell'equatore. Ne deriva allora

$$\frac{c - v}{c} \approx \frac{5}{18}\frac{m^2c^2T^4}{\pi^2 IM(\Delta T)^2} \approx \frac{25}{36}\frac{m^2c^2T^4}{\pi^2M^2R^2(\Delta T)^2} \approx 2\cdot 10^{-22},$$

dove c è la velocità della luce nel vuoto. Tutti gli altri simboli sono gli stessi del problema precedente. Quanto ai calcoli approssimati si veda § 22.

24. Si chiamano *pulsar* i corpi celesti che emettono degli impulsi radio ad intervalli di tempo molto regolari, compresi tra $3\cdot 10^{-2}$ s e 4 s, per le pulsar conosciute fino ad oggi. Secondo la scienza moderna le pulsar sono stelle neutroniche in rotazione, formate dalla compressione gravitazionale. Le stelle neutroniche sono simili a giganteschi nuclei atomici composti soltanto da neutroni. In queste stelle la densità della materia non è omogenea ma si può supporre, per un calcolo approssimato, che sia costante in tutto il volume della stella ed uguale a 10^{14} g/cm^3 circa. Valutare il periodo T di rotazione del Sole, se lo si trasformasse in una stella neutronica. La densità cresce verso il centro del Sole e i suoi differenti strati ruotano con velocità differenti. Nel calcolo non si tenga conto di queste particolarità, ma si supponga che la densità media del Sole sia $\rho_0 = 1,41$ g/cm^3, ed il periodo di rotazione del Sole sia $T_0 = 2,2\cdot 10^6$ s.

Risposta. $T \approx T_0\left(\dfrac{\rho_0}{\rho}\right)^{2/3} = 1,3\cdot 10^{-3}$ s.

25. Un'asta rigida e liscia di lunghezza l_0 e di massa M ruota uniformemente con velocità angolare ω_0 attorno ad un asse fisso che passa per una delle estremità dell'asta perpendicolarmente al suo asse longitudinale. In quest'asta è infilata una pallina forata di massa m. All'inizio la pallina si trova all'estremità libera dell'asta, ruota insieme con l'asta ed un incastro le impedisce di cadere. Ad un certo momento viene comunicata alla pallina una velocità v, diretta lungo l'asta e orientata verso l'asse di rotazione. Determinare la distanza minima l dall'asse di rotazione alla quale arriverà la pallina e la velocità angolare ω del sistema in questa configurazione. In quale direzione si fletterà l'asta, quando la pallina si sposterà verso l'asse di rotazione? Come varierà la flessione dell'asta quando la pallina, dopo aver raggiunto la distanza minima dall'asse, comincerà a spostarsi in senso inverso?

Risposta. $\omega = \omega_0 + \dfrac{mv^2}{\left(\dfrac{1}{3}M + m\right) l_0^2 \omega_0}, \quad l = l_0 \sqrt{\dfrac{\omega_0}{\omega}}.$

Quando la pallina si avvicina all'asse di rotazione, l'asta si fletterà in senso contrario a quello di rotazione e quando essa si allontana, l'asta si fletterà in senso inverso.

§ 38. *Leggi di conservazione e simmetria dello spazio e del tempo*

1. La legge di conservazione dell'energia è una conseguenza dell'omogeneità del tempo, la legge di conservazione dell'impulso è una conseguenza dell'omogeneità dello spazio e la legge di conservazione del momento della quantità di moto deriva dal carattere isotropo dello spazio. Tali affermazioni sono molto diffuse, ma per la loro concisione possono condurre ad interpretazioni errate. Si potrebbe supporre, ad esempio, che la conoscenza di queste proprietà dello spazio e del tempo sia sufficiente per ricavare queste leggi di conservazione. Ma non è così. Le tre leggi di conservazione menzionate sono dei corollari della seconda legge di Newton (o di leggi ad essa equivalenti) a patto di aggiungervi alcune considerazioni relative alle forze agenti. Per stabilire, ad esempio, le leggi di conservazione dell'impulso e del momento della quantità di moto è sufficiente supporre che le forze sono regolate dalla *legge di uguaglianza dell'azione e della reazione*. Ma questa legge può essere sostituita anche da altri enunciati. Gli enunciati riportati all'inizio del paragrafo devono essere compresi nel senso che le leggi di conservazione citate possono essere definite dalla *seconda legge di Newton a condizione di aggiungervi le proprietà di simmetria dello spazio e del tempo, e cioè: l'omogeneità dello spazio e del tempo, nonché la proprietà di isotropia dello spazio*. Osserviamo, però, che la deduzione della legge di conservazione dell'energia implica l'introduzione di ipotesi speciali sulla natura delle forze agenti.

2. Prima di utilizzare i concetti di omogeneità e di isotropia dello spazio e quelli di omogeneità del tempo per stabilire le leggi di conservazione, è importante precisare il significato di questi concetti.

Si suol dire che l'omogeneità del tempo è l'*equivalenza di tutti gli istanti del tempo;* l'omogeneità dello spazio significa che *non esistono nello spazio posizioni privilegiate,* che tutti i punti dello spazio sono *equivalenti.* In modo analogo l'isotropia viene caratterizzata dall'assenza di direzioni privilegiate, tutte le direzioni nello spazio sono equivalenti. Ma simili affermazioni sono assai imprecise e addirittura errate se si prendono alla lettera. Le direzioni orientate verso il centro della Terra, ad esempio, sono del tutto differenti dalle direzioni orizzontali. Per un alpinista le sue posizioni presso la base e la sommità di una montagna sono tutt'altro che equivalenti. Un corpo che si trova in cima ad una montagna, abbandonato a se stesso, può rotolare giù, ma non potrà mai salire verso la vetta a meno che gli sia comunicata una velocità sufficiente. Anche la nozione di tempo, ad esempio, è del tutto diversa per un uomo giovane e pieno di vigore e per un uomo sul declinare della vita. Che cosa si intende allora per omogeneità del tempo, per omogeneità e isotropia dello spazio?

L'omogeneità del tempo significa che se si mettono tutti i corpi d'un sistema isolato in condizioni identiche in due istanti qualsiasi, a partire da questi istanti tutti i fenomeni evolveranno in modo perfettamente identico.

L'omogeneità dello spazio significa che se si trasferisce un sistema isolato da un punto dello spazio ad un altro, in modo che tutti i corpi del sistema si trovino nelle stesse condizioni nella nuova posizione, l'evoluzione di tutti i fenomeni successivi non subirà modificazioni. Nello stesso senso si deve intendere anche l'isotropia dello spazio osservando, però, che, invece della traslazione del sistema isolato, si tratta della sua *rotazione* nello spazio di un angolo qualunque.

Si deve anche osservare, come è stato fatto nel § 15 a proposito del principio di relatività di Galilei, che non si deve intendere per sistema isolato tutto l'Universo, perché allora le proprietà di simmetria dello spazio e del tempo diventerebbero evidenti di per se stesse. Ma nello stesso tempo esse perderebbero di significato, poiché non si può parlare di traslazione o di rotazione di un sistema di corpi che rispetto ad altri corpi. Si tratta dunque non dell'intero universo ma di quelle sue parti che si possano considerare, con buona approssimazione, dei *sistemi isolati.* Ne consegue che le proprietà di simmetria dello spazio e del tempo di cui abbiamo già parlato non sono affatto evidenti a priori e devono essere considerate come *generalizzazioni fondamentali di dati sperimentali.*

3. Dopo queste precisazioni, vogliamo stabilire la legge di conservazione dell'energia in meccanica. La dinamica mette a nostra disposizione una conseguenza della seconda legge di Newton che si esprime con la formula

$$A_{12} = K_2 - K_1. \qquad (38.1)$$

Questa formula afferma che il lavoro effettuato dalle forze applicate al sistema meccanico è uguale all'incremento della sua energia cinetica K (cfr. §

22). Per sviluppare ulteriormente le nostre considerazioni prendiamo in esame un punto materiale. Nel caso di un sistema di punti materiali, varierà soltanto il numero di variabili da cui dipende la funzione potenziale U che ora introduciamo. Supponiamo che le proiezioni F_x, F_y, F_z della forza risultante applicata al punto materiale, possano essere determinate dalla derivazione della funzione potenziale U

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}.$$

Tuttavia la funzione potenziale U può dipendere evidentemente non soltanto dalle coordinate $x, y, z,$ del punto materiale considerato, ma anche dal tempo t: $U = U(x, y, z, t)$. Sarà così, ad esempio, se il punto materiale si trova nel campo di forza di altri corpi, che varia rispetto al tempo. Il lavoro effettuato dalle forze applicate al punto materiale, quando esso passa da una posizione *1* a una posizione *2* lungo una curva è rappresentato dall'integrale

$$A_{12} = -\int\left(\frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy, + \frac{\partial U}{\partial z}dz\right),$$

calcolato lungo la stessa curva. Prima aggiungiamo il termine $\frac{\partial U}{\partial t}dt$ alla grandezza posta sotto il segno d'integrazione, poi lo sottraiamo introducendo il differenziale totale

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz + \frac{\partial U}{\partial t}dt,$$

il che permette di scrivere l'espressione precedente nella forma

$$A_{12} = -\int dU + \int\frac{\partial U}{\partial t}dt.$$

In questa forma l'espressione del lavoro è valida per tutti i sistemi di punti materiali. Perciò i nostri ragionamenti successivi non sono legati alla condizione che il sistema sia composto da un solo punto materiale. Dopo l'integrazione si ottiene

$$A_{12} = U_1 - U_2 + \int\frac{\partial U}{\partial t}dt. \qquad (38.2)$$

Combinando (38.2) con (39.1) otteniamo

$$(K_2 + U_2) - (K_1 + U_1) = \int\frac{\partial U}{\partial t}dt. \qquad (38.3)$$

Finora non abbiamo ancora imposto le condizioni che il sistema sia isolato e che il tempo sia omogeneo, perciò i nostri ragionamenti sono ugual-

mente validi per sistemi non isolati. Supponiamo ora che il sistema sia isolato. Allora, in virtù dell'omogeneità del tempo, la funzione U non può evidentemente dipendere dal tempo, cioè $\frac{\partial U}{\partial t} dt = 0$. Quindi otteniamo

$$K_1 + U_1 = K_2 + U_2 \tag{38.4}$$

cioè l'equazione che esprime la legge di conservazione dell'energia meccanica.

4. Passiamo ora alla dimostrazione della legge di conservazione dell'impulso. Supponiamo che il sistema meccanico sia isolato. Tutte le forze $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$, ... che agiscono sui punti materiali del sistema sono forze interne e non ci sono forze esterne. Trasportiamo il sistema da una posizione qualunque *1* in una posizione qualunque *2* in modo che tutti i punti subiscano il medesimo spostamento $\boldsymbol{r}$ e che le loro velocità siano le stesse rispetto al modulo, alla direzione ed al verso. In virtù dell'omogeneità dello spazio un tale spostamento non richiede alcun lavoro; in effetti, poiché esso è rappresentato dal prodotto scalare $(\boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \ldots)\boldsymbol{r}$, è uguale a zero qualunque sia lo spostamento $\boldsymbol{r}$. Ne consegue che per un sistema isolato $\boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \ldots = 0$. È questa la condizione grazie alla quale si deduce dalla seconda legge di Newton la legge di conservazione dell'impulso (cfr. § 12).

5. Esattamente nello stesso modo si dimostra la legge di conservazione del momento della quantità di moto. Basandosi sull'isotropia dello spazio, si dimostra che la somma geometrica dei momenti delle forze interne che agiscono nel sistema è nulla: $\boldsymbol{M}_1 + \boldsymbol{M}_2 + \ldots = 0$ (cfr. il problema 2 alla fine del § 46). Ne consegue immediatamente la legge di conservazione cercata (cfr. § 30).

Problemi

1. Supponiamo che $U(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2)$ sia l'energia potenziale d'interazione di due punti materiali espressa in funzione dei raggi vettori $\boldsymbol{r}_1$ e $\boldsymbol{r}_2$ che caratterizzano la loro posizione nello spazio. Basandosi sul concetto di omogeneità dello spazio, dimostrare che U dipende soltanto dalla differenza $\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$. Generalizzare il risultato ad un sistema di n punti materiali in mutua interazione.

Soluzione. In virtù dell'omogeneità dello spazio, l'energia potenziale U non si modifica se si spostano i due punti materiali di un medesimo vettore $\boldsymbol{a}$. Matematicamente questa condizione viene espressa dall'uguaglianza $U(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2) = (\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{a}, \boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{a})$, che deve essere verificata qualunque sia il vettore $\boldsymbol{a}$. Ponendo $\boldsymbol{a} = -\boldsymbol{r}_1$, si ottiene $U = U(0, \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1)$, cioè $U = f(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1)$, dove f rappresenta una funzione della differenza $\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$.

Se il sistema comporta n punti materiali in mutua interazione, ragionando in modo analogo si ottiene

$$U = f(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_3 - \boldsymbol{r}_1, \ldots).$$

È evidente che invece del punto *1* si può scegliere un punto materiale qualunque del sistema. Di conseguenza l'energia potenziale U può dipendere soltanto dalle $n - 1$ variabili vettoriali

che sono le differenze dei raggi vettori degli $n-1$ punti del sistema e del raggio vettore dell'n-esimo punto.

2. Quali limitazioni supplementari impone l'isotropia dello spazio alla forma della funzione U?

Risposta. L'energia potenziale U dipende soltanto dalle distanze tra gli $n-1$ punti materiali del sistema e il punto rimasto.

3. Basandosi sul concetto dell'omogeneità dello spazio e sul principio di relatività di Galilei, dimostrare che la forza d'interazione dei punti materiali *1* e *2* non dipende nè dalle loro coordinate nè dalle loro velocità, ma unicamente ***dalla differenza*** di queste coordinate e velocità.

Soluzione. In virtù dell'omogeneità dello spazio e del principio di relatività di Galilei, l'accelerazione $\boldsymbol{a}$ e di conseguenza la forza $\boldsymbol{f}=m\boldsymbol{a}$ sono invariabili rispetto ad una traslazione dell'origine delle coordinate ed alle trasformazioni di Galilei. Prendiamo due sistemi di riferimento S e S'. Considerando la forza $\boldsymbol{f}$ come funzione delle coordinate e delle velocità nel sistema di riferimento S', scriviamo $\boldsymbol{f}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{r}_1', \boldsymbol{r}_2', \boldsymbol{v}_1', \boldsymbol{v}_2')$. Dato che la scelta del sistema S' è arbitraria, possiamo sceglierlo in modo che, nell'istante considerato, il punto materiale *1* si trovi nell'origine delle coordinate ($\boldsymbol{r}_1'=0$) e la sua velocità sia nulla ($\boldsymbol{v}_1'=0$). In questo istante la forza $\boldsymbol{f}$ sarà funzione soltanto di due variabili: $\boldsymbol{f}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{r}_2', \boldsymbol{v}_2')$. Dato che le differenze delle coordinate e delle velocità nei due sistemi di riferimento sono identiche, si avrà $\boldsymbol{r}_2'=\boldsymbol{r}_2'-\boldsymbol{r}_1'=\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{v}_2'=\boldsymbol{v}_2'-\boldsymbol{v}_1'=\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_1$. Infine si ha

$$\boldsymbol{f}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_1).$$

VI. LE OSCILLAZIONI ARMONICHE

§ 39. *Cinematica del moto oscillatorio armonico*

I fenomeni oscillatori hanno un importante ruolo in diversi campi della fisica: il loro studio dettagliato sarà presentato in altri capitoli di questo corso. Qui ci limitiamo a uno studio preliminare delle *oscillazioni meccaniche* più semplici, cominciando dal *moto oscillatorio* di un punto materiale. Mentre effettua tale moto, il punto passa ad intervalli di tempo uguali in una medesima posizione muovendosi ogni volta nella stessa direzione.

Il più importante tra i moti oscillatori è quello, così detto, *semplice* o *armonico* (sinusoidale). Ne abbiamo già parlato nel § 11. Il carattere particolare di questo moto può essere descritto meglio per mezzo del seguente modello cinematico. Immaginiamo un punto geometrico M in moto uniforme su un cerchio di raggio A con velocità angolare costante ω (fig. 82). La sua proiezione N su un diametro del cerchio, sull'asse X ad esempio, effettua un moto oscillatorio tra le posizioni estreme N_1 e N_2. Questo moto del punto N è chiamato moto armonico. Per descriverlo bisogna esprimere la coordinata x del punto N come funzione del tempo t. Poniamo che nell'istante iniziale $t=0$ il raggio OM formi l'angolo δ con l'asse X. Dopo un certo tempo Δt questo angolo avrà avuto un incremento ωt e sarà uguale a $\omega t+\delta$. Dalla figura 82 risulta che

$$x = A\cos(\omega t + \delta). \tag{39.1}$$

Questa formula descrive analiticamente il moto armonico del punto N lungo il diametro N_1N_2.

La quantità A indica l'elongazione massima (distanza del punto mobile dalla sua posizione di equilibrio O). La quantità A è chiamata *ampiezza del moto*. La grandezza ω è la pulsazione o *frequenza circolare*. La quantità $\omega t+\delta$ si chiama *fase dell'oscillazione* e δ è la *fase iniziale* corrispondente a $t=0$. Se $\delta=0$, allora $x = A\cos\omega t$; se $\delta=-\pi/2$, allora $x=A\sin\omega t$ ecc. Quindi per un moto armonico l'ascissa x del punto mobile è una funzione sinusoidale o cosinusoidale del tempo t. Per dare una rappresentazione grafica di questo moto, si può rappresentare il tempo t sulle ascisse e le elongazioni del punto x in ordinate. Ne deriva una curva periodica, cioè la *sinusoide* (fig. 22) la cui forma viene completamente definita dall'ampiezza A e dalla frequenza ciclica ω, ma la sua posizione dipende ugualmente dalla fa-

se iniziale δ. Esaurito il tempo

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \tag{39.2}$$

la fase avrà un incremento di 2π e il mobile ritornerà alla sua posizione iniziale, conservando la direzione di moto iniziale. Il tempo T si chiama *periodo di oscillazione.*

La velocità del punto oscillante si ottiene derivando l'espressione (39.1) rispetto al tempo

$$v = \dot{x} = -\omega A \sin(\omega t + \delta). \tag{39.3}$$

Derivando ancora una volta, si ottiene l'accelerazione

$$a = \dot{v} = -\omega^2 A \cos(\omega t + \delta). \tag{39.4}$$

ossia, utilizzando (39.1)

$$a = -\omega^2 x. \tag{39.5}$$

La forza che agisce su un punto materiale in moto armonico è uguale a

$$F = ma = -m\omega^2 x. \tag{39.6}$$

Essa è proporzionale all'elongazione x e punta sempre verso la posizione di equilibrio. Le forze di questo tipo appaiono spesso in caso di piccoli spostamenti di punti materiali rispetto alle loro posizioni di equilibrio.

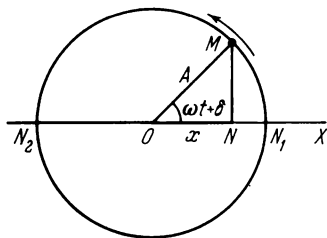



Fig. 82.

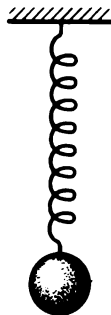



Fig. 83.

§ 40. *Oscillazioni armoniche di un pendolo elastico*

1. Consideriamo una molla fissata ad una delle sue estremità; sospendiamo all'altra sua estremità un corpo di massa m (fig. 83). Sia l_0 la lunghezza della molla non deformata. Se comprimiamo la molla o la allun-

ghiamo fino alla lunghezza l, allora si genera una forza F tendente a riportare il corpo in equilibrio. Per piccoli allungamenti $x = l - l_0$ della molla, vale la *legge di Hook* (1635-1703) secondo la quale la forza è proporzionale all'allungamento della molla $F = -kx$. In queste condizioni il moto del corpo è

$$m\ddot{x} = -kx, \tag{40.1}$$

dove k è la *rigidezza* o *coefficiente di elasticità* della molla. Il segno meno significa che la forza F è sempre di senso opposto allo spostamento x, rispetto alla posizione di equilibrio.

Nell'equazione (40.1) si supponeva che il corpo non fosse sottoposto a nessuna altra azione oltre a quella della forza elastica di richiamo F. Mostriamo ora che questa stessa equazione descrive il moto di un corpo sospeso a una molla e posto in un campo di gravità uniforme. Indichiamo con X *l'allungamento della molla,* cioè la differenza $X = l - l_0$. La molla applica al corpo sospeso una forza kX diretta dal basso in alto, mentre la forza di gravità agisce dall'alto in basso. L'equazione del moto si scrive quindi

$$m\ddot{X} = -kX + mg.$$

Sia X_0 l'allungamento della molla nella posizione di equilibrio. Si ha allora $-kX_0 + mg = 0$. Sostituendo alla forza-peso mg costante del corpo il suo valore $-kX_0$ si ottiene $m\ddot{X} = -k(X - X_0)$. Introduciamo la notazione $x = X - X_0$, allora l'equazione del moto prende la forma (39.1), dove x indica, come prima, lo spostamento del peso rispetto alla posizione di equilibrio. Però la posizione di equilibrio si sposta sotto l'azione della gravità e il significato della grandezza $-kx$ cambia. Essa rappresenta la risultante della forza elastica della molla e del peso. D'altra parte tutto ciò non cambia per niente la descrizione puramente matematica del pendolo elastico e si può continuare a ragionare come se la forza di gravità non esistesse, il che sarà quanto noi faremo nelle pagine seguenti.

2. La forza risultante $F = -kx$ è espressa nella stessa forma di quella che figura in (36.6). Ponendo $m\omega^2 = k$ l'equazione (40.1) diviene

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0. \tag{40.2}$$

Questa equazione coincide con l'equazione (39.5). La funzione (39.1) è soluzione di questa equazione, quali che siano i valori delle costanti A e δ. Si può dimostrare che è *una soluzione generale*, nel senso che ogni soluzione dell'equazione (40.2) può essere scritta nella forma (39.1). Le differenti soluzioni si distinguono le une dalle altre per i valori delle costanti A e δ (la dimostrazione di questa affermazione è data alla fine di questo paragrafo). Da queste considerazioni deriva il fatto che la massa sospesa alla molla effettuerà oscillazioni armoniche con una frequenza circolare (pulsazione)

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{40.3}$$

e un periodo

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}. \qquad (40.4)$$

Quando il periodo di oscillazione T è indipendente dall'ampiezza A si dice che le oscillazioni sono *isocrone*. Le oscillazioni sono isocrone finché è valida la legge di Hook. Per grandi allungamenti, questa legge cessa di essere valida e le oscillazioni cessano di essere isocrone, cioè il loro periodo di oscillazione comincia a dipendere dall'ampiezza.

L'equazione differenziale (40.2) non permette di calcolare l'ampiezza A e la fase iniziale δ. I valori di queste costanti dipendono dalle condizioni iniziali, dai valori iniziali dell'allungamento x e dalla velocità $\dot{x}$, ad esempio. L'equazione (40.2) è valida qualunque siano le condizioni iniziali e descrive tutte le oscillazioni che può effettuare il sistema considerato. Un'oscillazione data è caratterizzata dai valori delle costanti A e δ.

3. Le energie potenziale e cinetica del corpo sospeso vengono espresse dalle equazioni

$$E_{pot} = \frac{1}{2}kx^2, \quad E_{cin} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \qquad (40.5)$$

e variano tutte e due rispetto al tempo. Però la loro somma E deve rimanere costante rispetto al tempo

$$E = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = \text{cost}. \qquad (40.6)$$

Utilizzando (39.1) si ricava dalle formule (40.5)

$$E_{pot} = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t + \delta), \quad E_{cin} = \frac{1}{2}m\omega^2A^2\sin^2(\omega t + \delta),$$

e in virtù di (40.3)

$$E_{cin} = \frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t + \delta).$$

Queste formule si possono scrivere anche nella forma

$$E_{pot} = \frac{1}{4}kA^2[1 + \cos 2(\omega t + \delta)], \quad E_{cin} = \frac{1}{4}kA^2[1 - \cos 2(\omega t + \delta)].$$

Esse mostrano che *nè l'energia potenziale nè quella cinetica, prese isolatamente, sono costanti, ma che i loro valori effettuano oscillazioni armoniche attorno al valore medio comune* $1/4\ kA^2$ *con una frequenza circolare doppia* 2ω. Quando l'energia cinetica raggiunge il suo valore massimo, l'energia potenziale si annulla e viceversa. L'energia totale $E = E_{cin} + E_{pot}$ resta, però, costante ed è legata all'ampiezza A dalla relazione

$$E = \frac{1}{2}kA^2. \qquad (40.7)$$

Questi semplici calcoli dimostrano anche che l'espressione (39.1) è la soluzione dell'equazione differenziale (40.6) a condizione che la pulsazione ω sia determinata dalla formula (40.3) e l'ampiezza A dalla formula (40.7). Quindi se l'energia totale E è data, la costante A non può essere scelta arbitrariamente. Solo una costante arbitraria dipende dalle condizioni iniziali ed è la fase iniziale δ. Per determinarla è sufficiente sapere, ad esempio, l'allungamento o la velocità iniziali. Il fatto che la soluzione comporti una sola costante arbitraria risulta dal fatto che l'equazione (40.6) è *di primo grado* rispetto al tempo, a differenza dall'equazione (40.2) che è *di secondo grado* rispetto al tempo. Se si considera l'energia che figura in (40.6) come un paremetro che può assumere tutti i valori positivi definiti dalle condizioni iniziali, l'equazione (40.6) diventa allora equivalente all'equazione (40.2).

4. Tutte queste considerazioni si applicano alle oscillazioni armoniche di tutti i sistemi meccanici aventi *un solo grado di libertà*. La posizione in un istante dato di un sistema meccanico può essere determinata da una sola grandezza q, chiamata *coordinata generalizzata,* ad esempio, l'angolo di rotazione, lo spostamento lungo una certa curva, ecc. La derivata $\dot{q}$ della coordinata generalizzata rispetto al tempo si chiama *velocità generalizzata.* Nello studio delle oscillazioni dei sistemi meccanici ad un solo grado di libertà è consigliabile partire dall'equazione dell'energia (che è più facile stabilire) e non dall'equazione del moto di Newton. Inoltre l'*equazione dell'energia* è più semplice, essendo un'equazione differenziale di primo e non di secondo grado rispetto al tempo. Supponiamo di avere un sistema meccanico le cui energie, potenziale e cinetica, si esprimano attraverso formule del tipo

$$E_{\text{pot}} = \frac{\alpha}{2} q^2, \quad E_{\text{cin}} = \frac{\beta}{2} \dot{q}^2, \tag{40.8}$$

dove α e β sono costanti positive (i parametri del sistema). Applicando la legge di conservazione dell'energia, si ottiene l'equazione

$$E = \frac{\alpha}{2} q^2 + \frac{\beta}{2} \dot{q}^2 = \text{cost}, \tag{40.9}$$

che si distingue dall'equazione (40.6) soltanto per i simboli usati, il che non ha alcuna importanza in uno studio matematico. Essendo le equazioni (40.6) e (40.9) matematicamente identiche, le loro soluzioni generali devono essere uguali. Di conseguenza, *se l'equazione dell'energia si riduce alla formula* (40.9), *si avrà*

$$q = q_0 \cos(\omega t + \delta), \tag{40.10}$$

cioè la coordinata generalizzata q effettua oscillazioni armoniche con una frequenza circolare

$$\omega = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}. \tag{40.11}$$

5. Per concludere dimostreremo come si ottiene la soluzione generale dell'equazione differenziale (40.2). Dato che l'equazione (40.6) deriva da (40.2), cercheremo di risolvere l'equazione (40.6). L'equazione (40.3), può essere scritta nella forma

$$\omega^2 x^2 + \dot{x}^2 = \text{cost.} \tag{40.12}$$

Il primo membro di questa relazione è una quantità essenzialmente positiva, essendo la somma di due quadrati. Si può quindi indicare il secondo membro dell'equazione con $\omega^2 A^2$ introducendo così la nuova costante A. Si ottiene allora

$$\dot{x}^2 = \omega^2(A^2 - x^2). \tag{40.13}$$

Dato che $x^2 \geqslant 0$, si ha $x \leqslant A$. Quindi si può porre

$$x = A \cos\Theta, \tag{40.14}$$

dove Θ è una funzione incognita del tempo t. Portando (40.14) in (40.13), si ottiene

$$\dot{x}^2 = \omega^2 A^2(1 - \cos^2\Theta) = \omega^2 A^2 \sin^2\Theta,$$

quindi

$$\dot{x} = \pm\omega A \sin\Theta.$$

D'altra parte, derivando l'espressione (40.14) rispetto al tempo, si ottiene

$$\dot{x} = -\dot{\Theta} A \sin\Theta.$$

Mettendo a confronto le espressioni di $\dot{x}$, si ottiene $\dot{\Theta} = \pm\omega$, da cui

$$\Theta = \pm\omega t + \delta,$$

dove δ è una costante qualunque. Quindi

$$x = A \cos(\pm\omega t + \delta).$$

Le espressioni ottenute di x, cioè $x_1 = A\cos(\omega t + \delta)$ e $x_2 = A\cos(-\omega t + \delta) = A\cos(\omega t - \delta)$ possono essere riunite in una sola, poiché δ è una costante qualunque, e quindi nell'espressione di x_2, δ può essere sostituita con $-\delta$. Allora nel caso generale

$$x = A\cos(\omega t + \delta),$$

il che coincide coll'espressione (39.1).

§ 41. *Il pendolo fisico*

1. Si chiama *pendolo fisico* un corpo mobile attorno ad un asse orizzontale fisso il cui punto d'intersezione A con il piano verticale che passa per il centro di massa del pendolo è il suo *punto di sospensione* (fig. 84). In

ogni istante la posizione del corpo può essere caratterizzata per mezzo dell'angolo di deviazione φ dell'asse del pendolo dalla sua posizione d'equilibrio. L'angolo φ qui ha il ruolo di coordinata generalizzata q. L'energia cinetica del pendolo fisico è determinata dall'espressione

$$E_{\text{cin}} = \frac{1}{2} I\dot{\varphi}^2,$$

dove I è il momento d'inerzia del pendolo rispetto all'asse di sospensione A. La sua energia potenziale è $E_{\text{pot}} = mgh$, in cui h è l'altezza di elevazione

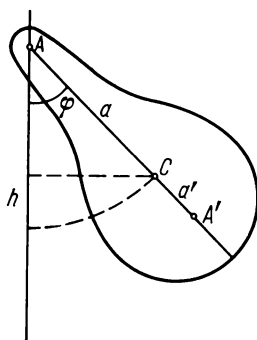



Fig. 84.

del centro di massa rispetto alla sua posizione più bassa. Indichiamo con a la distanza tra il centro di massa C e il punto di sospensione A. Si trova allora

$$E_{\text{pot}} = mga(1 - \cos\varphi) = 2mga \sin^2\frac{\varphi}{2}.$$

Se le oscillazioni sono di piccola ampiezza, allora si può sostituire, approssimando il seno dell'angolo $\varphi/2$ con l'angolo stesso. Da questa approssimazione deriva

$$E_{\text{pot}} = \frac{mga}{2}\varphi^2.$$

Quindi, nel caso di piccole oscillazioni le energie potenziali e cinetiche si riducono alla formula (40.8) con $\alpha = mga$ e $\beta = I$. Ne deriva che le oscillazioni di piccola ampiezza del pendolo fisico saranno approssimativamente armoniche, con pulsazione

$$\omega = \sqrt{\frac{mga}{I}} \tag{41.1}$$

e con periodo

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mga}}. \tag{41.2}$$

Se il periodo delle oscillazioni non dipende dalla loro ampiezza, queste oscillazioni si chiamano *isocrone*. Le *piccole oscillazioni di un pendolo fisico sono isocrone.* Le oscillazioni sono approssimativamente isocrone quando lo spostamento angolare del pendolo sia di pochi gradi; per ampiezze più grandi l'isocronismo cessa. L'isocronismo delle oscillazioni del pendolo è utilizzato negli orologi.

Un caso particolare di pendolo fisico è il *pendolo semplice (matematico)*. Si chiama così il pendolo la cui massa è praticamente tutta concentrata in un solo punto — il centro di massa C del pendolo. Un pendolo semplice può essere costituito da una pallina sospesa ad un lungo filo l. Sostituendo nella formula (41.2) $a = l$, $I = ml^2$, dove l è la lunghezza del pendolo, si ottiene

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} . \tag{41.3}$$

Paragonando le formule (41.2) e (41.3) si può concludere che il *pendolo fisico si comporta come un pendolo semplice di lunghezza*

$$l = \frac{I}{ma} , \tag{41.4}$$

detta *lunghezza ridotta* del pendolo fisico. L'enunciato dimostrato è valido non soltanto per le piccole oscillazioni dei pendoli, ma anche per oscillazioni d'ampiezza finita che non sono isocrone. La sola condizione necessaria è che le ampiezze angolari del pendolo fisico e del pendolo semplice siano uguali. Lasciamo al lettore il compito di dimostrarlo.

2. Portiamo lungo la retta AC, a partire dal punto di sospensione A, un segmento di retta AA' di lunghezza uguale alla lunghezza ridotta l del pendolo fisico (si veda fig. 84). Il punto A' si chiama *centro d'oscillazione. Si può definire il centro d'oscillazione come un punto matematico in cui si sia concentrata tutta la massa del pendolo fisico, cosicché il periodo delle sue oscillazioni resta invariato.* Secondo il teorema Huygens-Steiner $I = I_C + ma^2$, dove I_C è il momento d'inerzia del pendolo rispetto ad un asse parallelo che passa per il centro di massa C. Portando questa espressione di I in (41.4) si ottiene

$$l = a + \frac{I_C}{ma} . \tag{41.5}$$

Ne deriva, in primo luogo, che $l > a$, cioè il punto di sospensione A e il centro d'oscillazione A' si trovano da parti opposte rispetto al centro di massa C; in secondo luogo, a tutti i punti di sospensione situati ad una stessa distanza dal centro di massa del pendolo corrisponde la stessa lunghezza ridotta l e, quindi, lo stesso periodo T delle oscillazioni.

Il punto di sospensione ed il centro d'oscillazione sono punti *reciproci* o *coniugati. Se si sospende il pendolo al centro d'oscillazione A', il suo pe-*

riodo resta invariato ed il punto precedente di sospensione A diventerà il nuovo centro d'oscillazione. Questo enunciato si chiama *teorema* di Huygens. Per dimostrarlo indichiamo con a' la lunghezza del segmento $A'C$ e supponiamo che il punto di sospensione del pendolo sia A'. La sua lunghezza ridotta sarà allora

$$l' = a' + \frac{I_C}{ma'}.$$

Però $a' = l - a$, ossia in virtù della relazione (41.5) $a' = \frac{I_C}{ma}$. Riportando questo valore nella formula precedente si ottiene $l' = \frac{I_C}{ma} + a$. Quindi $l' = l$, cioè sia la lunghezza ridotta che il periodo di oscillazione del pendolo fisico rimangono invariati.

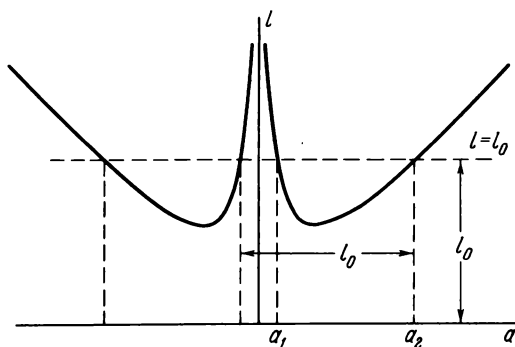



Fig. 85.

3. Diamo un'altra dimostrazione del teorema di Huygens, che spiega meglio il suo contenuto. Spostiamo il punto di sospensione del pendolo lungo la verticale che passa per il centro di massa C e vediamo come varia il periodo delle sue oscillazioni. Quando il punto di sospensione A si trova a una distanza infinita da C, il pendolo si comporta come un pendolo semplice il cui periodo d'oscillazione è infinitamente grande. Quando si avvicina il punto di sospensione A al centro di massa C, il periodo d'oscillazione prima comincia a diminuire. Quando il punto A coinciderà con il centro di massa C, il pendolo si troverà in uno stato d'equilibrio indifferente, che non dipende dalla deviazione. Questo significa che il suo periodo d'oscillazione diventa di nuovo infinitamente grande. Perciò quando il punto A si avvicina al punto C, la diminuzione del periodo dovrà essere sostituita dal suo aumento. Ad una data posizione del punto di sospensione il periodo d'oscillazione diventa minimo. Quando il punto di sospensione supera il punto C sulla retta AA', il periodo d'oscillazione ricomincia a diminuire;

ed il periodo delle oscillazioni avrà lo stesso valore in due punti di sospensione equidistanti dal punto C lungo la retta AA'.

Invece del periodo d'oscillazione, si può utilizzare la lunghezza ridotta del pendolo l il cui valore definisce univocamente il suo periodo d'oscillazione. In casi di allontanamento del punto di sospensione all'infinito o di avvicinamento al centro di massa C, la lunghezza ridotta l tende all'infinito ed in una data posizione intermedia raggiunge il suo valore minimo. Nella figura 85 la grandezza a è posta sull'asse delle ascisse, e la lunghezza ridotta l del pendolo su quella delle ordinate. La curva comporta due rami simmetrici rispetto all'asse delle ordinate. Un braccio corrisponde al caso in cui il punto di sospensione si trovi da una parte del centro di massa C ed il secondo braccio, al caso in cui si trovi dalla parte opposta. L'equazione (41.5) che ci dà la descrizione analitica di questa curva può essere riscritta nella forma

$$a^2 - la + \frac{I_C}{m} = 0. \qquad (41.6)$$

Ad un valore fisso l_0 della lunghezza ridotta corrisponde nella figura 85 una retta orizzontale $l = l_0$. I suoi punti d'intersezione con la curva determinano le posizioni dei punti di sospensione del pendolo fisico così che la sua lunghezza ridotta sia uguale al valore dato l_0. Infatti, ci sono quattro punti d'intersezione, di cui due si trovano da una parte del centro di massa C e gli altri due punti dalla parte opposta. È facile calcolare le posizioni di questi punti per mezzo dell'equazione quadratica

$$a^2 - l_0 a + \frac{I_C}{m} = 0. \qquad (41.7)$$

Se $l_0 > 2\sqrt{I_C/m}$, questa equazione ha due radici reali positive a_1 e a_2, quindi

$$a_1 + a_2 = l_0. \qquad (41.8)$$

In questo caso ci sono due punti di sospensione A_1 e A_2 situati dalla stessa parte rispetto al punto C, ai quali corrisponde una medesima lunghezza ridotta l_0 (fig. 86). Dalla parte opposta del punto C si trovano i punti A_1' e A_2', simmetrici rispetto ai punti A_1 e A_2, i quali definiscono la medesima lunghezza ridotta l_0. Se $l_0 = 2\sqrt{I_C/m}$, le radici dell'equazione (41.7) coincidono, cioè ogni coppia di punti di sospensione si sovrappone, se $l_0 < 2\sqrt{I_C/m}$, le radici dell'equazione (41.7) sono immaginarie, il che significa che non esistono punti di sospensione per i quali la lunghezza ridotta sia inferiore a $2\sqrt{I_C/m}$.

Il teorema di Huygens diventa ora perfettamente chiaro. Infatti dalla relazione (41.8) deriva che le distanze tra i punti A_1 e A_2' e i punti A_1' e A_2 sono entrambe uguali alla lunghezza ridotta l del pendolo. Prendendo uno dei punti di ciascuna coppia come punto di sospensione, il secondo punto sarà il centro d'oscillazione. Ed è proprio ciò che il teorema di Huygens afferma. Le nostre considerazioni dimostrano anche che il punto di sospen-

sione e il centro d'oscillazione si trovano da parti opposte del centro di massa e sono asimmetrici rispetto ad esso. Esiste una sola eccezione, ed è il caso in cui $l_0 = 2\sqrt{I_C/m}$, i punti A_1 e A_2 allora si sovrappongono, come pure i punti A_1' e A_2'. In questo caso particolare il punto di sospensione ed il centro d'oscillazione sono simmetrici rispetto al centro di massa C.

4. Il teorema di Huygens è utilizzato nel *pendolo reversibile* che serve a precise misurazioni dell'accelerazione di gravità. Esistono tante costruzioni di pendoli reversibili. La figura 87 ne mostra una. Il pendolo è costituito da un'asta d'acciaio di circa un metro di lunghezza sulla quale sono rigidamente fissati due sostegni prismatici in acciaio A e A' un dischetto d'acciaio B, posto tra questi. Un altro dischetto D, che si trova vicino ad una delle estremità dell'asta (oltre la distanza AA'), può scorrere lungo l'asta ed essere bloccato nella posizione voluta. Spostando questo secondo dischetto, si riesce a far coincidere i periodi di oscillazione del pendolo quando i punti di sospensione siano i bordi dei sostegni prismatici A e A'. Dato che A e A' sono *asimmetrici* rispetto al centro di massa C, la loro distanza definisce la lunghezza ridotta l quando i periodi delle oscillazioni diventano uguali. Avendo misurato il periodo T si può calcolare g secondo la formula (41.3).

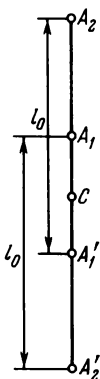
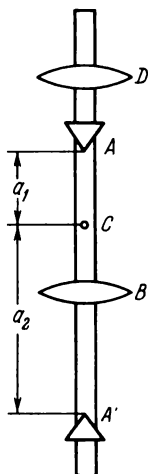
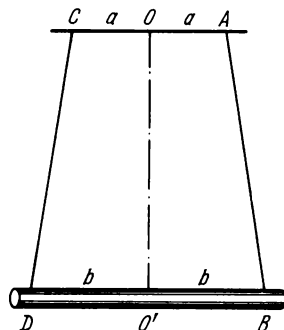



Fig. 86. Fig. 87. Fig. 88.

§ 42. *Sospensioni bifilari e trifilari*

1. Calcoliamo il periodo delle piccole oscillazioni *d'una sospensione bifilare*. Così si chiama un dispositivo costituito da due fili AB e CD della medesima lunghezza che reggono un corpo BD (fig. 88). Se si fa ruotare il

corpo sospeso attorno all'asse verticale OO', esso comincia ad effettuare delle oscillazioni di torsione attorno a quest'asse. La sospensione bifilare è un sistema a un solo grado di libertà. Come coordinata che serva a determinare la sua posizione in ogni istante è comodo prendere l'angolo di rotazione φ del corpo BD attorno all'asse OO' rispetto alla posizione d'equilibrio.

L'energia cinetica del sistema è uguale a $E_{\text{cin}} = \frac{1}{2} I\dot{\varphi}^2$, dove I è il momento d'inerzia rispetto all'asse OO'. L'energia potenziale è uguale a $E_{\text{pot}} = mgh$, dove h è l'altezza istantanea del corpo rispetto alla sua posizione d'equilibrio. Sia l la lunghezza di OO' in stato d'equilibrio, $2a$ la distanza tra i punti di sospensione C e A, $2b$ la distanza DB. Si suppone che il sistema sia simmetrico, allora i punti O e O' si trovano al centro dei segmenti di retta CA e DB. L'altezza h viene determinata dalla condizione di inestensibilità dei fili di sospensione AB e CD. Scegliamo un sistema di coordinate ortogonali con origine in O, l'asse X essendo diretto lungo la retta OA, l'asse Z lungo la retta OO' e l'asse Y lungo una direzione perpendicolare agli assi X e Z. Le coordinate del punto A restano costanti e uguali a

$$x_A = a, \quad y_A = 0, \quad z_A = 0.$$

Le coordinate del punto B nella posizione d'equilibrio sono uguali a

$$x_B^{(0)} = b, \quad y_B^{(0)} = 0, \quad z_B^{(0)} = l.$$

Quando il sistema ruota di un angolo φ le coordinate di questo punto diventano uguali a

$$x_B = b\cos\varphi, \quad y_B = b\sin\varphi, \quad z_B = l - h.$$

La condizione d'inestensibilità del filo AB può essere espressa sotto la forma

$$(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2 =$$
$$= (x_B^0 - x_A^0)^2 + (y_B^0 - y_A^0)^2 + (z_B^0 - z_A^0)^2,$$

ossia

$$(b\cos\varphi - a)^2 + b^2\sin^2\varphi + (l - h)^2 = (b - a)^2 + l^2.$$

Eseguite semplici trasformazioni ne deriva

$$h = \frac{2ab(1 - \cos\varphi)}{2l + h} = \frac{4ab}{2l + h}\sin^2\frac{\varphi}{2}.$$

Se l'ampiezza delle oscillazioni è piccola, si può porre $\sin(\varphi/2) = \varphi/2$. Dato che $h \ll 2l$, si può trascurare la quantità h che appare nel denominatore. Con questa approssimazione

$$h = \frac{ab}{2l}\varphi^2, \quad E_{\text{pot}} = \frac{mgab}{2l}\varphi^2.$$

Le energie cinetiche e potenziali sono quindi ridotte alla forma (40.9), con $\alpha = \frac{mgab}{l}$ e $\beta = I$, e le oscillazioni del sistema saranno armoniche, con periodo

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{Il}{mgab}} . \tag{42.1}$$

Il periodo delle oscillazioni è proporzionale alla radice quadrata del momento d'inerzia ed inversamente proporzionale alla radice quadrata della massa del sistema. Supponendo che il corpo BD sia una sbarra metallica, deviamolo dalla sua posizione d'equilibrio e lasciamo che effettui delle oscillazioni di torsione che saranno relativamente lente. Fissiamo al punto O' un corpo di peso notevole e mettiamo di nuovo il sistema in oscillazione. Costateremo che le oscillazioni sono diventate più rapide: questo avviene poiché il peso aggiunto, fissato sull'asse di rotazione, aumenta notevolmente la massa del sistema e nello stesso tempo non influenza praticamente il momento d'inerzia. La diminuzione del periodo l'oscillazione può essere spiegata anche nel modo seguente. Il sistema ritorna nella sua posizione d'equilibrio sotto l'azione delle componenti orizzontali delle forze di tensione dei fili. Aggiungendo un peso supplementare noi aumentiamo notevolmente la tensione dei fili mentre il momento d'inerzia aumenta modestamente, e così si ottiene una diminuzione del periodo d'oscillazione, cioè le oscillazioni diventano più rapide.

2. Si può anche definire con la formula (42.1) il periodo d'oscillazione d'*una sospensione trifilare* rappresentata schematicamente nella figura 89.

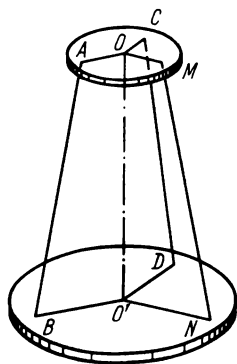
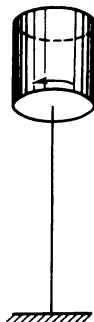



Fig. 89. Fig. 90.

I punti di sospensione A, C, e M sono disposti su un cerchio di raggio a, i punti B, D, N su un cerchio di raggio b. Il disco inferiore può effettuare oscillazioni di torsione attorno all'asse verticale OO' Il calcolo che ci ha portato alla formula (42.1) è perfettamente valido anche per una sospensione trifilare, perché nel derivare la formula è stata utilizzata la condizione di

costanza (inestensibilità) di un solo filo AB. La costanza della lunghezza del secondo filo CD ne discende automaticamente.

I dispositivi a sospensione trifilare servono a misurare il momento d'inerzia dei corpi. Prima viene misurato il periodo d'oscillazione T_0 del dispositivo senza carico e se ne deduce il suo momento d'inerzia

$$I_0 = \frac{m_0 gab}{4\pi^2 l} T_0^2.$$

In seguito si pone sul disco inferiore il corpo di massa m il cui momento d'inerzia I è da misurare. Supponiamo che T sia il periodo d'oscillazione di torsione del dispositivo con carico. Il momento d'inerzia del sistema rispetto all'asse OO' sarà allora

$$I + I_0 = \frac{(m + m_0)gab}{4\pi^2 l} T^2.$$

Sottraendo l'espressione precedente si ottiene il momento d'inerzia I cercato.

3. Indichiamo un secondo metodo di misurazione dei momenti d'inerzia che spesso è preferibile. Sospendiamo un corpo a un filo d'acciaio in modo che esso possa effettuare delle oscillazioni di torsione attorno ad un asse verticale coincidente con il filo (fig. 90). Facendo ruotare il corpo di un angolo φ, il filo subisce una torsione che genera un momento delle forze M che tende a far ritornare il corpo alla sua posizione d'equilibrio. L'esperienza mostra che il momento M è, entro limiti assai larghi, proporzionale all'angolo φ: $M = -f\varphi$, dove f è una costante caratteristica del filo dato chiamata *modulo di torsione*. Perciò

$$I\ddot{\varphi} = -f\varphi.$$

Dato che questa equazione è matematicamente identica all'equazione (40.1), il corpo sospeso effettuerà delle oscillazioni di torsione armoniche con periodo

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{f}}. \qquad (42.2)$$

Sostituiamo il primo corpo con un altro di momento d'inerzia I'. Allora il periodo d'oscillazione sarà

$$T' = 2\pi \sqrt{\frac{I'}{f}}.$$

Facendo il rapporto di queste espressioni, si ottiene

$$\frac{I}{I'} = \left(\frac{T}{T'}\right)^2,$$

che non contiene più il modulo di torsione f sconosciuto.

Se si conosce uno dei momenti d'inerzia, I ad esempio, per mezzo di questa formula si può calcolare il momento d'inerzia I' del secondo corpo. Il momento d'inerzia I può essere calcolato, in teoria, conoscendo la configurazione geometrica e la massa del corpo. In questo caso bisogna disporre di un corpo di forma geometricamente regolare, un cilindro o una palla ad esempio. La formula (42.2) può essere anche utilizzata per calcolare moduli di torsione di fili in via sperimentale.

Problemi

1. Supponiamo che un punto materiale si muova nel campo gravitazionale lungo una corda di cerchio con una velocità iniziale nulla (fig. 91). Dimostrare che il tempo che essa impiega per passare dal punto superiore A al punto inferiore B non dipende dalla posizione del punto A sul cerchio. (Galilei utillizzò questo fatto per stabilire la legge delle piccole oscillazioni del pendolo matematico. Per determinare il periodo d'oscillazione del pendolo, Galilei sostituì la corda AB al piccolo arco di cerchio ADB lungo il quale si muove il punto materiale). Calcolare in questa approssimazione il periodo d'oscillazione del pendolo e dimostrare che questa approssimazione conduce a una relazione corretta tra il periodo d'oscillazione, la lunghezza l del pendolo e l'accelerazione della forza di gravità g. Paragonare il risultato ottenuto con la formula esatta (41.3).

Risposta. $T = 8\sqrt{l/g}$.

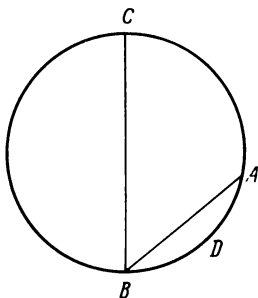



Fig. 91.

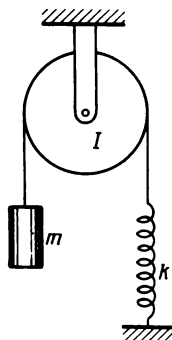



Fig. 92.

2. Si fa passare un filo su una puleggia immobile di momento d'inerzia I e di raggio r (fig. 92). A un'estremità del filo è sospeso un peso di massa m, l'altra estremità del filo è attaccata ad una molla fissa. Calcolare il periodo d'oscillazione del peso se il coefficiente d'elasticità della molla è uguale a k ed il filo non può slittare sulla superficie della puleggia.

Risposta. $T = 2\pi \sqrt{\dfrac{I/r^2 + m}{k}}$.

3. Un pendolo fisico è costituito da un'asta omogenea di lunghezza l sospesa per una delle sue estremità. Calcolare il periodo d'oscillazione del pendolo così costruito.

Risposta. $T = 2\pi\sqrt{\frac{2l}{3g}}$.

4. Un solido di rivoluzione di raggio a, con momento d'inerzia I (rispetto all'asse geometrico del corpo) e di massa m ruota senza slittamento sulla superficie interna d'un cilindro di raggio R effettuando piccole oscillazioni attorno alla sua posizione d'equilibrio (fig. 93). Calcolare il periodo delle oscillazioni.

Soluzione. Considerando questo moto una rotazione attorno all'asse instantaneo[1] ad una velocità angolare ω, la velocità del suo centro risulta $v = \omega a$. La stessa velocità si esprime anche attraverso $v = (R-a)\dot{\varphi}$. Uguagliando queste due espressioni, si ottiene

$$\omega = \frac{R-a}{a}\dot{\varphi}.$$

Secondo il teorema di König, l'energia cinetica è

$$K = \frac{1}{2}\omega^2 + \frac{m}{2}(R-a)^2\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2}\left(m + \frac{I}{a^2}\right)(R-a)^2\dot{\varphi}^2.$$

L'energia potenziale è

$$U = mg(R-a)(1-\cos\varphi) \approx \frac{mg}{2}(R-a)\varphi^2.$$

Applicando il metodo generale esposto nel § 40, si ottiene

$$T = 2\pi\sqrt{\left(1 + \frac{I}{ma^2}\right)\frac{R-a}{g}}.$$

In particolare, per un cilindro pieno ed una sfera piena.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{3}{2}\frac{R-a}{g}}, \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{7}{5}\frac{R-a}{g}}.$$

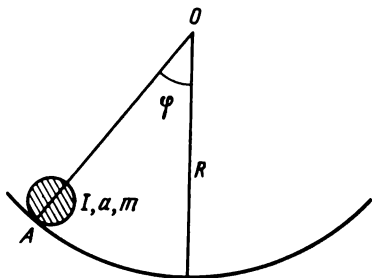



Fig. 93.

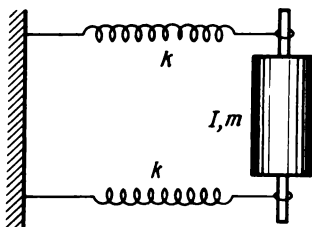



Fig. 94.

5. Un cilindro di momento d'inerzia I (rispetto all'asse geometrico longitudinale) di massa m e di raggio r si trova su un piano orizzontale. All'asse del cilindro sono attaccate due molle a spirale orizzontali le cui estremità sono fissate ad un muro (fig. 94, vista dall'alto). I coefficienti delle molle sono uguali a k; le molle possono lavorare sia in compressione che in esten

---

[1]La definizione di asse instantaneo è data nel § 45.

sione. Determinare il periodo delle piccole oscillazioni del cilindro che compaiono se lo si sposta dalla sua posizione d'equilibrio e poi lo si abbandona a se stesso lasciandolo rotolare senza slittamento sul piano orizziontale.

Risposta. $T = \frac{2\pi}{r}\sqrt{\frac{I + mr^2}{2k}}$. Per un cilindro pieno $T = \pi\sqrt{3m/k}$.

6. Una piastra quadrata omogenea è sospesa al soffitto per mezzo di quattro corde parallele attaccate alle sue estremità; la lunghezza di ciascuna corda è l. Calcolare il periodo delle piccole oscillazioni di torsione della piastra che compaiono se si fa girare la piastra di un piccolo angolo attorno all'asse verticale.

Risposta. $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{3g}}$.

In un caso più generale in cui la piastra non sia omogenea, ma il centro di massa coincida con il suo centro geometrico

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{2Il}{Mga^2}},$$

dove I è il momento d'inerzia della piastra rispetto all'asse verticale che passa per il suo centro ed a è la lunghezza di uno dei lati della piastra.

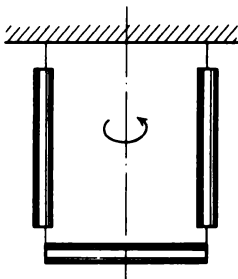



Fig. 95.

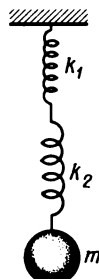



Fig. 96.

7. Tre aste omogenee, ciascuna di lunghezza l, sono collegate tra loro da corti fili come indicato nella figura 95. Si fa ruotare l'asta inferiore di un piccolo angolo attorno all'asse verticale che passa per il centro del sistema, poi si abbandona a se stessa. Calcolare il periodo delle piccole oscillazioni che compaiono, nel caso che le masse delle aste siano uguali.

Risposta. $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{2g}}$.

8. Una pallina di massa m è sospesa all'estremità inferiore di un insieme di due molle unite una all'altra i cui coefficienti di elasticità sono k_1 e k_2 (fig. 96). Calcolare il periodo di queste oscillazioni verticali.

Risposta. $T = 2\pi\sqrt{m\left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}\right)}$.

Suggerimento. Dimostrare che sia in compressione che in estensione le due molle si comportano come se fossero una sola molla il cui coefficiente di elasticità avrebbe per valore

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}.$$

9. Calcolare il periodo delle oscillazioni di torsione d'un disco fissato ad un supporto formato da due aste diverse unite una all'altra (fig. 97). L'estremità superiore A del supporto è fissa. Se il disco fosse fissato alla prima asta, il suo periodo d'oscillazioni sarebbe uguale a T_1 e se fosse fisato alla seconda asta, il suo periodo sarebbe uguale a T_2.

Risposta. $T = \sqrt{T_1^2 + T_2^2}$.

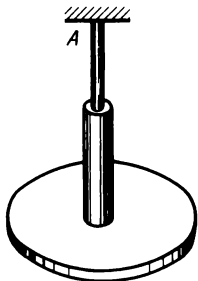
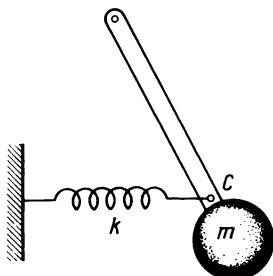
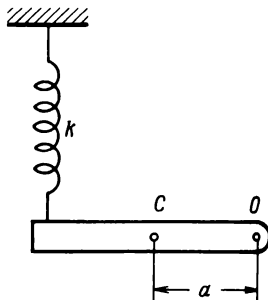



Fig. 97. Fig. 98. Fig. 99.

10. Calcolare il periodo delle piccole oscillazioni d'un pendolo fisico di massa m, al cui centro di massa C è attaccata una molla orizzontale con coefficiente d'elasticità k; l'altra estremità della molla è fissata al muro (fig. 98). Il momento d'inerzia del pendolo rispetto al suo punto di sospensione è I, la distanza tra il punto di sospensione e il centro di massa del pendolo è a. Nella posizione d'equilibrio la molla non è deformata.

Risposta. $T = 2\pi \sqrt{\dfrac{I}{mga + ka^2}}$.

11. Immaginiamo un sistema oscillante costituito da un'asta omogenea di lunghezza l e di massa m che può ruotare attorno ad un asse arizzontale O passante per una delle sue estremità e perpendicolare all'asse longitudinale dell'asta (fig. 99). L'altra estremità dell'asta è sospesa ad una molla con coefficiente di elasticità k. La distanza tra il centro di massa dell'asta e l'asse di rotazione $CO = a$. Il momento d'inerzia dell'asta rispetto all'asse O è uguale a I. Calcolare l'allungamento della molla x_0 (rispetto alla sua lunghezza in stato non deformato) in stato d'equilibrio se in questa posizione l'asta è orizzontale. Calcolare anche il periodo delle piccole oscillazioni dell'asta attorno alla sua posizione d'equilibrio.

Risposta. $x_0 = \dfrac{mga}{kl}$, $T = 2\pi \sqrt{\dfrac{I}{kl^2}}$.

12. Una corta piastra elastica è fissata all'estremità di un'asta omogenea di lunghezza l e di massa m. Una prima volta la piastra viene bloccata in una morsa in modo che l'asta sia diretta verso il basso e un'altra volta in modo che l'asta sia diretta verso l'alto (fig. 100). Calcolare il rapporto dei periodi delle piccole oscillazioni dell'asta in questi due casi. Il momento delle forze elastiche della piastra è proporzionale all'angolo di deviazione dell'asta dalla sua posizione d'equilibrio. Il coefficiente di proporzionalità è uguale a k.

Risposta. $\dfrac{T_1}{T_2} = \sqrt{\dfrac{2k - mgl}{2k + mgl}}$.

13. Due palline non fisse di massa m_1 e m_2 sono legate l'una all'altra per mezzo di una molla a spirale con coefficiente d'elasticità k. Calcolare il periodo di oscillazione delle palline rispetto al centro di massa del sistema, per oscillazioni causate da un'estensione della molla.

Risposta. $T = 2\pi \sqrt{\dfrac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)k}}$.

14. Due dischi con momenti d'inerzia I_1 e I_2 sono fissati ad un asse comune che passa attraverso i loro centri. L'asse è un'asta il cui modulo di torsione è f. Calcolare il periodo delle oscillazioni di torsione di un disco rispetto all'altro supponendo che il sistema sia libero; trascurare la massa dell'asta.

Risposta. $T = 2\pi \sqrt{\dfrac{I_1 I_2}{f(I_1 + I_2)}}$.

15. Due cilindri pieni ed omogenei con lo stesso raggio R, di massa m_1 e m_2, si trovano su una tavola orizzontale e sono collegati l'uno all'altro da due molle identiche il cui coefficiente d'elasticità è k (fig. 101, vista dall'alto). Calcolare il periodo delle piccole oscillazioni che compaiono se prima si tendono le molle e poi si abbandona il sistema a se stesso senza comunicargli nessuna velocità supplementare. I cilindri ruotano sulla tavola senza slittamento. Le molle possono lavorare sia compresse che estese

Risposta. $T = \pi \sqrt{\dfrac{3 m_1 m_2}{k(m_1 + m_2)}}$.

16. Le oscillazioni di un pendolo semplice (matematico) sono isocrone (o meglio lo sono approssimativamente) soltanto quando le loro ampiezze sono piccole. Huygens si fissò nell'idea di costruire un pendolo le cui oscillazioni fossero rigorosamente isocrone qualunque fosse la loro ampiezza e dimostrò che questo si può ottenere con *un pendolo cicloidale.* Il pendolo cicloidale semplice (matematico) è costituito da un punto materiale che esegue oscillazioni spostandosi su un arco di cicloide sotto l'azione della forza di gravità. Dimostrare che le oscillazioni di un pendolo cicloidale sono isocrone e stabilire la formula per il suo periodo.

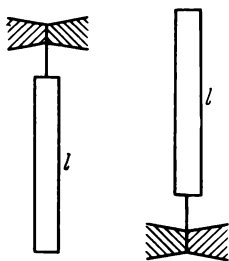
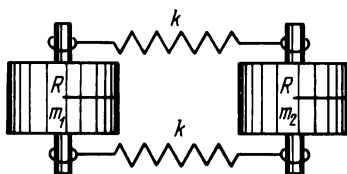



Fig. 100. Fig. 101.

Soluzione. Si sa che la cicloide è la curva descritta da uno dei punti di un cerchio che ruota su una retta fissa. Per i nostri fini bisogna prendere una cicloide convessa verso il basso. Supporremo inoltre che il cerchio sia collocato al di sotto della retta orizzontale sulla quale rotola (nella figura 102 questa retta è tratteggiata). Si prenda per asse X una retta ad essa parallela, posta più in basso di una distanza uguale al diametro $2a$ del cerchio. Supponiamo che il punto A del cerchio, che descrive la cicloide, si trovi inizialmente nella posizione più alta sull'asse Y di ordinata $2a$. Se il cerchio, rotolando sulla retta, gira di un angolo φ, il suo centro C si sposta verso destra di una distanza $a\varphi$ ed il punto A si sposta rispetto al centro C verso sinistra di una distanza $a \sin\varphi$ e verso il basso di una distanza $a(1 - \cos\varphi)$. Allora le coordinate ortogonali del punto A diventeranno

$$x = a(\varphi - \sin\varphi), \quad y = a(1 + \cos\varphi).$$

È la forma parametrica dell'equazione della cicloide. Ammettiamo ora che x e y indichino le coordinate del punto materiale che effettua oscillazioni cicloidali sotto l'azione della forza di gravità. Il parametro φ diventa allora una funzione del tempo. L'energia potenziale del punto sarà $U = mgy$, la sua energia cinetica sarà $K = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$. Avendo calcolato le derivate x, y ed eseguito trasformazioni elementari, si ottiene

$$U = 2mga \cos^2\frac{\varphi}{2}, \quad K = 2\,ma^2 \sin^2\frac{\varphi}{2} \cdot \dot{\varphi}^2.$$

Se introduciamo $q = \cos\frac{\varphi}{2}$, si ottiene $\dot{q} = -\frac{1}{2}\sin\frac{\varphi}{2} \cdot \dot{\varphi}$. La grandezza q può essere presa come coordinata del punto oscillante e la sua derivata $\dot{q}$ rispettivamente come velocità generalizzata. Con questi valori

$$U = 2\,mga\,q^2, \quad K = 8\,ma^2\,\dot{q}^2.$$

L'energia potenziale è una funzione quadratica della coordinata q e l'energia cinetica è una funzione quadratica della derivata $\dot{q}$ con coefficienti costanti. Ne deriva che per qualunque ampiezza, le oscillazioni del pendolo cicloidale saranno isocrone ed armoniche con periodo

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{4a}{g}}.$$

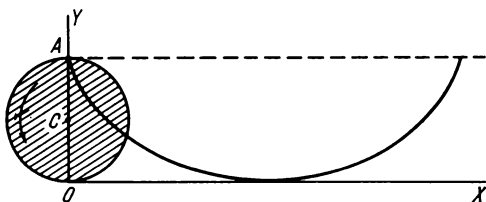



Fig. 102.

17. Un pendolo è sospeso ad un elastico così fortemente teso che si può ignorare la sua lunghezza iniziale. Questo pendolo può effettuare oscillazioni orizzontali armoniche e isocrone di ampiezza qualsiasi? Se è possibile, calcolare il periodo di oscillazione. È possibile che il pendolo effettui moti circolari in un piano verticale? Quale sarà il moto quando le condizioni iniziali sono arbitrarie?

Risposta. Sono possibili ambedue i moti. Il loro periodo è

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}},$$

dove m è la massa del pendolo e k il coefficiente d'elasticità dell'elastico. Quali che siano le condizioni iniziali, il moto del pendolo sarà ellittico con periodo di rivoluzione T.

18. Su una sbarra che ruota su un piano orizzontale con velocità angolare costante ω scivola senza attrito un peso di massa m, tenuto ad una certa distanza dall'asse di rotazione da una molla con coefficiente d'elasticità k e di lunghezza iniziale r_0. Quale sarà il moto del peso se si arresta istantaneamente la rotazione della sbarra?

Risposta. $r = r_0\left(1 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2}\cos\omega_0 t\right)$, con $\omega_0 = \sqrt{k/m}$. Si deve avere $\omega < \omega_0$. Altrimenti il peso posto sulla sbarra in rotazione si allontanerebbe indefinitamente dall'asse di rotazione e l'equilibrio contraddirebbe la condizione ipotizzata dal problema e sarebbe irrealizzabile.

19. Ad una molla orizzontale viene attaccato un corpo di massa $M = 10$ kg che si trova su una tavola liscia sulla quale può scivolare senza attrito (fig. 103).

Una pallottola di massa $m = 10$g colpisce il corpo e viene fermata al suo interno. La velocità orizzontale della pallottola, $v = 500$ m/s, è diretta lungo l'asse della molla. All'impatto con la pallottola il corpo abbandona la sua posizione d'equilibrio e comincia ad oscillare rispetto a questa posizione con una ampiezza $a = 10$ cm. Calcolare il periodo d'oscillazione del corpo.

Risposta. $T = 2\pi \dfrac{M + m}{mv} a \approx 1{,}26$ s.

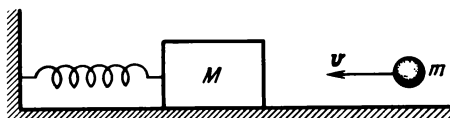
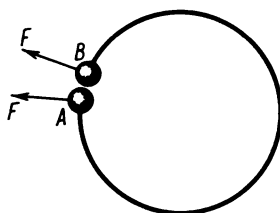



Fig. 103. Fig. 104.

20. Una pallina è infilata su un ago d'acciaio. L'estremità opposta dell'ago è fissata. Supponendo che la massa dell'ago sia trascurabile rispetto a quella della pallina, dimostrare che il periodo delle piccole oscillazioni, provocate dalla deviazione della pallina, è proporzionale alla distanza l tra la pallina e il punto in cui è fissato l'ago.

Suggerimento. Consideriamo un ago ausiliare omogeneo che abbia una forma ad anello. Se lo si taglia in un punto qualunque ed alle due estremità si attaccano le palline A e B, compariranno forze elastiche radiali F, applicate alle palline e tendenti a radrizzare l'ago incurvato (fig. 104). L'intensità di queste forze non dipende dal punto in cui è stato tagliato l'ago. Fatta questa osservazione, riesaminiamo il nostro problema. Se si sposta la pallina infilata sull'ago, questo si deforma. Nel caso di piccole deformazioni il tratto dell'ago compreso tra la pallina e il punto di fissaggio dell'ago può essere considerato in prima approssimazione come un arco di cerchio. Conformemente all'osservazione precedente si può affermare che la forza che agisce in questo tratto deformato non varia per tutta la sua lunghezza. Partendo da questa considerazione è facile dimostrare che il coefficiente d'elasticità k dell'ago è inversamente proporzionale al quadrato della lunghezza l.

21. Calcolare il periodo delle oscillazioni di un pendolo fisico in funzione della loro ampiezza angolare.

Soluzione. La legge di conservazione dell'energia dà

$$\frac{I}{2}\dot{\varphi}^2 = mga(\cos\varphi - \cos\varphi_0).$$

dove φ è l'angolo di deviazione del pendolo dalla sua posizione d'equilibrio, φ_0 il valore massimo di questo angolo (ampiezza angolare delle oscillazioni). Introducendo la lunghezza ridotta del pendolo (formula 41.4) e eseguendo trasformazioni semplici si ottiene

$$\frac{d\varphi}{dt} = 2\sqrt{\frac{g}{l}}\sqrt{\sin^2\frac{\varphi_0}{2} - \sin^2\frac{\varphi}{2}}.$$

Risolviamo questa equazione rispetto a dt ed integriamo rispetto a φ, si ottiene che il periodo d'oscillazione del pendolo T è uguale al quadruplo del tempo che impiega il pendolo per percorrere l'angolo tra $\varphi = 0$ e $\varphi = \varphi_0$. Per facilitare l'integrazione si introduce una nuova variabi-

le d'integrazione $u = \sin(\varphi/2)/\sin(\varphi_0/2)$, ottenendo

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{du}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 u}},$$

dove $k \equiv \sin(\varphi_0/2)$. L'integrale, che fa parte dell'equazione non può essere calcolato per mezzo di funzioni elementari, porta il nome di *integrale ellittico di prima specie,* e può essere rappresentato mediante una serie infinita. Dato che $|k \sin u| < 1$, l'espressione sotto il segno d'integrazione può essere sviluppata in serie applicando la formula del binomio di Newton

$$(1 - k^2\sin^2 u)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2} k^2 \sin^2 u + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4} k^4 \sin^4 u + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6} k^6 \sin^6 u + \ldots$$

Questa serie, essendo uniformemente convergente, può essere integrata termine a termine; allora si ottiene

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \left[1 + \frac{1}{4}\sin^2\frac{\varphi_0}{2} + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 \sin^4\frac{\varphi_0}{2} + \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 \sin^6\frac{\varphi_0}{2} + \ldots\right].$$

Per piccole ampiezze φ_0 questa formula si riduce alla formula (41.3).

§ 43. *Gli invarianti adiabatici*

1. L'energia, l'impulso o il momento della quantità di moto di un sistema meccanico sono funzioni delle sue coordinate e delle sue velocità. Se un sistema è isolato queste grandezze si conservano, cioè non variano rispetto al tempo. Se il sistema non è isolato ed i parametri che determinano il suo stato variano rispetto al tempo, le grandezze sopra indicate variano, in generale, anch'esse. Consideriamo, ad esempio, un pendolo semplice (matematico) il cui filo di sospensione passa attorno ad un chiodo. I parametri qui sono la lunghezza l del filo e l'accelerazione di gravità g. Agendo sull'estremità libera del filo, si può accorciare o aumentare la lunghezza l, ma con ciò si effettua un lavoro esterno e perciò l'energia del pendolo cambia. Si può anche modificare il valore dell'accelerazione di gravità facendo salire o scendere il pendolo rispetto alla superficie terrestre. Fra tutte le variazioni che possono essere effettuate sui parametri esterni, un ruolo particolare spetta alle variazioni infinitamente lente, che vengono chiamate *variazioni adiabatiche*.[1].

In questo caso, per quanto lente siano le variazioni dei parametri, queste possono assumere qualunque valore compatibile con l'impostazione del problema e la loro trasformazione nelle necessarie variazioni finite richiede soltanto un tempo sufficientemente lungo. Le variazioni dei parametri del sistema, per quanto lente, provocano variazioni di altre grandezze fisiche. È stato già notato che l'energia del sistema non rimane costante poiché, du-

[1]In termodinamica il termine « adiabatico » ha un altro significato. Un processo è chiamato adiabatico se si effettua senza apportare o asportare calore.

rante le variazioni dei parametri, viene effettuato un lavoro sul sistema. Ma possono esistere anche grandezze tali da rimanere costanti o approssimativamente costanti a causa della variazione lenta dei parametri.

Le *funzioni delle coordinate, delle velocità e dei parametri del sistema, che rimangono costanti in caso di variazioni infinitamente lenti dei parametri, si chiamano invarianti adiabatici.* Questo enunciato sarà precisato in seguito poiché va precisata la nozione stessa di « infinitamente lento ». Gli invarianti adiabatici hanno giocato un ruolo decisivo nella vecchia teoria atomica semi-classica di Bohr; essi però hanno un'importanza notevole anche in altre branche della fisica, nelle quali conservono il loro significato fisico.

2. Per chiarire il significato della nozione d'invariante adiabatico, consideriamo prima l'esempio, semplice ma importante, di un oscillatore armonico la cui frequenza propria varia lentamente rispetto al tempo. È il caso di un pendolo matematico, in cui variano lentamente i parametri: lunghezza l del filo di sospensione e accelerazione di gravità g (più precisamente la loro combinazione $\omega^2 = g/l$). Come altro esempio possiamo considerare le oscillazioni d'una pallina attaccata ad una molla il cui coefficiente d'elasticità k varia lentamente rispetto al tempo. Tutti questi sistemi, chiamati *oscillatori armonici*, sono matematicamente equivalenti. Per maggiore concretezza consideriamo l'esempio della pallina attaccata ad una molla. Questo si riconduce matematicamente all'esempio del pendolo semplice se al coefficiente di elasticità si attribuisce il valore $k = mg/l$. Finché si esamina il solo aspetto matematico del problema, non importa conoscere la causa che produce la variazione del coefficiente di elasticità o delle altre grandezze lentamente variabili.

L'energia totale d'un oscillatore armonico è

$$E = \frac{mv^2}{2} + \frac{kx^2}{2}.$$

Per la sua derivata rispetto al tempo si può scrivere

$$\dot{E} = (mv\dot{v} + kx\dot{x}) + \frac{x^2}{2}\dot{k}.$$

L'espressione tra parentesi si annulla poiché $\dot{x} = v$, la forza agente $F = -kx$ e secondo Newton $m\dot{v} = F$. Introducendo anche l'energia potenziale $U = 1/2\, kx^2$, si ottiene

$$\dot{E} = U(x)\frac{\dot{k}}{k}, \qquad (43.1)$$

Fin qui i nostri calcoli sono del tutto esatti. Esaminiamo ora il caso di *una variazione lenta* del parametro k e della sua derivata $\dot{k}$. Dire che la variazione è lenta significa dire che quando k varia, il moto ha sempre un carattere oscillatorio, solo che il suo « periodo » T e le posizioni dei punti estremi va-

riano leggermente da un'oscillazione all'altra. Ciò vuol dire che durante ogni oscillazione, la variazione del parametro k deve esser molto piccola. Questa è una definizione usuale di una variazione lenta; tuttavia non è sufficiente per il nostro problema, perché bisogna imporre un vincolo ulteriore alla variazione di k e della sua derivata, esigendo che durante ogni periodo d'oscillazione il quoziente $\dot{k}/k$ rimanga quasi costante. Più esattamente bisogna che per ogni periodo d'oscillazione il rapporto $\dot{k}/k$ possa essere rappresentato nella forma

$$\frac{\dot{k}}{k} = \left(\frac{\dot{k}}{k}\right)_0 \left[1 + \alpha\right]. \tag{43.2}$$

dove $(\dot{k}/k)_0$ è il valore di questo rapporto in ùn punto qualunque del periodo considerato, ad esempio, alla metà del periodo, ed α una correzione che tende allo zero per $\dot{k} \to 0$. Tenendo conto di queste osservazioni, integriamo l'espressione (43.1) tra t e $t + T(k)$ per un istante t qualunque

$$\Delta E = E(t + T) - E(t) = \left(\frac{\dot{k}}{k}\right)_0 \left[\int_t^{t+T} U[x(t')]\, dt' + \beta\right]. \tag{43.3}$$

Qui β è un termine correttivo che si annulla per $\dot{k} \to 0$. (La variabile d'integrazione è stata indicata con t' per non creare confusioni con il limite inferiore d'integrazione t). È sufficiente calcolare l'integrale che fa parte di questa formula nell'approssimazione d'ordine zero, cioè ammettere nei calcoli che durante il tempo T il parametro k non vari. L'errore che si commette allora sul valore di ΔE è infinitesimo almeno del second'ordine rispetto a $\dot{k}$. Per una ragione identica si può trascurare il termine correttivo β. Si può anche, infine, eliminare l'indice 0 nel fattore $(\dot{k}/k)_0$. Quindi si può scrivere

$$\Delta E = \frac{\dot{k}}{k} \int_t^{t+T} U[x(t')]dt', \tag{43.4}$$

dove l'integrale (e non il fattore davanti all'integrale) viene calcolato supponendo k costante. Nel calcolare l'integrale si può prendere l'istante t per origine dei tempi, cioè porre $t = 0$, cosa che sicuramente non influenzerà il risultato. Per $k = \text{cost}$, la coordinata x effettua oscillazioni armoniche $x = x_0 \cos(\omega t + \delta)$ e perciò

$$U = \frac{kx_0^2}{2} \cos^2 (\omega t + \delta) = \frac{E}{2} [1 + \cos (2\omega t + \delta)],$$

dato che l'energia totale $E = 1/2\, kx_0^2$. Utilizzando l'espressione ottenuta ed eseguendo l'integrazione si ottiene

$$\int_0^T U\, dt = \frac{E}{2} \int_0^T [1 + \cos (2\omega t + \delta)]dt = \frac{ET}{2}.$$

Il prodotto $T\dot{k}$, a meno di infinitesimi di ordine superiore rispetto a $\dot{k}$, rappresenta l'incremento Δk del parametro k durante un periodo T. Si può, quindi, invece di (43.4) scrivere

$$\Delta E = \frac{\Delta k}{2k} E. \tag{43.5}$$

Dato che l'incremento Δk durante il periodo d'oscillazione può essere piccolo quanto si vuole, si può considerare l'energia E come una funzione del parametro k; al limite l'uguaglianza approssimata (43.5) si trasforma in un'equazione differenziale esatta

$$\frac{dE}{E} - \frac{dk}{2k} = 0.$$

Integrando questa equazione si ottiene

$$\ln \frac{E}{\sqrt{k}} = \text{cost.}$$

quindi

$$\frac{E}{\sqrt{k}} = \text{cost.} \tag{43.6}$$

Utilizzando le formule (40.3) e (40.4) se ne deducono altre due

$$ET = \text{cost}, \tag{43.7}$$

$$\frac{E}{\omega} = \text{cost.} \tag{43.8}$$

Queste relazioni significano che *per un oscillatore armonico le grandezze* ET *e* E/ω *sono invarianti adiabatici. Il periodo d'oscillazione* T *e la frequenza* ω, che compaiono in queste relazioni, *devono essere calcolati come se il parametro* k *durante le oscillazioni rimanesse costante,* cioè secondo le formule (40.3) e (40.4). Nel caso di una diminuzione lenta della lunghezza del filo di sospensione di un pendolo semplice (matematico) che effettua piccole oscillazioni il suo periodo T diminuerà lentamente da una oscillazione all'altra. Nello stesso tempo l'energia delle oscillazioni aumenterà in modo che il prodotto ET rimanga costante.

3. Per comprendere meglio la portata del problema esposto è importante rendersi conto di ciò che si intende per « variazione lenta » del parametro k dell'oscillatore. Non è sufficiente che ad ogni periodo d'oscillazione le variazioni del parametro k siano infinitamente piccole, bisogna anche che soddisfino alla condizione (43.2). Immaginiamo, ad esempio, che vicino alla posizione inferiore di un pendolo semplice (matematico) oscillante, diminuisca leggermente la lunghezza del suo filo di sospensione sotto l'azione di forze esterne e vicino alle sue posizioni estreme si allunghi riacquistando il suo valore iniziale. Il lavoro effettuato dalle forze esterne per accorciare il

filo in prossimità della posizione inferiore sarà maggiore di quello effettuato nella direzione del campo esterno per allungare il filo vicino alle posizioni estreme perché durante le oscillazioni la tensione del filo varia ed è massima nella posizione inferiore del pendolo. Perciò verrà fornita energia al sistema due volte per ciascuna oscillazione. Se il numero di oscillazioni è grande, l'incremento d'energia del sistema sarà grande, benché la lunghezza del pendolo e il suo periodo T rimangano costanti. Le oscillazioni i cui parametri variano periodicamente sono chiamate oscillazioni *parametriche*. Un esempio ne è l'altalena. I risultati (43.7) e (43.8) non si applicano alle oscillazioni parametriche per quanto piccole siano le variazioni del parametro k in ogni periodo. La ragione è che queste variazioni non soddisfano la condizione (43.2). La *condizione* (43.2) *esige,* grosso modo, *che le variazioni del parametro k siano lente e monotone.* Così, nel nostro esempio, l'invarianza adiabatica delle espressioni (43.7) e (43.8) potrà essere realizzata se la lunghezza del filo varia in un modo lento e monotono. Però, se si sovrappongono a tali variazioni altre piccole variazioni di carattere oscillatorio, simili a quelle che vengono utilizzate per provocare un'eccitazione parametrica delle oscillazioni, il teorema relativo all'invarianza adiabatica delle espressioni (43.7) e (43.8) non si applica.

4. I risultati ottenuti possono essere estesi ai casi d'oscillazioni non armoniche con un grado di libertà, cioè alle oscillazioni prodotte da forze non del tutto elastiche. In questo caso la grandezza oscillante varia rispetto al tempo non sinusoidalmente, ma in qualche altro modo. Il periodo d'oscillazione T dipende allora non soltanto dai parametri del sistema, ma anche dall'ampiezza delle oscillazioni. Allora invece della formula (43.7) si ottiene

$$\bar{K}T = \text{cost}, \tag{43.9}$$

dove $\bar{K}$ è il valore medio dell'energia cinetica per periodo d'oscillazione (è proprio questo che sta ad indicare il trattino messo sopra il simbolo K), cioè

$$\bar{K}(t) = \frac{1}{T}\int_{t}^{t+T} K(t')dt'. \tag{43.10}$$

È facile dimostrare che nel caso di oscillazioni armoniche i valori, mediati su un periodo, dell'energia cinetica e dell'energia potenziale sono uguali ciascuno alla metà dell'energia totale, cioè $\bar{K} = \bar{U} = 1/2\, E$. Allora la formula (43.9) si riduce alla formula (43.7) già ottenuta.

Portiamo l'espressione (43.10) nella formula (43.9) e osserviamo che $K = 1/2\, mv^2$, $p = mv$, $dq = vdt$, dove dq è l'incremento della coordinata che caratterizza la posizione del punto materiale. Si ottiene allora

$$\oint pdq = \text{invariante adiabatico}, \tag{43.11}$$

l'integrazione essendo estesa a tutto un periodo del moto del punto materiale, supponendo che i parametri del sistema siano invariabili. La dimostrazione generale della formula (43.11), basata su equazioni di meccanica espresse nella forma di Hamilton, non verrà data; ci limitiamo a fornire due esempi per illustrare il problema.

5. Primo esempio. Una pallina perfettamente elastica si muove in un cilindro a pareti lisce su e giù rimbalzando successivamente dal fondo AB del cilindro e dallo stantuffo CD, secondo le leggi che regolano l'urto perfettamente elastico (fig. 105). Supponiamo dapprima che non ci siano né il cam-

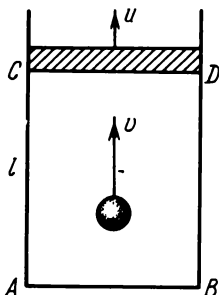



Fig. 105.

po di gravità né nessun altro campo di forze. Assicuriamo uno spostamento lento dello stantuffo CD alla velocità u e vediamo cosa accade al moto della pallina. Passiamo ad un sistema di riferimento mobile rispetto al quale lo stantuffo sia a riposo. In questo sistema di riferimento la velocità della pallina sarà $v-u$. Dopo ogni rimbalzo la velocità resterà uguale in grandezza, ma cambierà di segno, cioè diventerà uguale a $-v+u$. Rispetto ad un sistema di riferimento immobile la stessa velocità è uguale a $(-v+u)+u=-v+2u$. L'incremento dell'energia cinetica della pallina, come risultato di un solo rimbalzo dallo stantuffo mobile, sarà quindi uguale a

$$\Delta K = \frac{m}{2}[(-v + 2u)^2 - v^2] = -2m(uv - u^2).$$

Dividendo tutti i termini per $K=1/2\, mv^2$ e trascurando il quadrato della piccola velocità u, si ottiene

$$\frac{\Delta K}{K} = -4\frac{u}{v}. \tag{43.12}$$

Vediamo ora come varia il periodo T delle oscillazioni della pallina in seguito al moto dello stantuffo. Per periodo T si intende il tempo che impiega la pallina a percorrere un'andata e ritorno tra il fondo del cilindro e

lo stantuffo, supponendo fisso lo stantuffo. Se l è la distanza tra lo stantuffo e il fondo del cilindro nel percorso di andata e ritorno, allora $T = 2l/v$. Dopo il tempo T la distanza l aumenterà di uT, mentre la velocità della pallina diminuerà di $2u$. Il periodo T delle oscillazioni che abbiamo definito sopra cambierà e diventerà uguale a

$$T' = \frac{2(l + uT)}{v - 2u} = \frac{2(l + uT)(v + 2u)}{v^2 - 4u^2},$$

ossia, trascurando il quadrato della piccola velocità u,

$$T' = T + \frac{2uTv + 4lu}{v^2} = T + 4T\frac{u}{v}.$$

Quindi, durante il tempo T il periodo aumenterà di

$$\Delta T = 4T\frac{u}{v} = -T\frac{\Delta K}{K}.$$

Al limite, quando il moto dello stantuffo sia infinitamente lento, si possono considerare gli incrementi ΔT e ΔK come differenziali infinitamente piccoli, allora si otterrà l'equazione

$$\frac{dT}{T} + \frac{dK}{K} = 0.$$

Integrandola si ottiene

$$TK = \text{cost}, \tag{43.13}$$

il che significa che la *grandezza TK è un invariante adiabatico.*

6. Secondo esempio. Teniamo ora conto della forza di gravità e supponiamo che v_1 sia la velocità della pallina che rimbalza dallo stantuffo ad una posizione più alta (fig. 106). Ad una distanza x dallo stantuffo la sua velocità v è definita dalla relazione $v^2 = v_1^2 + 2gx$. Nel caso considerato l'integrale (43.11) sarà

$$J = 2m\int_0^l \sqrt{v_1^2 + 2gx}\, dx,$$

dove l è la distanza tra lo stantuffo e il fondo del cilindro. Il *calcolo di questo integrale deve effettuarsi supponendo che lo stantuffo sia fisso, cioè con* $l =$ cost. Allora secondo il calcolo

$$J = \frac{2m}{3g}(v_1^2 + 2gl)^{3/2} - v_1^3 = \frac{2m}{3g}(v_2^3 - v_1^3),$$

dove v_2 è la velocità della pallina nella sua posizione più bassa. Quindi, bisogna dimostrare che la differenza $v_2^3 - v_1^3$ è un invariante adiabatico. Cal-

coliamo le velocità v_1 e v_2 alla fine del periodo T. Indichiamo questi valori rispettivamente con v_1' e v_2'. È chiaro che i calcoli devono esere effettuati supponendo che lo stantuffo nella sua nuova posizione sia immobile. Durante il tempo T lo stantuffo si sposta verso l'alto di una distanza uT. Per percorrere questa distanza la pallina impiega un tempo $\Delta T = uT/v_1$ (se si ignorano le piccole quantità d'ordine superiore). Sotto l'azione della forza

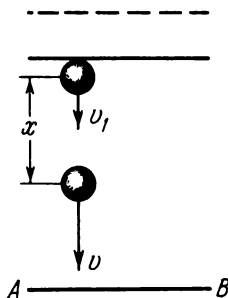



Fig. 106.

di gravità, la sua velocità diminuisce di $g\Delta T = g\frac{u}{v_1}T$. D'altra parte, rimbalzando dallo stantuffo mobile, la velocità della pallina diminuirà ancora di $2u$. Quindi

$$v_1' = v_1 - \left(\frac{gT}{v_1} + 2\right)u = v_1 - 2\frac{v_2}{v_1}u ,$$

dato che

$$v_2 = v_1 + g\frac{T}{2}.$$

Al livello AB la velocità della pallina sarà $v_1'' = v_1 - 2u$, mentre presso il fondo del cilindro essa sarà

$$v_2'^2 = v_1''^2 + 2gl = (v_1 - 2u)^2 + 2gl = v_2^2 - 4v_1u$$

se si trascura il quadrato della velocità u. Calcolando la radice quadrata e trascurando ancora una volta u^2 si ottiene

$$v_2' = v_2 - \frac{2v_1}{v_2}u.$$

Con lo stesso grado di approssimazione

$$v_2'^3 = v_2^3 - 6v_1v_2u, \; v_1'^3 = v_1^3 - 6v_1v_2u.$$

Ne risulta che $v_2'^3 - v_1'^3 = v_2^3 - v_1^3$ ossia $J' - J = 0$, osservando che la relazione è vera a meno di termini dell'ordine di $u^2 = l^2$. Dividendo questa ugua-

glianza per T ed identificando il quoziente $\frac{J' - J}{T}$ con la derivata $\frac{dJ}{dt}$, si ottiene

$$\frac{dJ}{dt} = A\dot{l}^2,$$

dove A non dipende da $\dot{l}$. Ora, dato che ci interessano le variazioni della grandezza J corrispondenti alle *variazioni finite* di l, trasformiamo questa relazione, sostituendo al differenziale temporale il diferenziale della lunghezza $dl = \dot{l}dt$. Si ottiene allora

$$\frac{dJ}{dl} = A\dot{l},$$

ossia, al limite per $\dot{l} \to 0$

$$\frac{dJ}{dl} = 0.$$

Quindi $J = \text{cost}$, per quanto grandi siano le variazioni del parametro l, cioè la ***grandezza J è un invariante adiabatico.*** Tale invarianza adiabatica è dovuta al fatto che la derivata $\frac{dJ}{dt}$ è risultata proporzionale a $\dot{l}^2$ e non a $\dot{l}$. Se $\frac{dJ}{dt}$ *fosse stata proporzionale alla derivata* $\dot{l}$, allora J non sarebbe stata un invariante adiabatico.

Problemi

1. La pallina d'un pendolo semplice, oppure una pallina attaccata ad una molla con coefficiente d'elasticità k, si vaporizza lentamente (sistema di massa variabile). Sarà la grandezza ET un invariante adiabatico? Se lo è, spiegare perché.

Risposta. No, la grandezza ET non è invariante adiabatico.

2. Sia data una pallina di massa m, infilata su un ago sottile d'acciaio avente un'estremità fissa e la cui massa sia trascurabile rispetto a m. Si imprima alla pallina una velocità longitudinale orientata verso il punto in cui l'ago è fissato, nonché una velocità perpendicolare alla precedente. Supponendo che durante il periodo d'oscillazione della pallina il suo spostamento lungo l'ago sia corto rispetto alla sua lunghezza e ignorando l'attrito, determinare il carattere del moto ulteriore della pallina.

Soluzione. Se $v_\perp$ è la velocità trasversale della pallina, la grandezza $v_\perp^2 T$ è un invariante adiabatico. Il periodo T è proporzionale alla distanza l tra la pallina ed il punto fisso dell'ago (si veda il problema 20 nel § 42). Perciò anche la grandezza $A = v_\perp^2 l$ sarà un invariante adiabatico. D'altra parte, il moto della pallina deve soddisfare alla legge di conservazione dell'energia che richiede alla velocità totale v della pallina di conservare il suo valore assoluto. Se $v_\parallel$ è la velocità longitudinale della pallina, allora $v^2 \equiv v_\parallel^2 + v_\perp^2 = \text{cost}$. Quindi la grandezza $A = (v^2 - v_\parallel^2)l$ è un invariante adiabatico. Ad una distanza l_0, per la quale $v^2 l_0 = A$, la velocità longitudinale $v_\parallel$ si annulla. Per questo la pallina non si avvicina al punto di fissaggio, se non a una distanza l_0. Arrivata alla posizione $l = l_0$ la pallina deve tornare indietro.

VII. MECCANICA DEI SOLIDI

§ 44. *I corpi solidi in meccanica. Equazioni del moto ed equilibrio dei corpi solidi*

1. Nei due capitoli precedenti abbiamo trattato le leggi del moto dei corpi solidi e delle loro applicazioni a certi moti semplici. Esamineremo in questo capitolo alcuni problemi riguardanti la meccanica dei corpi solidi.

In meccanica è chiamato *corpo solido* un sistema invariabile di punti materiali, le cui distanze reciproche restano le stesse qualunque sia il moto. Qui, e nella meccanica classica in generale, per punti materiali si intendono non atomi o molecole, ma le microscopiche particelle che si potrebbero teoricamente ottenere suddividendo il sistema meccanico considerato.

Da un punto di vista atomistico, le forze d'interazione che agiscono tra i punti materiali di un corpo solido sono forze *elettriche*. Ma la meccanica fenomenologica dei corpi solidi avversa l'approccio atomistico, perché considera tutti i corpi solidi come *mezzi continui*, tra i cui diversi elementi agiscono forze interne sotto forma di sforzi *normali* e *tangenziali* che si manifestano a causa della deformazione dei corpi. In un corpo non deformato sforzi interni non ci possono essere. Però se le deformazioni prodotte sotto l'azione delle forze esterne sono così piccole da non interessarci, possiamo in molti casi ignorarle. Si arriva così a un modello teorico di corpo solido che è assolutamente incapace di deformazione, sebbene sforzi e pressioni interni si possano manifestare sotto l'azione di forze esterne. Questo è per definizione un corpo solido perfettamente rigido. Per sapere se questa astrazione sia ammissibile o meno, bisogna prendere in considerazione non soltanto le proprietà dei corpi reali, ma anche il contenuto dei problemi da risolvere.

2. Ogni corpo solido è un sistema meccanico a sei gradi di libertà (cfr. § 8); per descriverne il moto si deve disporre di sei equazioni analitiche indipendenti o di due equazioni vettoriali indipendenti. Queste equazioni vettoriali sono l'equazione del moto del centro di massa

$$m\frac{d\boldsymbol{V}}{dt} = \boldsymbol{F}_{\text{est}} \tag{44.1}$$

e l'equazione dei momenti

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \boldsymbol{M}_{\text{est}}. \tag{44.2}$$

L'equazione dei momenti può essere stabilita rispetto a qualsiasi punto fisso o rispetto al centro di massa del corpo solido. Si può ugualmente prendere come origine un punto mobile qualunque sia il suo moto, a condizione che la sua velocità sia in ogni istante parallela alla velocità del centro di massa (cfr. § 37). Se la libertà di moto del corpo è limitata, il numero di equazioni indipendenti necessarie per descriverne il moto diminuisce, ma rimane sempre uguale al numero dei gradi di libertà.

Nelle equazioni (44.1) e (44.2) figurano soltanto le forze esterne. Le forze interne non influenzano il moto del centro di massa e non possono quindi modificare il momento della quantità di moto del corpo. Esse possono modificare soltanto la reciproca disposizione e le velocità dei punti materiali costituenti il corpo, ma tali modificazioni sono impossibili in un corpo solido perfettamente rigido. Quindi le forze interne non influenzano il moto di un corpo solido. Se invece si tratta di una forza esterna, se ne può spostare il punto d'applicazione lungo la retta di azione; in effetti un tale spostamento del punto d'applicazione della forza non modifica nè la risultante delle forze esterne $\boldsymbol{F}_{est}$, nè il loro momento $\boldsymbol{M}_{est}$, cioè le equazioni di moto (44.1) e (44.2) restano invariate. Un tale spostamento del punto d'applicazione della forza è inammissibile nel caso di un corpo deformato, poiché porterebbe ad una ridistribuzione delle deformazioni e modificherebbe i moti interni del corpo.

3. Se il corpo solido è in stato di riposo, le equazioni (44.1) e (44.2) si trasformano in

$$\boldsymbol{F}_{est} = 0, \quad \boldsymbol{M}_{est} = 0. \tag{44.3}$$

Sono le *condizioni necessarie* all'equilibrio di un corpo solido, ma da sole non sono sufficienti. Se lo fossero, il centro di massa potrebbe ancora spostarsi con moto rettilineo ed uniforme ad una velocità qualunque ed il corpo stesso ruotare conservando l'impulso rotante. Dato che per mantenere l'equilibrio la risultante delle forze esterne $\boldsymbol{F}_{est}$ deve essere uguale a zero, il momento di queste forze $\boldsymbol{M}_{est}$, in condizioni d'equilibrio, non dipende dalla posizione del punto fisso d'origine O rispetto alla quale si prende il modulo [cfr. la formula (30.7)]. Quindi nei problemi concernenti l'equilibrio dei corpi solidi, l'origine O può essere scelta arbitrariamente, il che ne semplifica la soluzione.

4. Anche se le deformazioni sono minime, non è sempre possibile sostituire i corpi solidi reali con modelli ideali di corpi solidi perfettamente rigidi. A titolo d'esempio, per illustrare questo enunciato, consideriamo il problema relativo all'equilibrio d'una trave rigida. Una trave omogenea di peso P si trova su due appoggi *1* e *2* (fig. 107). Il centro di massa della trave si trova giusto in mezzo agli appoggi. Determiniamo le forze F_1 e F_2 che la trave esercita sugli appoggi. Secondo la meccanica dei solidi, esistono due condizioni d'equilibrio

$$F_1 + F_2 = P, \quad F_2 l = P \cdot \frac{l}{2}, \tag{44.4}$$

dove l è la distanza tra i punti d'appoggio. La seconda condizione significa che il momento delle forze che agiscono sul punto d'appoggio *1* si annulla. Da queste condizioni deriva $F_1 = F_2 = P/2$. È un risultato accettabile. Le deformazioni della trave nel problema considerato non hanno un ruolo sostanziale. Si può accettare quindi l'ipotesi di un corpo perfettamente rigido.

Vediamo ora il comportamento di una trave che si trova su tre appoggi (fig. 108). La massa dei solidi dà di nuovo due condizioni d'equilibrio

$$F_1 + F_2 + F_3 = P, \quad F_3 x + F_2 l = P\frac{l}{2}, \qquad (44.5)$$

dove l è la distanza tra i sostegni *1* e *2* ed x la distanza tra i sostegni *1* e *3*. (La seconda equazione (44.5) si ottiene uguagliando a zero il momento del-

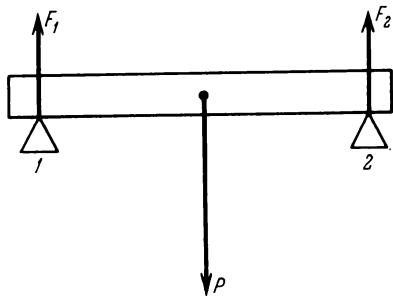
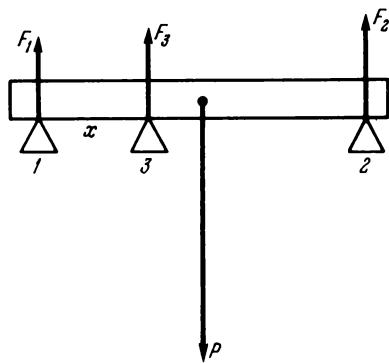



Fig. 107. Fig. 108.

le forze esterne rispetto al punto d'appoggio *1*.) Due equazioni non sono evidentemente sufficienti a determinare tre forze sconosciute F_1, F_2, F_3. Se si attribuisce a una di queste forze un valore qualunque, allora dalle equazioni (44.5) possiamo ricavare i valori delle altre due forze. Vediamo che il problema della distribuzione del peso della trave rigida fra i tre punti d'appoggio è rimasto indeterminato. Si chiamano *staticamente indeterminati* i sistemi meccanici analoghi a quelli di una trave rigida che poggia su tre sostegni.

Una situazione analoga si incontra anche nell'affrontare il problema di un tavolo in equilibrio su di un piano orizzontale. In questo caso, per definire l'equilibrio, la meccanica dei solidi fornisce tre equazioni indipendenti. Se il tavolo ha tre piedi, queste tre equazioni permettono di determinare univocamente le tre forze con cui i tre piedi del tavolo esercitano una pressione sul piano di sostegno. Ma se il tavolo ha quattro piedi, queste tre equazioni non bastano a determinare le forze di pressione. Un tavolo perfettamente rigido, a quattro piedi, che si trova su di un piano orizzontale perfettamente rigido rappresenta anch'esso un sistema statisticamente indeterminato.

È certo che il peso di una trave reale che poggia su tre sostegni si distribuisce tra di loro in un modo ben determinato. Anche la forza di pressione esercitata da un tavolo reale su quattro piedi si distribuisce in modo ben determinato. L'indeterminazione, alla quale siamo giunti, dimostra semplicemente che nei problemi in esame nè la trave su tre appoggi, nè il tavolo a quattro piedi possono *essere considerati perfettamente rigidi*. Anzi si deve tener conto delle loro deformazioni nonché delle deformazioni dei loro sostegni.

5. Un semplice ragionamento permette di spiegare perché le deformazioni possono diventare essenziali nella soluzione dei problemi considerati. Supponiamo che una trave perfettamente rigida abbia tre punti di sostegno (cfr. fig. 108). Spostiamo verso il basso il sostegno di mezzo. Dato che la travè è perfettamente rigida, non può deformarsi, e appare subito un interstizio fra la trave ed il sostegno *3*, che è stato spostato, dato che la trave non poggia ne preme più sul sostegno *3*. La forza di pressione che agisce sul sostegno *3* si annulla bruscamente ed in un modo ben determinato si distribuisce tra i due sostegni rimasti *1* e *2*. Lo stesso accade anche se si accorcia di infinitamente poco uno dei quattro piedi del tavolo. Ma la situazione è tutt'altra nel caso di una trave e di un tavolo reali. Se si abbassa il sostegno *3* di una lunghezza infinitamente piccola, la trave si incurverà pur continuando a poggiare su di esso. La forza di pressione esercitata dalla trave sul sostegno *3* non si annulla ma diminuisce di una quantità infinitamente piccola. Lo stesso accade quando il tavolo poggia su quattro piedi, tutti e quattro i piedi cioè subiscono delle deformazioni accorciandosi a causa del peso. Qualora si accorci uno dei piedi di infinitamente poco, la deformazione del piede diminuisce, il piede si riallunga e arriva di nuovo a toccare il piano di sostegno. Quindi la pressione esercitata su questo piede varia di una quantità infinitamente piccola, è, cioè, continua.

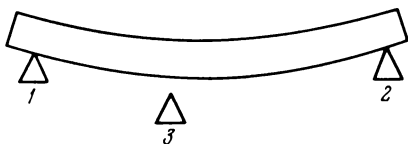



Fig. 109.

Consideriamo ora una trave reale che poggi su due sostegni *1* e *2* (fig. 109). Sotto l'azione del proprio peso la trave si incurva. Cominciamo col mettere sotto la trave un terzo sostegno *3* alzandolo poco a poco. Nel momento in cui il sostegno tocca la trave, questa non subisce alcun cambiamento. Ma se si continua ad alzare il sostegno *3*, la trave si raddrizza; per questo bisogna però che il sostegno applichi alla trave una forza sufficiente. Via via che si alza il sostegno *3*, questa forza cresce continuamente, acquistando un valore ben determinato ad ogni rialzamento del sostegno *3*.

Le affermazioni riportate dimostrano chiaramente perché nel risolvere il problema sulla distribuzione del peso della trave fra tre sostegni bisogna tener conto delle loro capacità elastiche. Questo problema sarà trattato nel capotolo X (problema N 3 del § 80). Un ragionamento analogo si applica al problema del tavolo a quattro piedi.

§ 45. *Asse istantaneo di rotazione*

1. Si abbia un corpo solido in rotazione attorno ad un asse fisso. Per farsi un'idea della distribuzione delle velocità in questo corpo è sufficiente studiare il moto dei suoi punti materiali situati in un qualunque piano perpendicolare all'asse di rotazione. Questo significa che il corpo in rotazione si può assimilare ad un corpo solido. La corrispondente distribuzione delle velocità è schematicamente rappresentata nella figura 110. Il punto O del

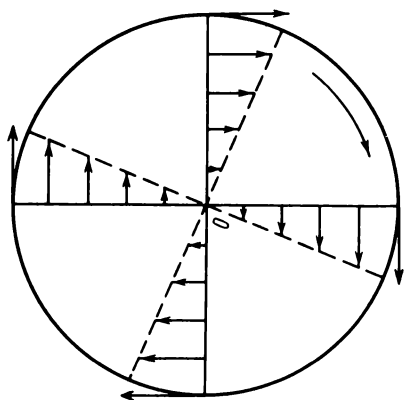
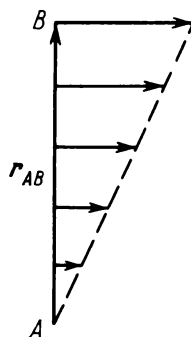



Fig. 110. Fig. 111.

corpo per il quale passa l'asse di rotazione è immobile. Tutti gli altri punti del corpo descrivono traiettorie circolari con centro in O e le loro velocità sono proporzionali ai raggi delle loro traiettorie. I valori delle velocità possono variare rispetto al tempo, ma l'asse di rotazione rimane sempre invariabile.

2. Consideriamo ora un moto più generale, quello di un corpo solido piatto. Facciamo coincedere il piano di rotazione con il piano del corpo; non si ravvisa l'esistenza di alcun asse fisso intorno cui ruoti il corpo. Se A e B sono due punti qualsiasi del corpo solido (fig. 111), la distanza fra loro resta costante e quindi $(r_B - r_A)^2 = \text{cost}$. Derivando questa relazione rispetto al tempo, si ottiene $(r_B - r_A)(\dot{r}_B - \dot{r}_A) = 0$, ossia

$$r_{AB}(v_B - v_A) = 0, \tag{45.1}$$

dove $r_{AB} \equiv \vec{AB}$. Supponiamo che, nell'istante considerato, esista nel corpo un punto la cui velocità sia uguale a zero. (Dimostreremo nel § 47 che un tale punto esiste per ogni moto piano di un corpo solido). Indichiamolo come punto A. Si avrà allora per l'istante considerato

$$r_{AB} v_B = 0,$$

quale che sia la posizione del punto B. Ne deriva evidentemente che la velocità v_B è perpendicolare a r_{AB}, cioè diretta lungo la tangente al cerchio di centro A. Durante il moto del corpo solido ogni retta nel corpo resta tale. L'enunciato è valido anche per la retta che collega i punti A e B. Dato che nell'istante considerato il punto A è immobile, il valore della velocità v_B è in quell'istante proporzionale alla distanza AB dal punto B al punto A. Partendo da ciò, si può dire che nell'*istante considerato la distribuzione istantanea delle velocità nel corpo è esattamente quella che si avrebbe durante la rotazione intorno ad un asse fisso passante per il punto A*. Il moto del corpo in questo caso è chiamato *moto di rotazione istantaneo.* La retta che passa per i punti del corpo le cui velocità sono uguali a zero nell'istante considerato, è chiamato *asse istantaneo di rotazione.* Nell'esempio in esame, l'asse instantaneo passa per il punto A. Con il termine « istantaneo » si precisa che la nozione suindicata serve a descrivere la distribuzione delle velocità solo in *un istante dato.* A differenza dell'asse immobile che conserva la sua posizione nel corpo e nello spazio, l'*asse istantaneo, in generale, si sposta sia all'interno del corpo che nello spazio.* Anche disponendo d'una fotografia istantanea della distribuzione delle velocità in un corpo, l'immagine ottenuta non permette di decidere se la rotazione si effettui intorno ad un asse immobile o istantaneo. Per distinguere l'una dall'altra si dovrebbero avere almeno due fotografie scattate in due istanti diversi.

3. L'*asse istantaneo serve soltanto a descrivere la distribuzione istantanea delle velocità.* Il medesimo asse non può servire a descrivere la distribuzione istantanea delle accelerazioni o delle derivate superiori rispetto al tempo. La distribuzione delle accelerazioni nella rotazione attorno ad un asse istantaneo può differire sostanzialmente dalla distribuzione delle accelerazioni nella rotazione intorno ad un asse fisso, anche quando le velocità angolari di questi due moti siano uguali. Il fatto è che, per determinare le accelerazioni, non è sufficiente conoscere soltanto la distribuzione delle velocità nell'istante considerato. Bisogna sapere anche quale sarà la distribuzione delle velocità in un istante infinitamente vicino. Può infatti accadere che proprio in quell'istante il corpo smetta di ruotare intorno al precedente asse istantaneo.

Il seguente esempio dimostra chiaramente la validità dell'asserzione. Consideriamo un cerchio o un disco in rotolamento senza scivolamento su di un piano (fig. 112). L'assenza di scivolamento significa che il punto A del cerchio, che, nell'istante considerato, entra in contatto con il piano, è immobile. Quindi il moto del cerchio si può considerare come una rotazione istantanea intorno al suo asse istantaneo che passa per il punto A di con-

tatto. Nella figura 112 è illustrata la distribuzione delle velocità in questo moto. Negli istanti successivi altri punti del cerchio verranno in contatto con il piano di rotolamento e il punto di contatto si sposterà lungo il piano di rotolamento nella medesima direzione in cui si muove il cerchio. Ciò significa che l'asse istantaneo si sposta rispetto al cerchio in rotolamento e rispetto al piano di rotolamento. Si spiega così l'enunciato di prima secondo cui l'asse istantaneo si sposta sia all'interno del corpo che nello spazio. Supponiamo ora che il rotolamento si effettui a velocità costante. Sarebbe

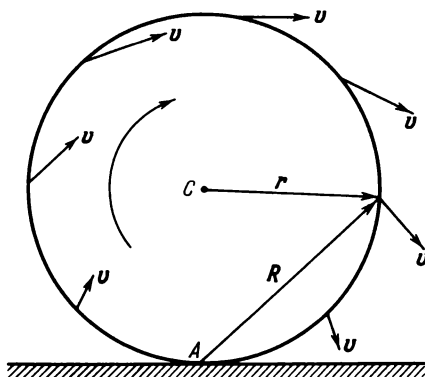



Fig. 112

un grave errore calcolare l'accelerazione secondo la formula $\boldsymbol{a} = -\omega^2\boldsymbol{R}$, considerando $\boldsymbol{R}$ il raggio vettore che collega l'asse istantaneo al punto considerato del cerchio. Infatti, la velocità risultante $\boldsymbol{v}$ di qualunque punto del cerchio è uguale alla somma vettoriale della velocità $\boldsymbol{v}_C$ del moto traslatorio del centro C del cerchio e della velocità di rotazione $\boldsymbol{v}_{\text{rot}}$ del punto considerato rispetto al centro C: $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_C + \boldsymbol{v}_{\text{rot}}$. Se il rotolamento del cerchio è uniforme, si ha $\frac{d\boldsymbol{v}_C}{dt} = 0$ e l'accelerazione sarà $\boldsymbol{a} = \frac{d\boldsymbol{v}_{\text{rot}}}{dt}$. Il moto traslatorio non influenza l'accelerazione $\boldsymbol{a}$ il cui valore è uguale a quello della rotazione intorno al centro immobile, cioè $\boldsymbol{a} = -\omega^2\boldsymbol{r}$, dove $\boldsymbol{r}$ è il raggio vettore che passa per il centro del cerchio O. Quindi durante un rotolamento uniforme l'accelerazione $\boldsymbol{a}$ è diretta verso il centro del cerchio e non verso l'asse istantaneo.

§ 46. *La velocità angolare considerata come vettore. Composizione dei moti di rotazione*

1. Sia dato un corpo solido in rotazione intorno ad un asse fisso o ad un asse istantaneo OA alla velocità angolare ω (fig. 113). Scegliamo un punto qualunque M di questo corpo a distanza $\boldsymbol{r}_\perp$ dall'asse di rotazione. Le velo-

cità lineare e angolare del punto M sono collegate tra loro dalla relazione

$$v = \omega r_{\perp}. \tag{46.1}$$

Introduciamo un vettore assiale $\boldsymbol{\omega}$ definito dal prodotto vettoriale

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{[\boldsymbol{r}_{\perp}\boldsymbol{v}]}{r_{\perp}^2}, \tag{46.2}$$

dove $\boldsymbol{r}_{\perp}$ è il raggio vettore condotto perpendicolarmente dall'asse di rotazione al punto M. In virtù della relazione (46.1) la lunghezza di questo vettore $\boldsymbol{\omega}$ è numericamente uguale alla velocità angolare di rotazione e la sua direzione coincide con quella dell'asse di rotazione. Apprezzeremo meglio le posizioni relative dei vettori $\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{r}_{\perp}$ e $\boldsymbol{v}$ conducendoli a partire da un'origi-

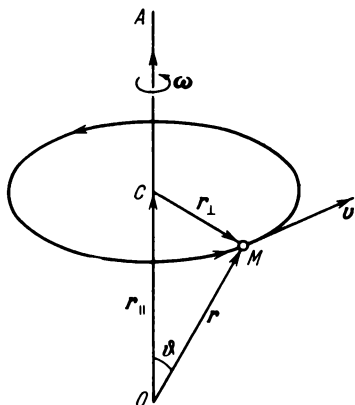



Fig. 113.

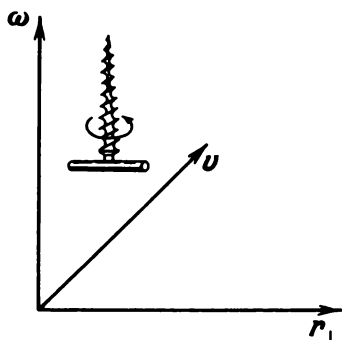



Fig. 114.

ne comune (fig. 114). Questi tre vettori sono ortogonali e dalla figura 114 risulta che

$$\boldsymbol{v} = [\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{r}_{\perp}]. \tag{46.3}$$

Questa formula è la generalizzazione della (46.1), poiché definisce non soltanto il valore della velocità $\boldsymbol{v}$, ma anche la sua direzione. Il vettore $\boldsymbol{\omega}$ si chiama *vettore velocità angolare* o più semplicemente *velocità angolare di rotazione*. Quindi si può considerare la *velocità angolare come una grandezza vettoriale*. Se si colloca un normale succhiello parallelamente all'asse di rotazione facendolo girare nella stessa direzione del corpo in rotazione, esso avanzerà nella stessa direzione del vettore $\boldsymbol{\omega}$.

Si può allora dare alla formula (46.3) una forma più generale e comoda. Prendiamo sull'asse di rotazione un punto qualunque O come origine delle coordinate (cfr. fig. 113). Allora il raggio vettore $\boldsymbol{r}$ condotto da questa origine al punto M può essere presentato mediante la somma vettoriale

$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_\perp + \boldsymbol{r}_\parallel$, dove $\boldsymbol{r}_\parallel$ è la componente del vettore $\boldsymbol{r}$ lungo l'asse di rotazione. Dato che $[\boldsymbol{\omega r}_\parallel] = 0$, allora la formula (46.3) si può sostituire con una più generale

$$\boldsymbol{v} = [\boldsymbol{\omega r}]. \tag{46.4}$$

Ne deriva che $v = \omega r \sin \vartheta$, il che coincide colla formula (46.1), dato che $r \sin \vartheta = r_\perp$.

2. *Non c'è bisogno di dimostrare che la grandezza* $\boldsymbol{\omega}$ *è una grandezza vettoriale essendo definita come prodotto vettoriale di due vettori. Il fatto che* $\boldsymbol{\omega}$ *sia una grandezza vettoriale significa soltanto che, facendo ruotare i sistemi di coordinate, le proiezioni di* $\boldsymbol{\omega}$ *sugli assi si trasformano proprio come le differenze delle coordinate delle estremità di un segmento di retta*

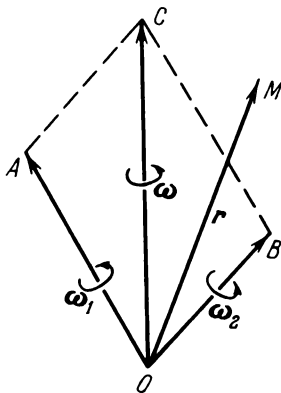



Fig. 115.

orientata. Con i vettori velocità angolari si possono eseguire tutte le operazioni matematiche applicabili ai vettori in generale. Si può, in particolare, ricorrere all'addizione matematica dei vettori ω_1 e ω_2 applicando la regola del parallelogramma. Ma se si definisce l'addizione delle velocità angolari per mezzo di un'operazione *fisica,* si può risolvere il problema solo ricorrendo ad un'analisi particolare. Introduciamo la *nozione di composizione dei moti* di rotazione attribuendole il seguente significato. Un corpo sia in rotazione a velocità angolare ω_1 intorno ad un asse *OA* anch'esso in rotazione a velocità angolare ω_2 intorno ad un secondo asse *OB* (fig. 115). Sottolineiamo che *trattiamo il caso generale di rotaizone istantanea a velocità non relativistiche.* Si studi la prima rotazione in un sistema di riferimento in cui (nell'istante considerato) l'asse *OA* sia immobile, e la seconda in un altro sistema di riferimento in cui (nel medesimo istante) sia immobile l'asse *OB*. Comporre questi due moti di rotazione significa rispondere alla domanda: quale moto produce l'addizione di questi due moti di rotazione?

Nell'esaminare questo problema ci limitiamo al caso in cui gli assi OA e OB si intersechino tra di loro.

Si tratta cioè di addizionare due velocità lineari aventi analogo significato fisico (cfr. § 7; nella meccanica non relativistica come è noto, la composizione delle velocità lineare e angolare si effettua secondo la regola del parallelogramma). Un punto qualunque M del corpo solido di raggio vettore $\mathbf{r}$ acquista in seguito al primo moto di rotazione intorno all'asse OA una velocità lineare $\mathbf{v}_1 = [\boldsymbol{\omega}_1 \mathbf{r}]$ e in seguito al secondo moto di rotazione intorno all'asse OB una velocità lineare $\mathbf{v}_2 = [\boldsymbol{\omega}_2 \mathbf{r}]$. La velocità lineare risultante sarà uguale a

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = [(\boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2)\mathbf{r}].$$

Se si introduce la somma vettoriale nel senso matematico del termine

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2, \tag{46.5}$$

si potrà scrivere il risultato nella forma

$$\mathbf{v} = [\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}]. \tag{46.6}$$

Si ponga il punto M sull'asse del vettore $\boldsymbol{\omega}$, cioè sulla diagonale del parallelogramma costruito sui vettori $\boldsymbol{\omega}_1$ e $\boldsymbol{\omega}_2$ o sul prolungamento della diagonale. Si ha allora $\mathbf{v} = 0$. Nell'istante considerato tutti i punti di quest'asse sono in stato di riposo. La ragione è che tutti i punti dell'asse si muovono in seguito al primo moto di rotazione in un senso e in seguito al secondo in senso opposto così che la velocità lineare risultante è uguale a zero. Tutti gli altri punti del corpo solido ruotano intorno all'asse del vettore $\boldsymbol{\omega}$ con velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$. La velocità lineare istantanea di qualsiasi punto del corpo può essere colcolata mediante la formula (46.6). Ciò significa che il *moto istantaneo risultante del corpo solido è una rotazione intorno all'asse istantaneo OC*. In generale, quest'asse si sposta costantemente rispetto allo stesso corpo solido e rispetto al sistema di riferimento immobile nel quale viene studiato il moto.

Abbiamo dimostrato, dunque, che *due moti di rotazione a velocità angolari* $\boldsymbol{\omega}_1$ *e* $\boldsymbol{\omega}_2$ *si compongono* (nel senso fisico considerato) *in un solo moto di rotazione a velocità angolare* $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2$ *intorno ad un'asse istantaneo. L'asse istantaneo in ogni istante è diretto lungo la diagonale del parallelogramma costruito sui vettori* $\boldsymbol{\omega}_1$ *e* $\boldsymbol{\omega}_2$*. La composizione di questi vettori si effettua dunque secondo la regola del parallelogramma.* La composizione fisica nel senso indicato risulta identica a quella matematica.

3. Illustriamo l'enunciato con un esempio concreto. Supponiamo che sulla superficie di un cono circolare immobile *2* ruoti senza slittare un altro cono circolare *1* (fig. 116 e 117). I vertici di entrambi i coni in ogni istante si trovano nello stesso punto O. Nel moto in considerazione il cono *1* ruota intorno al proprio asse OA con velocità angolare ω_1. L'asse stesso OA descrive una superficie conica ruotando con velocità angolare ω_2 intorno

all'asse OB. Si tratta di comporre questi due moti di rotazione. Dato che non esiste slittamento tutti i punti del corpo situati sulla retta OC, lungo la quale i due corpi sono in contatto, sono immobili. La tangente OC è dunque l'asse istantaneo di rotazione del cono *1*. L'asse istantaneo di rotazione

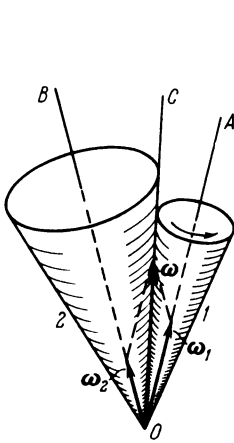
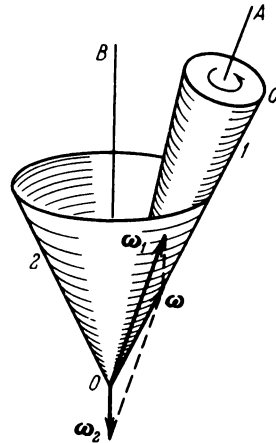



Fig. 116. Fig. 117.

si sposta sulla superficie del cono *1* e simultaneamente nello spazio, cioè sulla superficie del cono *2*.

4. La rotazione intorno agli assi paralleli può essere considerata come un caso limite di rotazione intorno agli assi intersecantisi. Si devono quindi distinguere due casi: 1) le rotazioni sono effettuate nello stesso senso; 2) le

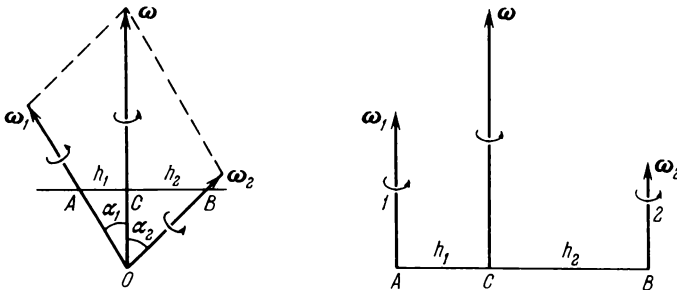



Fig. 118.

rotazioni sono effettuate in senso contrario. Consideriamo il primo caso. Costruiamo con i vettori ω_1 e ω_2 un parallelogramma intersecato da una retta arbitraria ACB perpendicolare al vettore ω (fig. 118, a simistra). Si ha allora $h_1 = OC \cdot \mathrm{tg}\ \alpha_1$, $h_2 = OC \cdot \mathrm{tg}\ \alpha_2$. Se gli angoli α_1 e α_2 sono piccoli, si pos-

sono sostituire alle loro tangenti i loro seni. Quindi si ottiene

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} = \frac{\omega_1}{\omega_2}. \tag{46.7}$$

Facendo tendere il punto O verso l'infinito, otteniamo il caso limite di due rotazioni nello stesso senso intorno ad assi paralleli (fig. 118, a destra). Queste due rotazioni si compongono in un solo moto di rotazione con velocità angolare $\omega = \omega_1 + \omega_2$ intorno all'asse istantaneo, che passa fra gli assi *1* e *2* e suddivide la distanza tra i due in proporzioni inverse alle velocità angolari ω_1 e ω_1.

In modo analogo viene considerato il caso in cui i vettori ω_1 e ω_2 siano opposti. Se $\omega_1 > \omega_2$, $\omega = \omega_1 - \omega_2$. L'asse istantaneo passa fuori del segmento AB dal lato della *maggiore velocità angolare* (fig. 119). L'asse istantaneo

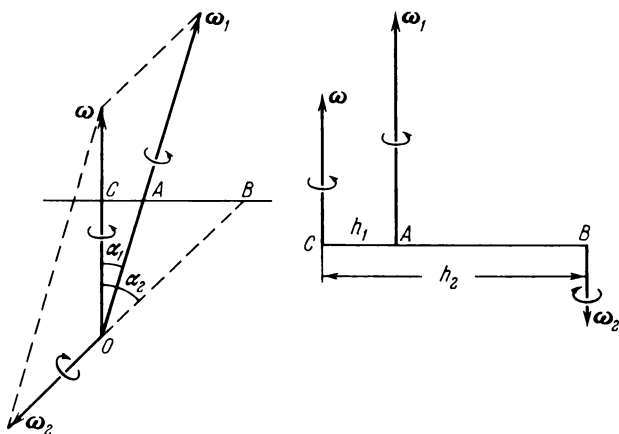
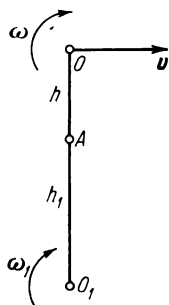



Fig. 119. Fig. 120.

determina le distanze h_1 e h_2, le cui lunghezze sono inversamente proporzionali alle velocità angolari ω_1 e ω_2.

5. Consideriamo adesso la composizione di un moto di traslazione e di un moto di rotazione. Se il moto di traslazione è parallelo all'asse di rotazione, la loro composizione produce evidentemente *un moto elicoidale*. Quindi è sufficiente considerare il caso in cui il moto di traslazione sia perpendicolare all'asse di rotazione. In questo caso tutti i punti del corpo si sposteranno solo parallelamente ad un medesimo piano perpendicolare allo stesso asse. Tale moto si chiama *piano*. Si può prendere come piano della figura il piano parallelamente al quale si effettua il moto. Il moto di traslazione può essere considerato come una rotazione intorno ad un asse infinitamente lontano, il che permette di considerare il caso in esame come la composizione di due rotazioni intorno a due assi paralleli uno dei quali è

all'infinito. Ne risulta una rotazione intorno ad un asse istantaneo. Il problema consiste quindi nel determinare la posizione dell'asse istantaneo e la velocità angolare della rotazione istantanea. Poniamo che il corpo ruoti con velocità angolare ω intorno all'asse O che ruota a sua volta intorno ad un asse parallelo fisso O_1 con velocità angolare ω_1 (fig. 120). Componendo questi due moti si origina una rotazione intorno all'asse istantaneo A, osservando che

$$\frac{h}{h_1} = \frac{\omega_1}{\omega} .$$

L'asse O ruotando intorno all'asse O_1 acquista una velocità $v = \omega_1(h + h_1)$ che è perpendicolare alla retta O_1O. Spostiamo l'asse O_1 verso l'infinito diminuendo contemporaneamente ω_1 di modo che la velocità v resti costante. Al limite, la rotazione dell'asse O_1 si trasforma in un moto di traslazione con la velocità v. La posizione dell'asse istantaneo di rotazione A è determinata dalla sua distanza dall'asse O che è uguale a

$$h = \frac{h_1\omega_1}{\omega} = \frac{(h_1 + h)\omega_1 - h\omega_1}{\omega} = \frac{v - h\omega_1}{\omega} .$$

Ne deriva

$$h\left(1 + \frac{\omega_1}{\omega}\right) = \frac{v}{\omega} .$$

Dato che $\omega_1 \to 0$ si ottiene al limite

$$h = \frac{v}{\omega} . \tag{46.8}$$

Al limite, la velocità angolare della rotazione istantanea diventa uguale a ω.

6. Derivando il vettore assiale $\boldsymbol{\omega}$ rispetto ad un argomento scalare, rispetto al tempo t ad esempio, si ottiene un altro vettore assiale $\boldsymbol{\eta} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}$ che si chiama *accelerazione angolare* (cfr. § 7). Per definizione le sue proiezioni sugli assi delle coordinate sono: $\eta_x = \frac{d\omega_x}{dt}$, $\eta_y = \frac{d\omega_y}{dt}$, $\eta_z = \frac{d\omega_z}{dt}$. Integrando $\boldsymbol{\omega}$ rispetto al tempo t si ottiene un altro vettore assiale $\boldsymbol{\varphi} = \int\boldsymbol{\omega}dt$ le cui componenti sono $\varphi_x = \int\omega_x dt$, $\varphi_y = \int\omega_y dt$, $\varphi_z = \int\omega_z dt$. Il carattere vettoriale (o più precisamente pseudo-vettoriale) di queste grandezze significa che se si fa ruotare (non invertire) il sistema di coordinate, le loro componenti si trasformano come le differenze delle coordinate delle estremità di un segmento di retta orientato. Se la direzione dell'asse di rotazione non varia nel tempo, il vettore $\boldsymbol{\varphi}$ è parallelo a $\boldsymbol{\omega}$, cioè è orientato lungo l'asse di rotazione. La sua lunghezza è numericamente uguale all'angolo di rotazione del corpo nell'intervallo di tempo considerato, perciò è logico chiamare il vettore $\boldsymbol{\varphi}$ vettore di *rotazione angolare del corpo*. La grandezza della rotazio-

ne angolare è proporzionale all'area del settore OAB che viene descritto dal segmento OA perpendicolare all'asse di rotazione quando lo si ruota dalla posizione iniziale OA a quella finale OB (fig. 121). La direzione del vettore φ coincide con quella della normale al piano del settore OAB e le sue componenti φ_x, φ_y, φ_z sono proporzionali alle aree delle proiezioni di questo settore sui piani delle coordinate. È una prova supplementare del carattere vettoriale della grandezza φ (cfr. § 7).

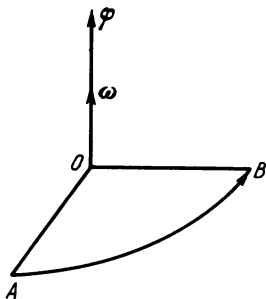
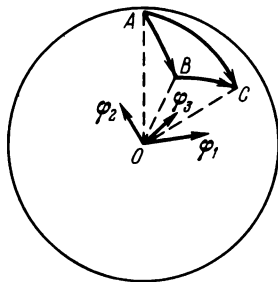



Fig. 121. Fig. 122.

7. Sull'esempio delle rotazioni angolari di un corpo si può dimostrare in modo evidente la necessità di distinguere rigorosamente l'*addizione matematica* dei vettori (definiti assiomaticamente secondo la regola del parallelogramma) dalla loro *composizione fisica,* introdotta per mezzo di una operazione fisica. Introduciamo la composizione fisica degli spostamenti angolari attribuendo loro lo stesso significato della composizione fisica degli spostamenti lineari (cfr. § 7, p. 6). Sia dato un punto materiale che effettui successive rotazioni intorno ad assi differenti passanti per il medesimo punto fisso O (fig. 122). Nel caso di tali rotazioni il punto materiale descrive archi di cerchi massimi sulla superficie di una sfera di centro O. Poniamo che il punto materiale passi dalla posizione iniziale A a quella finale B lungo l'arco del cerchio massimo AB. Il raggio vettore ruota quindi di un angolo φ_1. Il punto materiale ruoti ancora di un angolo φ_2, passando sull'arco di cerchio massimo BC dalla posizione B alla posizione C. Si tratta ora di trovare la rotazione, da sostituire alle due rotazioni suindicate, tale da far passare il punto materiale dalla posizione iniziale A alla medesima posizione finale C. È chiaro che deve essere la rotazione di un punto lungo un arco di cerchio massimo che passa attraverso i punti A e C. Indichiamo con φ_3 questo angolo di rotazione; secondo quanto precedentemente detto, le tre rotazioni considerate possono essere indicate con i vettori φ_1, φ_2, φ_3 perpendicolari rispettivamente ai piani dei settori OAB, OBC e OAC. Si può dire che la rotazione φ_3 è la somma delle rotazioni φ_1 e φ_2 nel significato fisico di questo termine. È evidente che questo modo di comporre non ri-

sponde alla regola del parallelogramma, poiché in generale il vettore φ_3 non è complanare con i vettori φ_1 e φ_2.

Per chiarire ulteriormente questo enunciato esaminiamo il seguente caso particolare. Scegliamo come posizione iniziale del punto materiale il polo A (fig. 123). Quindi lungo l'arco della meridiana AB effettuiamo una rotazione $\varphi_1 = 90°$ per far passare il punto nella posizione B sull'equatore. Eseguiamo una seconda rotazione di un angolo $\varphi_2 = 90°$ lungo l'arco dell'equatore BC. Ne consegue che la terza rotazione di un angolo $\varphi_3 = 90°$ deve essere compiuta lungo l'arco della meridiana AC. In questo caso i tre vettori φ_1, φ_2, φ_3 sono mutuamente perpendicolari, hanno medesime grandezze e nessuno di loro può essere somma geometrica degli altri due.

Se φ_x, φ_y, φ_z sono le proiezioni del vettore $\boldsymbol{\varphi}$ sugli assi delle coordinate, si ha $\boldsymbol{\varphi} = \varphi_x \boldsymbol{i} + \varphi_y \boldsymbol{j} + \varphi_z \boldsymbol{k}$. Questa addizione è matematica (regola del parallelogramma). Però, dalle considerazioni precedenti risulta che i termini $\varphi_x \boldsymbol{i}$, $\varphi_y \boldsymbol{j}$, $\varphi_z \boldsymbol{k}$ non possono essere considerati come rotazioni successive intorno agli assi delle coordinate, equivalenti a una sola rotazione determinata dal vettore $\boldsymbol{\varphi}$.

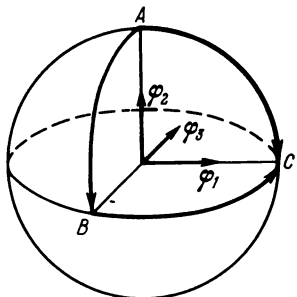



Fig. 123.

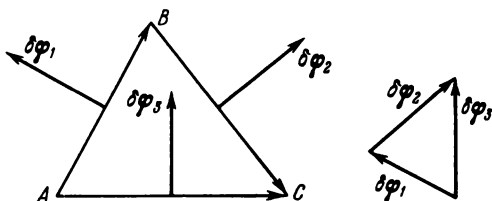



Fig. 124.

8. Supponiamo intanto che gli angoli φ_1, φ_2, φ_3 tendano illimitatamente a zero. Il triangolo sferico ABC (cfr. fig. 122) diventa allora infinitamente piccolo e può essere assimilato ad un triangolo piano (fig. 124), mentre gli archi AB, BC, AC dei cerchi massimi possono essere assimilati a segmenti di retta. I vettori di spostamenti angolari $\delta\varphi_1$, $\delta\varphi_2$, $\delta\varphi_3$ si trovano nel piano del triangolo ABC. (Scriviamo $\delta\varphi$ invece di φ per sottolineare che si tratta di angoli infinitamente piccoli). Questi vettori sono evidentemente perpendicolari ai lati AB, BC, e AC e le loro grandezze sono proporzionali alle lunghezze di questi lati (cfr. fig. 124). Ne consegue che il vettore infinitamente piccolo $\delta\varphi_3$ è la somma geometrica dei vettori $\delta\varphi_1$ e $\delta\varphi_2$. Questo significa che *gli spostamenti angolari infinitamente piccoli vengono composti geometricamente* (nel significato fisico sopra menzionato), *cioè secondo la regola del parallelogramma.* In altre parole, la *composizione fisica degli spostamenti angolari si riduce, nel caso limite in cui gli angoli siano infinitamente piccoli, ad una addizione matematica.*

Problemi

1. Dimostrare che il lavoro elementare effettuato su un sistema di punti materiali per farlo ruotare di un angolo infinitesimo $\delta\varphi$ si esprime mediante il prodotto scalare

$$\delta A = (M\delta\varphi), \tag{46.9}$$

dove M è la somma geometrica dei momenti delle forze che agiscono sui punti materiali, rispetto al punto attorno a cui avviene la rotazione.

Soluzione. $\delta A = \sum (F_i \delta r_i)$. La somma è estesa a tutti i punti del sistema. Per una rotazione $\delta r_i = [\delta\varphi r_i]$, l'angolo $\delta\varphi$ essendo lo stesso per tutto il sistema. Spostando questa espressione nella formula precedente e osservando che $F_i[\delta\varphi r_i] = \delta\varphi[r_i F_i] = (M_i \delta\varphi)$ otteniamo il risultato cercato.

2. Utilizzando il concetto d'isotropia dello spazio, dimostrare che la somma geometrica dei momenti delle forze interne che agiscono in un sistema di punti materiali è uguale a zero (si veda § 38).

Soluzione. Supponiamo che il sistema sia isolato. Siano M_1, M_2, ... i momenti delle forze interne, rispetto ad un'origine O arbitraria e fissa, a cui sono sottoposti i punti materiali del sistema. Facciamo ruotare tutto il sistema intorno al punto O d'un angolo infinitamente piccolo $\delta\varphi$ in tal modo che le velocità di tutti i punti materiali subiscano una rotazione del medesimo angolo $\delta\varphi$ senza che i loro moduli cambino. Essendo lo spazio isotropo, una tale rotazione non richiede alcun lavoro; questo lavoro sarebbe rappresentato dal prodotto scalare $(M_1 + M_2 + \ldots)\delta\varphi$. Quindi il prodotto scalare deve essere uguale a zero, qualsiasi sia la rotazione $\delta\varphi$. Ne deriva che per un sistema isolato $M_1 + M_2 + \ldots = 0$.

3. Un vettore A di modulo costante ruoti intorno al suo punto d'origine con velocità angolare ω. Dimostrare che la sua derivata rispetto al tempo è determinata dalla formula

$$\dot{A} = [\omega A]. \tag{46.10}$$

In particolare, se si opera una rotazione del sistema di coordinate, le derivate dei vettori unitari i, j, k sono date mediante le formule

$$\frac{di}{dt} = [\omega i], \quad \frac{dj}{dt} = [\omega j], \quad \frac{dk}{dt} = [\omega k]. \tag{46.11}$$

Soluzione. Si può identificare ogni vettore A di lunghezza costante con un'asta sottile perfettamente rigida della medesima lunghezza. Se l'origine del vettore A è fissa, la derivata $\dot{A}$ prende il significato di velocità dell'estremità mobile dell'asta. In questa interpretazione la formula (46.10) diventa un caso particolare della formula (46.4).

4. Il moto di un punto su un piano può essere descritto dalle coordinate polari r e φ (fig. 125). Trovare le espressioni della velocità e dell'accelerazione del punto in questo sistema di coordinate.

Soluzione. Introduciamo i vettori unitari i, j, k. Orientiamo il vettore i lungo il raggio r. Il vettore j è diretto lungo la normale al raggio nel senso secondo cui aumenta l'angolo φ. Il vettore k (non rappresentato nella figura) è perpendicolare al piano della figura e forma con i vettori i e j un sistema destrorso. Quando il punto si sposta, i vettori i e j ruotano intorno all'origine delle coordinate con velocità angolare $\omega = \dot{\varphi}$. Il vettore velocità angolare è orientato lungo k così che $\omega = \dot{\varphi} k$. Per mezzo delle formule (46.11) si trovano le derivate dei vettori i e j

$$\frac{di}{dt} = \dot{\varphi}[ki] = \dot{\varphi} j, \quad \frac{dj}{dt} = \dot{\varphi}[kj] = -\dot{\varphi} i, \tag{46.12}$$

Rappresentiamo il raggio vettore del punto mobile nella forma $r = ri$. Per derivazione si trova la velocità del punto

$$v = \dot{r} = \dot{r} i + r\frac{di}{dt} = \dot{r} i + r\dot{\varphi} j.$$

Derivando ancora una volta si ottiene l'accelerazione

$$a = \dot{v} = \ddot{r}i = r\frac{di}{dt} + \dot{r}\dot{\varphi}j + r\ddot{\varphi}j + r\dot{\varphi}\frac{dj}{dt} = (\ddot{r} - \dot{\varphi}^2 r)i + (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})j.$$

Queste formule danno direttamente le componenti radiali (dirette lungo il raggio) e azimutali (dirette lungo il vettore j, cioè nel senso dell'angolo φ crescente) della velocità e dell'accelerazione

$$v_r = \dot{r}, \quad v_\varphi = r\dot{\varphi}; \tag{46.13}$$

$$a_r = \ddot{r} - \dot{\varphi}^2 r, \quad a_\varphi = 2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}. \tag{46.14}$$

5. Per mezzo della relazione (46.10) stabilire le formule di derivazione del seno e del coseno.

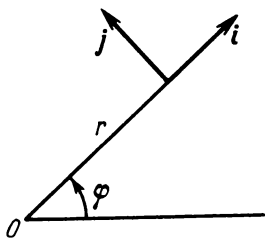
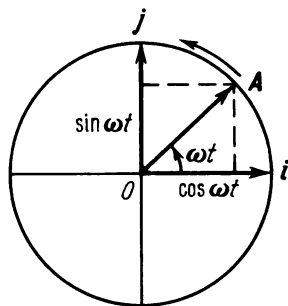



Fig. 125. Fig. 126.

Soluzione. Prendiamo un vettore unitario A in rotazione uniforme intorno all'origine delle coordinate O (fig. 126). Se gli assi delle coordinate sono fissi, si ha

$$A = i\cos\omega t + j\sin\omega t.$$

La derivata del vettore A rispetto a t è

$$\dot{A} = i\frac{d}{dt}(\cos\omega t) + j\frac{d}{dt}(\sin\omega t).$$

D'altra parte, la stessa derivata può essere calcolata mediante la formula (46.10). Dato che $\omega = \omega k$, questa formula dà

$$\dot{A} = \omega[kA] = \omega\cos\omega t\,[ki] + \omega\sin\omega t\,[kj] = j\omega\cos\omega t - i\omega\sin\omega t.$$

Confrontando i due risultati, si ottiene

$$\frac{d}{dt}(\sin\omega t) = \omega\cos\omega t, \quad \frac{d}{dt}(\cos\omega t) = -\omega\sin\omega t.$$

Si può dunque dire che la formula vettoriale (46.10) è equivalente alle regole di derivazione del seno e del coseno.

§ 47. *Teorema di Eulero. Moto generale d'un solido*

1. Consideriamo il *moto piano* di un corpo solido, cioè il moto in cui tutti i punti del corpo si muovano parallelamente ad un piano. Senza perdere in generalità, si può considerare lo stesso corpo piano ed il moto effettuato nel piano del corpo. La posizione del corpo mobile è definita in modo univoco dalla indicazione delle posizioni di due punti qualsiasi del corpo. Quindi è sufficiente studiare il moto di una retta qualunque d'un corpo piano. Si prenda una retta del solido che passi dalla posizione AB alla posizione A_1B_1 (fig. 127). Colleghiamo i punti A e A_1 ed i punti B e B_1. A metà dei

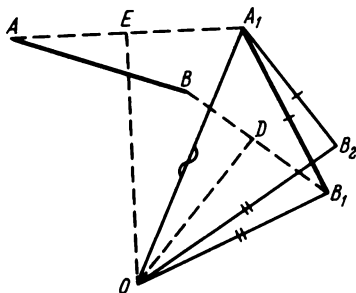



Fig. 127.

segmenti AA_1 e BB_1 tracciamo le normali EO e DO che si intersecano nel punto O. Dimostreremo che si può far passare il segmento di retta AB alla posizione A_1B_1 effettuando una rotazione intorno al punto O. La costruzione della figura 127 dimostra infatti che il punto O si trova alla stessa distanza dai punti A e A_1 e dai punti B e B_1. Si può dunque sottoporre la retta AB ad una rotazione intorno al punto O così che il punto A coincida con il punto A_1. Dimostreremo che il punto B coinciderà con il punto B_1. Supponiamo che il punto B non coincida con B_1 ma sia spostato in B_2. È chiaro che il punto B_2 deve trovarsi alla stessa distanza da O del punto B_1 e per conseguenza $OB_1 = OB_2$. Inoltre i triangoli OA_1B_1 e OA_1B_2 hanno il lato OA_1 in comune e i lati A_1B_1 e A_1B_2 sono uguali poiché, essendo il corpo solido, la distanza tra le estremità del segmento di retta AB non varia durante il moto. Ne deriva che i triangoli OA_1B_1 e OA_1B_2 sono uguali e che $\angle OA_1B_1 = \angle OA_1B_2$ il che significa che il punto B_2 deve coincidere con il punto B_1.

Quindi *ogni corpo solido in moto piano può passare da una posizione qualunque ad un'altra posizione effettuando una rotazione intorno ad un certo asse.* Questo enunciato è un caso particolare del *teorema di Eulero* (1707-1783) che dimostriamo qui sotto.

Un moto piano qualunque può essere scomposto in una successione di spostamenti elementari susseguentisi. Si ottiene così una serie di posizioni *1, 2, 3, 4*, ... infinitamente vicine le une alle altre che il corpo occupa suc-

cessivamente. Secondo il teorema enunciato, per passare dalla posizione *1* alla posizione *2* è sufficiente far ruotare il corpo intorno ad un certo asse O_1; allo stesso modo, per farlo passare da *2* a *3*, lo si fa ruotare intorno ad un altro asse O_2 infinitamente vicino al primo e così via. Se si fa tendere verso l'infinito il numero delle posizioni intermedie *1, 2, 3, ...* e verso lo zero gli spostamenti successivi del corpo, *ogni moto piano di un solido può essere considerato una rotazione intorno ad un asse istantaneo che si sposta all'interno del corpo e nello spazio.*

2. Il *teorema di Eulero* è formulato in modo analogo: *ogni corpo solido, avente un solo punto fisso, può passare da una posizione qualunque ad un'altra mediante una rotazione intorno ad un asse che passi attraverso questo punto fisso.* Si dimostra il teorema di Eulero con lo stesso procedimento usato per il teorema relativo al moto piano. Se un punto C del solido è fisso, la sua posizione è univocamente definita dall'indicazione della posizione di due punti A e B che non si trovino sulla stessa retta con il punto C. Questi punti A e B possono essere presi sulla superficie di una sfera con centro C. Conduciamo attraverso i punti A, B, e C un piano che intersechi la sfera lungo l'arco del cerchio massimo AB (si veda fig. 127. Non rappresentiamo la sfera e gli archi dei cerchi massimi, ma utilizziamo il precedente disegno piano, sostituendo mentalmente ai segmenti di retta gli archi dei cerchi massimi. È chiaro che non si può rappresentare il centro di una sfera C su un disegno a due dimensioni). Il moto dell'arco AB sulla superficie della sfera definisce univocamente anche il moto del corpo solido intero. Supponiamo che l'arco in esame passi dalla posizione AB alla posizione A_1B_1. Uniamo con archi di cerchi massimi i punti A e A_1 e i punti B e B_1. Attraverso i centri E e D di questi archi facciamo passare gli archi dei cerchi massimi EO e DO perpendicolari agli archi suindicati intersecantisi in un punto O della sfera. Uniamo il punto O al centro C della sfera mediante la retta OC. Dimostriamo che si può far passare l'arco AB nella posizione A_1B_1 per mezzo di una rotazione intorno all'asse CO. In effetti, dato che i punti A e A_1 ed i punti B e B_1 si trovano alla stessa distanza dal punto O, si può far ruotare il corpo solido intorno all'asse CO in modo che il punto A passi alla posizione A_1. Dimostriamo che nel caso di una tale rotazione il punto B passerà alla posizione B_1. Supponiamo che il punto B nel caso di una rotazione non passi alla posizione B_1 ma alla posizione B_2. Tracciamo gli archi dei cerchi massimi OA_1, A_1B_2 e OB_2. Dato che il punto B_2 si trova alla stessa distanza di B dal punto O, si ha $\smile OB_1 = \smile OB_2$. D'altra parte, nei triangoli sferici OA_1B_1 e OA_1B_2, l'arco OA_1 è comune e gli archi A_1B_1 e A_1B_2 sono uguali poiché, essendo il corpo rigido, la lunghezza dell'arco AB non varia in seguito ai suoi spostamenti. Questi triangoli sono quindi uguali e $\angle OA_1B_1 = \angle OA_1B_2$; quindi il punto B_2 deve coincidere col punto B_1, col che il teorema di Eulero è dimostrato.

Il teorema dimostrato all'inizio del paragrafo è un caso particolare del teorema di Eulero, poiché il moto piano del corpo piano può essere consi-

derato come un caso limite del moto sulla superficie di una sfera di raggio infinitamente grande.

Ragionando come nel caso del moto piano si può trarre dal teorema di Eulero la seguente conseguenza. *Qualsiasi movimento compiuto da un corpo solido avente un punto fisso può essere considerato come una rotazione intorno all'asse istantaneo passante per questo stesso punto fisso. Col tempo questo asse istantaneo si sposta sia all'interno del corpo che nello spazio.*

3. Esaminiamo ora il caso più generale del moto di un corpo solido. Prendiamo un punto qualunque O. Ogni moto del solido si può scomporre in un moto traslatorio di velocità v_0 uguale a quella del punto O e in un moto di rotazione intorno ad un asse istantaneo che passi attraverso il punto O. Indicando con ω il vettore velocità angolare della rotazione istantanea, possiamo scrivere per la velocità di un altro punto qualunque A del solido

$$v = v_O + [\omega r], \tag{47.1}$$

dove r è il raggio vettore condotto dal punto O al punto A (fig. 128). È evidente che la velocità di traslazione v_O dipende dalla scelta del punto O. Ma dato che la *velocità angolare ω non dipende dalla posizione del punto O al*

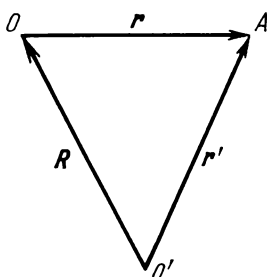



Fig. 128.

quale è riportata la rotazione del solido, si può parlare di velocità angolare di rotazione d'un solido senza indicare questo punto. Dimostreremo quest'enunciato.

Scegliamo un altro punto qualunque O' del solido e riferiamo a questo punto la rotazione del solido. Sia ω' la velocità angolare di questa rotazione. La velocità v del punto A considerato si può allora scrivere

$$v = v_{O'} + [\omega' r'],$$

dove r' è un raggio vettore condotto da O' a A. Poiché si tratta della velocità dello stesso punto, questa grandezza deve essere uguale a quella data dalla formula (47.1). Allora si ha

$$v_O + [\omega r] = v_{O'} + [\omega' r'].$$

Introduciamo in questa uguaglianza $r' = r + R$, dove R indica il vettore $\overrightarrow{O'O}$. Osserviamo anche che la velocità del punto O può essere ottenuta mediante la somma vettoriale della velocità del punto O' e della velocità angolare ω' di rotazione intorno a questo punto, cioè

$$v_O = v_{O'} + [\omega' R].$$

Ne consegue

$$v_{O'} + [\omega' R] + [\omega r] = v_{O'} + [\omega'(r + R)],$$

ossia

$$[\omega r] = [\omega' r].$$

Dato che r è arbitrario $\omega' = \omega$.

4. Supponiamo che un corpo solido ruoti intorno ad un punto fisso. Prendiamo questo punto come origine delle coordinate O. L'energia cinetica di questo corpo è evidentemente uguale a

$$K = \frac{1}{2}\int v^2 dm,$$

dove l'integrazione è estesa a tutta la massa del corpo. Applicando la formula $v = [\omega r]$ si può scrivere $v^2 = (vv) = ([\omega r]v)$ o dopo una permutazione dei termini $v^2 = (\omega[rv])$. Poiché ω è lo stesso per tutti i punti del corpo, si ha

$$K = \frac{1}{2}\omega\int [rv]dm,$$

ossia

$$K = \frac{1}{2}(L\omega), \tag{47.2}$$

dove L è il momento della quantità di moto del corpo rispetto al punto O.

In generale i vettori L e ω formano tra loro un certo angolo. Per rendersene conto, consideriamo un solo punto materiale M in rotazione intorno ad un asse fisso o ad un asse istantaneo. Prendiamo l'origine O su questo asse. Si ha allora

$$L = m[rv] = m[r[\omega r]] = mr^2\omega - m(r\omega)r.$$

Dato che l'ultimo termine generalmente non è nullo, i vettori L e ω non sono collineari. Essi sono collineari solo quando si sceglie per origine O il piede della perpendicolare abbassata dal punto M sull'asse di rotazione. In quest'ultimo caso il momento L rispetto al punto O si riduce al momento rispetto all'asse di rotazione. Indicando quest' ultimo con L_x si può scrivere $L = L_x = I\omega$, dove I è il momento d'inerzia del punto rispetto all'asse di rotazione. Quindi la formula (47.2) si trasforma in $K = 1/2\ L_x\omega = 1/2\ I\omega^2$. Quest'ultima formula resta valida non soltanto per un solo punto materia-

le, ma anche per il solido intero, poiché questo può essere considerato come un insieme di punti materiali in rotazione intorno ad un asse comune. Quindi la formula (47.2) è equivalente alla formula (33.6), ricavata prima con un procedimento diverso.

§ 48. *Rotolamento dei corpi su un piano inclinato*

1. Supponiamo che un corpo in rotolamento possieda una *simmetria di rotazione* rispetto all'asse geometrico C (fig. 129) sia quindi un solido di rivoluzione. Supponiamo che durante il moto non si verifichi scivolamento alcuno, il che significa che, nel punto di contatto A, la velocità del corpo è

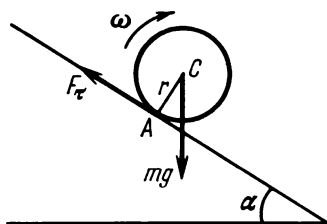



Fig. 129.

uguale a zero. L'assenza di scivolamento è conseguenza dell'azione delle forze esercitate dal piano inclinato sul corpo rotolante. Queste forze sono, da una parte, la forza di pressione normale al piano inclinato $\boldsymbol{F}_n$ e, dall'altra, la forza d'attrito $\boldsymbol{F}_\tau$ tangente a questo piano. In assenza di scivolamento la forza $\boldsymbol{F}_\tau$ è la forza d'attrito a riposo o la forza d'attrito per adesione.

Il modulo della forza F_τ può prendere ogni valore compreso tra 0 e kF_n, dove k è il coefficiente d'attrito (cfr. § 17). Quando il corpo rotola, questa forza prende il valore necessario ad evitare lo scivolamento. Se la forza tangenziale necessaria è più grande di kF_n, un rotolamento puro non è possibile poiché sarà accompagnato da scivolamento.

Risolviamo il problema del rotolamento d'un corpo per mezzo di tre procedimenti differenti.

Procedimento 1. Utilizziamo l'equilibrio dei momenti rispetto all'asse istantaneo di rotazione. In assenza di scivolamento l'asse istantaneo passa attraverso il punto di contatto A. Dato che l'asse istantaneo e l'asse che passa attraverso il centro di massa C del corpo si muovono parallelamente. l'equilibrio dei momenti si presenta nella semplice forma

$$I_A \frac{d\omega}{dt} = M_A, \tag{48.1}$$

dove I_A è il momento d'inerzia del corpo rotolante rispetto all'asse istantaneo ed M_A il momento delle forze esterne rispetto allo stesso asse. Le forze esterne sono la forza di gravità mg e la reazione del piano inclinato che agisce sul corpo rotolante. La forza di reazione del piano inclinato non compare nell'equilibrio dei momenti, poiché passa attraverso l'asse A e quindi il suo momento rispetto a quest'asse è uguale a zero. Quindi

$$I_A \frac{d\omega}{dt} = mgr \sin\alpha.$$

Indichiamo con v la velocità lineare del punto C. Essa è legata alla velocità v_A del punto A del corpo mediante la relazione $v = v_A + \omega r$. In assenza di scivolamento $v_A = 0$, quindi $v = \omega r$. Per l'accelerazione lineare del punto C otteniamo $a = \frac{dv}{dt} = r\frac{d\omega}{dt}$. Quindi l'equazione precedente ci dà

$$a = \frac{mgr^2}{I_A} \sin\alpha. \tag{48.2}$$

Secondo il teorema di Huygens-Steiner $I_A = I_C + mr^2$, dove I_C è il momento d'inerzia del corpo rispetto all'asse che passa per il centro di massa C, e quindi

$$a = \frac{g \sin\alpha}{1 + \frac{I_C}{mr^2}}. \tag{48.3}$$

Il vantaggio del procedimento considerato sta nel fatto che nell'equazione iniziale (48.1) non figura la reazione incognita del piano di sostegno.

Procedimento 2. Utilizziamo l'equilibrio dei momenti rispetto all'asse che passa per il centro di massa C. Anch'essa ha una forma semplice

$$I_C \frac{d\omega}{dt} = M_C,$$

dove M_C indica il momento delle forze esterne rispetto all'asse C. La forza di gravità non figura in questa equazione poiché passa attraverso l'asse C. Il momento è dovuto alla forza di reazione del piano e inoltre ha importanza soltanto la componente F_τ di questa forza parallela al piano inclinato, cioè la forza d'attrito per adesione. Il suo momento è $M_C = rF_\tau$, quindi

$$I_C \frac{d\omega}{dt} = rF_\tau.$$

Questa equazione contiene due incognite: l'accelerazione angolare $\frac{d\omega}{dt}$ e la forza F_τ. Il teorema sul moto del centro di massa fornisce l'equazione man-

$$m \frac{dv}{dt} = mg \sin\alpha - F_\tau. \tag{48.4}$$

Tenendo presente la relazione precedente $a = \frac{dv}{dt} = r\frac{d\omega}{dt}$ e risolvendo le equazioni ottenute rispetto ad a si ottiene il risultato precedente (48.3). Inoltre si ottiene anche la seguente espressione per la forza d'attrito per adesione

$$F_\tau = \frac{I_C}{I_C + mr^2} mg \sin\alpha. \tag{48.5}$$

Procedimento 3. Applichiamo la legge di conservazione dell'energia. L'energia cinetica del corpo è uguale a $K = 1/2 \; I_A\omega^2$, poiché $1/2 \; I_A\omega^2 = mgh$, dove h è l'altezza dalla quale il corpo, inizialmente in stato di quiete, discende rotolando. Se esso avrà percorso lungo il piano inclinato un tratto x, si ha $h = x \sin\alpha$, e di conseguenza

$$\frac{1}{2} I_A\omega^2 = \frac{I_A}{2r^2} v^2 = mgx \sin\alpha.$$

Derivando questa relazione rispetto al tempo e osservando che $\frac{dx}{dt} = v$, si ottiene di nuovo la formula (48.2).

2. Dato che il corpo che rotola è sottoposto ad una forza d'attrito, ci si può domandare perché nel problema preso in esame può essere utilizzata la legge di conservazione dell'energia sotto la sua forma meccanica. La risposta è che *in assenza di slittamento la forza d'attrito è applicata ai punti del corpo che si trovano sull'asse istantaneo di rotazione.* Poiché la velocità istantanea di questi punti è uguale a zero, la forza d'attrito applicata *non effettua alcun lavoro* e non influenza la grandezza dell'energia cinetica totale del corpo in rotolamento. Il ruolo della forza d'attrito per adesione F_τ è solo quello di mettere il corpo in rotazione ed assicurare un rotolamento senza slittamento. In presenza della forza d'attrito d'adesione, il lavoro prodotto dalla forza di gravità contribuisce ad incrementare l'energia cinetica dei moti di traslazione e di rotazione del corpo.

3. Il rapporto I_C/m che figura nella formula (48.3) ha la dimensione del quadrato di una lunghezza. Indichiamolo con la relazione

$$\rho^2 = \frac{I_C}{m}$$

e chiamiamo ρ *raggio d'inerzia* del corpo. La formula (48.3) può esser scritta allora nella forma

$$a = \frac{g \sin\alpha}{1 + (\rho/r)^2}. \tag{48.6}$$

La grandezza r può essere chiamata *raggio di rotolamento* del corpo: è la distanza tra il centro di massa del corpo in rotolamento e l'asse istantaneo di rotazione. I raggi di rotolamento d'un cilindro e d'una sfera sono uguali ai loro raggi geometrici.

L'accelerazione del corpo in rotolamento e la velocità del suo moto di traslazione dipendono dal rapporto tra il raggio d'inerzia e il raggio di ro-

tolamento. Più questo rapporto è grande, più il corpo rotola lentamente, il che è facilmente dimostrabile applicando la legge di conservazione dell'energia. Se un corpo rotola da un'altezza h, tutta la sua energia potenziale mgh è convertita nell'energia cinetica. L'energia cinetica è composta dall'energia cinetica del moto di traslazione e dall'energia cinetica del moto di rotazione. Nella posizione più bassa l'energia cinetica totale è uguale a mgh, cioè dipende soltanto dall'altezza h. Più energia cinetica viene adoperata per la rotazione, più il rotolamento sul piano inclinato è lento. Il rapporto tra energia cinetica di rotazione ed energia cinetica di traslazione è uguale a

$$\frac{E_{\text{rot}}}{E_{\text{trasl}}} = I_C \frac{\omega^2}{mv^2} = \left(\frac{\rho}{r}\right)^2.$$

L'accelerazione a prende il suo valore massimo in caso di slittamento puro, ed in assenza d'attrito.

Utilizzando le espressioni dei momenti d'inerzia riportate nel § 36 è facile calcolare i rispettivi raggi d'inerzia e l'accelerazione a per corpi di diverse configurazioni.

Cilindro cavo, $\rho^2 = r^2,\ a = \frac{g}{2}\sin\alpha.$

Cilindro pieno, $\rho^2 = \frac{r^2}{2},\ a = \frac{2}{3}g\sin\alpha.$

Sfera cava, $\rho^2 = \frac{2}{3}r^2,\ a = \frac{3}{5}g\sin\alpha.$

Sfera piena, $\rho^2 = \frac{2}{5}r^2,\ a = \frac{5}{7}g\sin\alpha.$

I corpi vuoti rotolano su un piano inclinato più lentamente dei corpi pieni di identica forma geometrica. A parità di massa i momenti d'interzia dei corpi cavi sono più grandi di quelli dei corpi pieni, perciò la percentuale d'energia cinetica che si riferisce al moto di rotazione è maggiore per i corpi vuoti che per i corpi pieni.

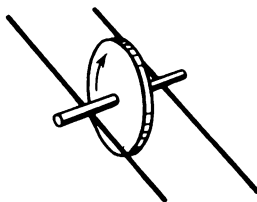



Fig. 130.

Prendiamo un piccolo volano fissato su un asse e posiamolo su due binari inclinati come indicato nella figura 130. In questo caso il raggio di rotolamento è uguale al raggio r dell'asse del volano. Dato che il valore del rapporto ρ/r è grande, il volano rotolerà molto lentamente.

4. Se l'angolo d'inclinazione α diventa uguale a zero, l'accelerazione a si annulla, e come dimostra la formula (48.5), si annulla anche la forza d'attrito per adesione F_T. Quindi un corpo solido a simmetria assiale, come il cilindro, ad esempio, o la sfera, deve rotolare su una superficie rigida orizzontale, in assenza di slittamento, con moto rettilineo ed uniforme, senza essere sottoposto ad alcuna forza di resistenza. Questo risultato riguarda evidentemente soltanto modelli ideali di corpi. Il corpo e il piano su cui esso rotola devono essere perfettamente lisci e rigidi. Per corpi reali il risultato non è valido o lo è soltanto approssimativamente, perché in tal caso il corpo ed il piano si deformano. Sul piano compare un incavo ed il suo contatto con il corpo non è puntuale, cioè non avviene in un solo punto geometrico, ma su una porzione d'area finita. Quindi durante il rotolamento su un piano orizzontale nasce una forza che rallenta il moto del corpo. Questa forza è la forza d'attrito per rotolamento. Essa è generalmente piccola rispetto alla forza d'attrito per scivolamento ed in molti casi si può trascurarla (cfr. § 17).

Problemi

1. Calcolare l'accelerazione a del centro di una pallina in rotolamento senza scivolamento in un canaletto inclinato di un angolo α rispetto ad un piano orizzontale. Le forme delle sezioni trasversali dei canaletti sono rappresentate dalla figura 131, a e b.

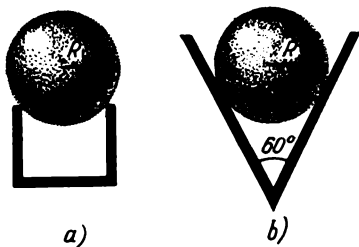
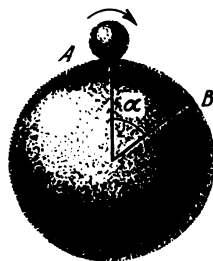



Fig. 131. Fig. 132.

Risposta. a) $a = \dfrac{R^2 - h^2}{\rho^2 + (R^2 - h^2)} g \sin\alpha$, dove ρ è il raggio d'inerzia della pallina, e $2h$ la larghezza del canaletto; b) $a = \dfrac{R^2}{4\rho^2 + R^2} g \sin\alpha$.

2. A quale altezza iniziale H deve trovarsi una pallina di raggio d'inerzia ρ perché possa percorrere senza slittamento un canaletto a forma di cerchio di raggio R? Trascuriamo il raggio r della pallina rispetto al raggio R.

Risposta. $H = \dfrac{5r^5 + \rho^2}{2r^2} R$. Per una pallina piena $H = \dfrac{27}{10} R$, per una pallina cava $H = \dfrac{17}{6} R$.

3. Un cilindro, o una sfera, di raggio r rotola su un piano inclinato di un angolo α rispetto all'orizzontale. Calcolare a quale valore dell'angolo α il rotolamento si accompagnerà allo scivolamento, se il coefficiente d'attrito per scivolamento tra il corpo in rotolamento e il piano è uguale a k?

Risposta. $\operatorname{tg}\alpha > \frac{r^2 + \rho^2}{\rho^2} k$, dove ρ è il raggio d'inerzia del corpo in rotolamento. Per una sfera piena $\operatorname{tg}\alpha > 7/2\,k$, per una sfera cava $\operatorname{tg}\alpha > 5/2\,k$. Per un cilindro pieno $\operatorname{tg}\alpha > 3k$ e per un cilindro cavo $\operatorname{tg}\alpha > 2k$.

4. Una pallina di raggio r e di velocità iniziale uguale a zero rotola senza scivolamento sulla superficie d'una sfera a partire dal polo A (fig. 132). Determinare il punto in cui essa abbandonerà la superficie della sfera per proseguire il suo percorso in caduta libera nel campo di gravità.

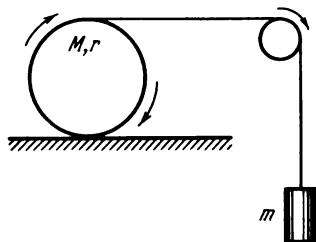



Fig. 133.

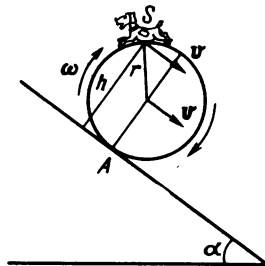



Fig. 134.

Risposta. La posizione del punto B a partire dal quale la pallina abbandona la sfera ed entra in caduta libera sotto l'azione della forza di gravità è definito dall'angolo il cui coseno è

$$\cos\alpha = \frac{2r^2}{3r^2 + \rho^2},$$

dove ρ è il raggio d'inerzia della pallina. Il risultato è indipendente dal raggio della sfera. Per una pallina piena $\cos\alpha = 10/17$, per quella cava $\cos\alpha = 6/11$.

5. Un cilindro di massa M e di raggio r rotola sul piano orizzontale di un tavolo (fig. 133). Un filo arrotolato sul corpo del cilindro passa orizzontalmente dal cilindro a una carrucola fissa; all'altra sua estremità è attaccato un peso di massa m. Trascurando le masse della carrucola e del filo, calcolare l'accelerazione del centro di massa del cilindro.

Risposta. $a = \frac{2mr^2}{M(\rho^2 + r^2) + 4mr^2} g$, dove ρ è il raggio d'inerzia del cilindro. Per un cilindro pieno $a = \frac{4m}{3M + 8m} g$ e per un cilindro cavo $a = \frac{m}{M + 2m} g$.

6. Un cilindro cavo di massa M e di raggio r rotola su un piano inclinato di angolo α rispetto all'orizzontale. Un cane corre sulla superficie del cilindro riuscendo a mantenersi sempre sulla parte superiore. Calcolare l'accelerazione a del cilindro in rotolamento se la massa del cane è m.

Soluzione. Il metodo di soluzione di questo problema è assai interessante. La via più semplice è quella di utilizzare l'equilibrio dei momenti rispetto all'asse istantaneo di rotazione A (fig. 134). Tutti i moti devono allora essere riferiti ad un sistema di riferimento in cui il piano inclinato è immobile. In questo sistema di riferimento il cane, che si trova sempre nel punto superiore di altezza S del cilindro, si sposta parallelamente al piano inclinato con la medesima

velocità con cui si muove il centro di massa del cilindro. Il momento della quantità di moto del sistema L è costituito dai momenti $I\omega$ del cilindro ed mvh del cane, dove $h = r(1 + \cos\alpha)$ e la lunghezza della perpendicolare abbassata dal punto S sul piano inclinato. Quindi

$$L = I\omega + mvr(1 + \cos\alpha),$$

dove I è il momento d'inerzia del cilindro rispetto all'asse istantaneo A, cioè la grandezza $2Mr^2$. Dato che non c'è scivolamento $v = \omega r$ e perciò

$$L = [2M + m(1 + \cos\alpha)]rv.$$

Poiché il centro di massa e l'asse istantaneo A si muovono parallelamente l'uno all'altro, la derivata di L rispetto al tempo deve essere uguale al momento delle forze esterne rispetto all'asse istantaneo A, cioè a $(M + m)gr \sin\alpha$. Uguagliando queste due espressioni si ottiene

$$a = \frac{M + m}{2M + m(1 + \cos\alpha)} g \sin\alpha.$$

7. Sulla superficie di un grande cilindro cavo che si trova su un piano orizzontale un cane di massa m comincia a correre verso il punto più alto A del cilindro, mantenendo sempre la stessa distanza da questo punto (fig. 135); in seguito a ciò il cilindro si mette a ruotare senza scivolamento sul piano orizzontale. La massa del cilindro è M, l'angolo AOm è α. Calcolare: 1) l'accelerazione a dell'asse del cilindro; 2) la forza d'attrito F_{att} fra il cilindro e il piano di rotolamento; 3) il tempo t durante il quale il cane può mantenere la sua posizione e rimanere alla distanza indicata dal punto A, se la potenza utile massima che il cane può sviluppare è uguale a P_{mass}. Quale sarà allora la velocità massima v_{mass} di traslazione del cilindro? (La potenza utile qui è la potenza sviluppata dal cane per aumentare l'energia cinetica del sistema).

Risposta. $a = \dfrac{mg \sin\alpha}{2M + m(1 + \cos\alpha)}$, $F_{att} = (M + m)a$,

$$t = \frac{P_{mass}}{2M + m} \frac{1}{a^2}, \quad v_{mass} = \frac{P_{mass}}{(2M + m)a}.$$

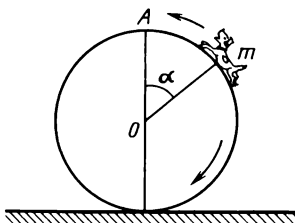
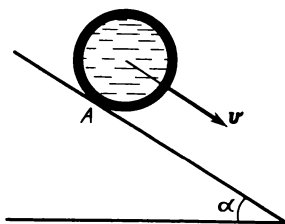
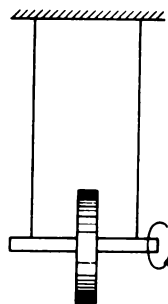



Fig. 135. Fig. 136. Fig. 137.

8. Calcolare l'accelerazione a, con la quale una botte cilindrica piena di liquido ruota senza scivolamento su un piano inclinato di un angolo α rispetto all'orizzontale (fig. 136). Non si consideri l'attrito fra il liquido e le pareti della botte.

Soluzione. Dato che si trascura l'attrito fra il liquido e le pareti della botte, la rotazione della botte non si trasmette al liquido. Il liquido effettua quindi un moto di traslazione ad una velocità v che è uguale a quella del moto del centro di massa. Il momento della quantità di moto del sistema rispetto all'asse istantaneo A è uguale a $L = I_A\omega + mRv$, dove R è il raggio esterno della botte, I_A il suo momento d'inerzia rispetto all'asse istantaneo A e m la massa del li-

quido. Dato che non c'è scivolamento, $v = \omega R$, quindi

$$L = \left(\frac{I_A}{R} + mR\right)v.$$

Il centro di massa della botte si muove parallelamente all'asse istantaneo, perciò

$$\frac{dL}{dt} = \left(\frac{I_A}{R} + mR\right)\frac{dv}{dt} = (M + m)Rg \sin\alpha,$$

dove M è la massa della botte. Quindi

$$a = \frac{(M + m)R^2}{I_A + mR^2} g \sin \alpha.$$

Nel caso limite in cui la botte sia vuota ($m = 0$), si ha la formula sopra indicata (48.2). Nell'altro caso limite in cui le pareti della botte siano tanto sottili da poter essere trascurate rispetto al suo raggio R, allora $I_A = 2MR^2$, si ha quindi

$$a = \frac{M + m}{2M + m} g \sin \alpha.$$

Non abbiamo tenuto conto dei momenti d'inerzia dei fondi della botte, considerandoli trascurabili.

Si raccomanda di risolvere questo preoblema per mezzo dell'equilibrio dei momenti rispetto al centro di massa nonché dall'equilibrio di conservazione dell'energia.

9. Un disco detto di Maxwell è sospeso a due lunghi fili (fig. 137). I fili, ciascuno di 50 cm di lunghezza, sono stati avvolti sull'asse del disco, dopo di che il disco abbandonato a se stesso comincia a scendere sotto l'azione della forza di gravità. Arrivato alla sua posizione più bassa, il disco comincia a risalire comunicando uno « strattone », ai fili. Calcolare l'accelerazione del disco e la tensione dei fili durante la sua discesa e risalita; e valutare inoltre approssimativamente la tensione dei fili nel momento dello strattone. La massa del disco è $M = 1$ kg, il suo raggio $R = 10$ cm, il raggio dell'asse $r = 0{,}5$ cm. Trascurare l'allungamento dei fili durante lo strattone. (Confrontare questo problema col problema n°2 del § 37).

Risposta. Finché il moto è regolare il disco scende e sale con la medesima accelerazione, che vale:

$$a = \frac{2r^2}{R^2 + 2r^2} g.$$

La tensione T_0 dei fili è la stessa durante la discesa e la salita del disco

$$T_0 = \frac{Mg}{2}\left(1 - \frac{a}{g}\right) \approx 4{,}83 \text{ N}.$$

Durante lo strattone i fili sono sottoposti a una tensione supplementare ΔT che va determinata per approssimazione coll'espressione

$$\Delta T \approx \frac{1}{\pi r} \frac{2a}{g} Mg \approx 3{,}14 \text{ N}.$$

La tensione totale dei fili durante lo strattone è $T = T_0 + \Delta T \approx 8{,}0$ N.

10. A quale distanza l dall'asse del pendolo balistico deve trovarsi il punto d'impatto d'un proiettile che vola lungo l'asse orizzontale, perché l'asse del pendolo non subisca alcun sovraccarico nel momento dell'urto?

Soluzione. Sia F la forza orizzontale che il proiettile imprime al pendolo (fig. 138). L'equazione dei momenti rispetto al punto di sospensione O ci dà

$$I\frac{d\omega}{dt} = Fl.$$

Poiché nel momento dell'urto l'asse del pendolo non deve subire un sovraccarico, in virtù del teorema del moto del centro di massa deve essere

$$m\frac{dv}{dt} = F,$$

dove v è la velocità del centro di massa ed m la massa del pendolo. La massa del proiettile va trascurata. Dividendo membro a membro le equazioni suindicate, si elimina F e si ottiene

$$l = \frac{I}{m}\frac{d\omega}{dv}.$$

Se a è la distanza tra il punto di sospensione e il centro di massa del pendolo, allora $v = \omega a$. Si ottiene quindi

$$l = \frac{I}{ma}.$$

Ne consegue che l è la lunghezza ridotta del pendolo fisico e il punto A coincide col suo centro d'oscillazione. Il punto di sospensione corrispondente si chiama « centro d'urto ». Il fabbro conosce con precisione il punto in cui mettere le mani per impugnare il martello (proprio nel centro d'urto) in modo da non subire un contraccolpo sgradevole.

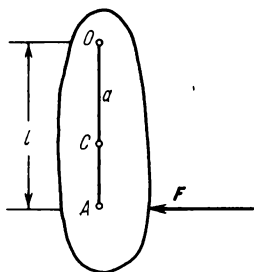
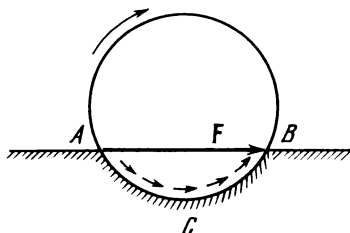



Fig. 138. Fig. 139.

11. Con quale punto della sciabola va colpito un ramo posto in verticale, in modo da evitare un contraccolpo? Considerare la lama della sciabola come un'asta omogenea di lunghezza l che al momento del colpo si impugna per una delle estremità.

Risposta. La distanza tra la mano e il punto che colpisce deve essere uguale a $2l/3$.

12. Sia dato un cilindro rigido o una sfera che ruoti scivolando su un piano rigido orizzontale. Dimostrare che durante il rotolamento le velocità di traslazione e di rotazione del corpo sono legate tra loro dalla relazione

$$mrv + I\omega = \text{cost},$$

dove I è il momento d'inerzia rispetto all'asse geometrico del corpo.

Soluzione. Le equazioni del moto del centro di massa e dei momenti sono

$$m\frac{dv}{dt} = \pm F, \quad I\frac{d\omega}{dt} = \pm M = \pm rF.$$

Il segno superiore si riferisce al caso in cui la forza d'attrito F sia diretta in avanti (il moto di traslazione è allora accelerato e la rotazione è rallentata), quello inferiore si riferisce al caso in cui la forza F sia diretta all'indietro (il moto di traslazione rallenta, la rotazione accelera). Eliminando F e dt, si ottiene nei due casi $mr\,dv = -I\,d\omega$, ne consegue (48.7).

13. Secondo l'equilibrio (48.7) il rotolamento di un corpo solido su di un piano orizzontale non può cessare se non ci sono forze supplementari oltre alla forza d'attrito orizzontale che agisce nel punto di contatto. Quale è la causa del disaccordo tra teoria ed esperienza pratica?

Soluzione. I corpi reali sono deformabili. Nel piano su cui rotola il corpo si forma un incavo. Le forze d'attrito che agiscono sul corpo rotante sono rappresentate nella figura 139 da piccole frecce, la cui risultante è $F = \overrightarrow{AB}$. È evidente che il momento M delle forze d'attrito è più grande del momento della forza risultante F, cioè $M > rF$ (F e M sono grandezze positive). Dividendo membro a membro le equazioni $m\,dv = \pm F\,dt$ e $I\,d\omega = \pm M\,dt$, poi moltiplicando per r il risultato della divisione si ottiene

$$mr\,dv + I\,d\omega(rF/M) = 0.$$

Tenendo conto della disuguaglianza $rF < M$ risulta $mr\,dv + Id\omega < 0$, ossia

$$\frac{d}{dt}(mrv + I\omega) < 0. \tag{48.8}$$

Quindi in caso di rotolamento reale la grandezza $mrv + I\omega$ diminuisce con il tempo ed infine si annulla.

14. Nell'istante $t = 0$ si trasmette una velocità reale v_0 (senza rotolamento) ad una sfera piena, omogenea, di raggio r che si trova su un piano orizzontale. Tenendo conto dell'attrito per scivolamento e trascurando l'attrito di rotolamento, calcolare la velocità angolare della sfera nell'istante in cui il suo moto si trasformerà in rotolamento puro. Calcolare la perdita di energia cinetica causata dall'attrito.

Soluzione. Sulla base di (48.7)

$$mrv_0 = mrv + I\omega = (mr^2 + I)\omega,$$

dove v è la velocità di traslazione della sfera e ω la sua velocità di rotazione durante il rotolamento puro. Si ricava subito la velocità angolare ω cercata. La perdita di energia cinetica è uguale a

$$\Delta K = \frac{1}{2}\frac{I}{I + mr^2}\,mv_0^2 = \frac{mv_0^2}{7}.$$

15. Si posi una sfera piena omogenea di raggio r, rotante attorno al suo diametro orizzontale alla velocità ω_0, su un piano orizzontale senza comunicarle nessun moto di traslazione. Tenendo conto dell'attrito per scivolamento, ma trascurando l'attrito di rotolamento, calcolare la velocità lineare v del centro della sfera, quando il moto si trasformerà in rotolamento, calcolare la velocità lineare v del centro della sfera, quando il moto si trasformerà in rotolamento puro. Determinare la perdita di energia cinetica provocata dall'attrito

Risposta. $v = \dfrac{Ir}{I + mr^2}\,\omega_0 = \dfrac{2}{7}\,r\omega_0$, $\Delta K = \dfrac{1}{2}\dfrac{mr^2}{I + mr^2}\cdot I\omega_0^2 = \dfrac{1}{7}\,mr^2\,\omega_0^2$.

16. Una palla di biliardo rotola senza scivolamento su un piano orizzontale alla velocità v e urta un'altra palla identica in quiete; la linea dei centri è parallela alla velocità del moto. Determinare le velocità delle due palle quando i loro moti si trasformeranno in moti di rotolamento puro senza scivolamento. Quale parte dell'energia cinetica iniziale sarà convertita in calore? Si tenga presente che durante l'urto delle palle non si ha alcun trasferimento di moto di rotazione. Non si consideri la perdita d'energia per attrito durante il moto di rotolamento puro.

Risposta. La velocità della prima palla è $v_1 = 2/7\ v$, quella della seconda è $v_2 = 5/7 \cdot v$. La perdita di energia cinetica provocata dall'attrito rappresenta 20/49 del valore iniziale dell'energia cinetica.

17. Due palle da biliardo identiche che hanno la medesima velocità v_0 rotolano senza slittamento una incontro all'altra ed entrano in collisione elastica. Supponendo che l'urto sia centrale e che durante l'urto reciproco le velocità angolari non cambino, calcolare la velocità di ciascuna palla dopo l'urto quando il moto si trasformerà in rotolamento puro senza slittamento.

Soluzione. Durante l'urto le palle si scambiano le velocità di traslazione, mentre le velocità di rotazione non variano. È sufficiente quindi determinare il moto di una sola palla. Subito dopo l'urto le velocità iniziali della palla in esame saranno uguali a $v_{iniz} = -v_0$, $\omega_{iniz} = \omega_0 = v_0/r$. In virtù della relazione (48.7) i moti di queste palle dopo l'urto si possono esprimere mediante la relazione $mvr + I\omega = -mv_0r + I\omega_0$. Dopo che il moto si sarà trasformato in rotolamento puro si avrà $v = \omega r$, e quindi

$$v = \frac{I - mr^2}{I + mr^2} v_0 = -\frac{3}{7} v_0.$$

18. Una palla da biliardo che ruota senza scivolamento alla velocità v_0 rimbalza elasticamente dopo un urto normale contro una parete fissa. Supponendo che durante l'urto la velocità angolare della palla non varii, calcolare la sua velocità v dopo l'urto, quando il moto si trasformerà in rotolamento puro senza scivolamento.

Risposta. $v = \dfrac{I - mr^2}{I + mr^2} v_0 = \dfrac{3}{7} v_0.$

19. Come si deve colpire una palla da biliardo con la stecca perché la forza d'attrito della palla provocata dal contatto con il panno del tavolo la costringa ad un moto: a) accelerato, b) rallentato, c) uniforme? Si suppone che l'urto avvenga orizzontalmente su un piano verticale che passa attraverso il centro della palla e il suo punto di contatto con il piano del biliardo.

Risposta. La palla avrà un moto uniforme se il punto in cui viene colpita si trova a una distanza uguale a 2/5 del raggio al di sopra del suo centro. Questi colpi si chiamano *normali*. Se il punto si troverà più in alto, allora il moto della palla sarà accelerato; se questo punto si troverà più in basso il moto sarà rallentato. Questi colpi si chiamano *alti* e *bassi*. Questa soluzione si ottiene supponendo che la forza d'attrito della palla sul piano del biliardo sia trascurabile rispetto alla forza con la quale la stecca agisce sulla palla durante il colpo.

20. In che modo si deve colpire con la stecca da biliardo una palla, perché dopo la collisione con un' altra palla immobile: a) le due palle avanzino (*colpo con rimessa*), b) la prima palla s'arresti e la seconda avanzi, c) la seconda palla avanzi, e la prima rotoli indietro? Partire dalle stesse supposizioni del problema precedente riguardanti il modo di tirare il colpo (la direzione e il piano del colpo tirato contro la palla).

Risposta. Il caso a) si realizza con colpi alti, il caso b) con colpi normali, il caso c) con quelli bassi.

21. Si mette ai piedi di un piano inclinato, che forma un angolo α con un piano orizzontale, un cilindro pieno, omogeneo, di raggio r che ruoti alla velocità angolare ω_0, privo di velocità iniziale di traslazione. Il cilindro sale ruotando sul piano inclinato. Determinare in quanto tempo il cilindro raggiunge il punto più alto sul piano inclinato.

Soluzione. Sia F la forza d'attrito applicata al cilindro nel punto del suo contatto con il piano inclinato (fig. 140). È questa la forza che fa salire il cilindro sul piano inclinato. All'inizio, finché non si effettua un rotolamento puro, la forza F è una forza d'attrito per scivolamento. Quando il moto si trasforma in rotolamento puro, la forza F si trasforma in forza d'attrito a riposo (per adesione). Però, qualunque sia la natura del moto, esso soddisfa sempre

l'equilibrio del moto del centro di massa

$$m\frac{dv}{dt} = F - mg\sin\alpha,$$

nonché l'equilibrio dei momenti (rispetto all'asse geometrico del cilindro)

$$I\frac{d\omega}{dt} = -Fr.$$

Eliminando F, si ottiene

$$mr\frac{dv}{dt} = -I\frac{d\omega}{dt} - mgr\sin\alpha.$$

L'integrazione di questa equazione, tenendo conto delle condizioni iniziali ($\omega = \omega_0$ per $t = 0$) ci dà

$$mrv = I(\omega_0 - \omega) - mgrt\sin\alpha.$$

Questa relazione è valida per tutta la durata del moto, sia esso di rotolamento puro o di rotolamento con slittamento. Alla quota massima $v = 0$, quindi $\omega = 0$. In caso contrario il cilindro

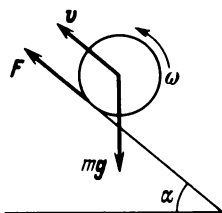



Fig. 140.

avrebbe continuato a salire e la quota in questione non sarebbe stata la massima. Quindi il tempo di ascesa t si ottiene sostituendo nell'equilibrio precedente $v = \omega = 0$, da cui

$$t = \frac{I\omega_0}{mgr\sin\alpha} = \frac{r\omega_0}{2g\sin\alpha}.$$

È utile notare che il tempo di ascesa t non dipende dai coefficienti d'attrito tra il cilindro e il piano inclinato. Anche se il coefficiente d'attrito fosse stato diverso il risultato non sarebbe cambiato. La soluzione presuppone però che l'attrito sia sufficientemente grande, perché il cilindro possa salire sul piano inclinato. Se l'attrito fosse insufficiente, la velocità di rotazione del cilindro diminuirebbe. È facile rendersi conto che il tempo di rallentamento viene determinato dalla stessa formula.

Invece il tempo che il cilindro impiega per scendere dal piano inclinato, così come la quota massima alla quale sale il cilindro, dipendono dal coefficiente d'attrito. Questa differenza si spiega col fatto che il moto di discesa del cilindro è rotolamento puro, mentre la salita comporta una tappa iniziale con scivolamento che si trasforma solo in seguito in rotolamento puro.

22. Considerando che nel problema precedente il coefficiente d'attrito per slittamento k del cilindro su un piano inclinato ha un valore dato e costante, determinare 1) l'accelerazione a_1 del cilindro quando il rotolamento è accompagnato da scivolamento; 2) il tempo t_1 dopo il quale si stabilisce un rotolamento puro; 3) l'altezza H_1 alla quale sale il cilindro prima che si stabilisca un rotolamento puro senza scivolamento; 4) l'accelerazione a_2 del rotolamento puro; 5) l'altezza supplementare H_2 alla quale sale il cilindro per rotolamento puro; 6) l'altezza totale H alla quale sale il cilindro; 7) il tempo $\bar{t}$ che il cilindro impiega per scendere in rotolamento il piano inclinato. Si porrà $k > \mathrm{tg}\alpha$.

Risposta. $a_1 = g(k \cos\alpha = \sin\alpha)$ è diretta verso l'alto;

$$t_1 = \frac{I\omega_0 r}{(I + mr^2)a_1 + mr^2 g \sin\alpha} = \frac{\omega_0 r}{(3k\cos\alpha - \sin\alpha)g};$$

$$H_1 = \frac{1}{2}a_1 t_1^2 \sin\alpha; \quad a_2 = \frac{mr^2}{I + mr^2} g \sin\alpha = \frac{2}{3} g \sin\alpha;$$

$$H_2 = \frac{a_1}{a_2} H_1; H = H_1 + H_2 = \frac{k\cos\alpha - \sin\alpha}{4g(3k\cos\alpha - \sin\alpha)} \omega_0^2 r^2;$$

$$\bar{t} = \sqrt{\frac{2H}{a_2 \sin\alpha}} = \frac{\omega_0 r_0}{2g \sin\alpha} \sqrt{\frac{3(k\cos\alpha - \sin\alpha)}{3k\cos\alpha - \sin\alpha}}.$$

23. Si ponga un cilindro pieno e omogeneo, di massa m_1, che ruota con velocità angolare ω, su una lunga tavola di massa m_2 situata su un piano orizzontale liscio. Il cilindro è posato sulla tavola senza velocità iniziale di traslazione; la velocità iniziale della tavola è uguale a zero. Non considerando la forza d'attrito per rotolamento, ma tenendo conto dell'attrito per slittamento tra il cilindro e la tavola, determinare la velocità angolare di rotazione del cilindro dopo che il moto si è trasformato in rotolamento puro senza slittamento. Si suppone la tavola tanto lunga da permettere che si stabilizzi il rotolamento puro prima che il cilindro arrivi alla sua estremità.

Risposta. $\omega = \dfrac{m_1 + m_2}{m_1 + 3m_2} \omega_0$.

24. In un cilindro pieno e omogeneo, di raggio R, è praticata una cavità cilindrica di raggio $R/2$ il cui asse passa a metà di un raggio del cilindro (fig. 141, *a*). Determinare il periodo T delle piccole oscillazioni del cilindro che sorgeranno quando esso sarà posto su un piano orizzontale e lo si lascerà rotolare senza slittamento.

Soluzione. Il problema consiste nella ricerca delle espressioni dell'energia potenziale e dell'energia cinetica del sistema. A questo scopo immaginiamo che la cavità praticata nel cilindro sia stata riempita della stessa sostanza di cui è fatto il cilindro. In tal modo si ottiene un cilindro pieno e omogeneo che chiameremo cilindro *1*. Il cilindro di raggio metà che riempie l'incavo sarà chiamato cilindro *2*. Indichiamo le masse di questi cilindri con m_1 e m_2. Le energie potenziale e cinetica del sistema saranno uguali alle differenze di queste energie per i cilindri *1* e *2*. Quando si fa girare il sistema d'un angolo φ rispetto alla posizione di equilibrio (fig. 141, *b*) il centro di massa del cilindro *1* resta alla stessa altezza e la sua energia potenziale U_1 non varia. Invece l'energia potenziale del cilindro *2* diventa uguale a $U_2 = m_2 g h_2$, dove $h_2 = R + \frac{R}{2}\cos\varphi$ è l'altezza del centro di massa del cilindro *2* sopra il piano orizzontale sul quale si trova il sistema. L'energia potenziale totale del sistema è quindi

$$U = U_1 - U_2 = \text{cost} - m_2 g R(1 + \frac{1}{2}\cos\varphi).$$

Il solo termine variabile che esso contiene è $-1/2\, m_2 g R \cos\varphi$, perciò scegliendo in modo conveniente la costante additiva si può rappresentare U nella forma

$$U = \text{cost} + \frac{1}{2} m_2 g R(1 - \cos\varphi) = \text{cost} + m_2 g R \sin^2\frac{\varphi}{2},$$

che per gli angoli φ piccoli si esprime così

$$U \approx \text{cost} + \frac{1}{4} m_2 g R\, \varphi^2.$$

L'energia cinetica del sistema è $K = 1/2\,(I_1 - I_2)\varphi^2$, dove I_1 e I_2 sono i momenti d'inerzia dei cilindri *1* e *2* rispetto all'asse istantaneo. Se cambia l'angolo φ variano anche le grandezze I_1 e I_2. Però se le oscillazioni sono piccole si può trascurare queste variazioni e prendere i valori corrispondenti del sistema in stato di equilibrio. In stato di equilibrio si ottengono facilmente, mediante il teorema di Huygens-Steiner i seguenti valori di I_1 e I_2:

$$I_1 = \frac{3}{2} m_1 R^2, \; I_2 = \frac{19}{8} m_2 R^2.$$

Osservando ancora che $m_1 = 4m_2$, si ottiene

$$K = \frac{29}{16} m_2 R^2 \dot{\varphi}^2.$$

Le espressioni ottenute di U e di K dimostrano che le piccole oscillazioni del sistema devono essere armoniche con periodo

$$T = \pi \sqrt{\frac{29R}{g}}.$$

25. Una grande sfera omogenea di piombo, di massa M_1 si trova su un piano orizzontale. Si tiri una pallottola di massa m, con un fucile, che alla velocità V effettua un percorso lungo una traiettoria orizzontale verso il centro della sfera e vi si incastri. Calcolare la velocità v del moto rettilineo della sfera dopo che il suo moto si è trasformato in rotolamento puro. Si ammetta che dopo l'urto la sfera rimanga omogenea e non si consideri la massa della pallottola. Si trascuri anche l'attrito per rotolamento.

Risposta. $v = \frac{5}{7}\frac{m}{M} V.$

b)

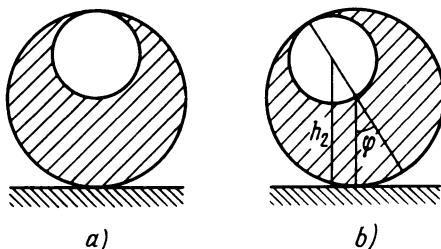
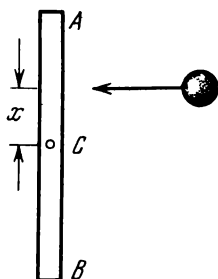



Fig. 141.

Fig. 142.

26. Una sfera di massa $M = 1000$ g che si trova su un piano orizzontale viene perforata lungo il diametro da una pallottola tirata lungo l'orizzonte ad una velocità iniziale $V_0 = 500$ m/s. Dopo l'urto, la sfera dapprima scivola sul piano, poi il moto si trasforma in puro rotolamento alla velocità costante $v = 3$ m/s. Calcolare la velocità V della pallottola dopo l'uscita dalla sfera, se la massa della pallottola è $m = 10$ g. Non si consideri l'attrito per rotolamento.

Risposta. $V = V_0 - \frac{7}{5}\frac{M}{m} v = 80$ m/s.

27. Un'asta omogenea di lunghezza l si trova su una tavola orizzontale liscia e può spostarsi senza slittamento (fig. 142). Nell'istante iniziale in cui la velocità dell'asta è uguale a zero, essa viene urtata da una pallina in moto perpendicolare rispetto all'asta. A quale distanza x

dal centro C dell'asta la pallina urta l'asta se subito dopo l'urto le estremità A e B dell'asta cominciano a muoversi alle velocità v_A e v_B? (Le velocità v_A e v_B si considerano positive quando dopo l'urto hanno la stessa direzione della velocità della pallina, e negative nel caso contrario).

Risposta. $x = \frac{l}{6}\frac{v_A - v_B}{v_A + v_B}$. Questo risultato non dipende dalla natura dell'urto.

28. Su una superficie orizzontale perfettamente liscia si trova un'asta di lunghezza l e di massa M che può scivolare su questa superficie senza attrito (si veda fig. 142). Una pallina di massa m in moto perpendicolare rispetto all'asta la colpisce in un certo punto. A quale distanza x dal centro dell'asta deve trovarsi questo punto d'urto, perché la pallina trasmetta tutta la sua energia cinetica all'asta? L'urto è considerato perfettamente elastico. Con quale rapporto delle masse M e m questo risultato sarà possibile?

Risposta. $x = \frac{l}{2\sqrt{3}}\sqrt{\frac{M}{m} - 1}$. Per avere il risultato desiderato è necessario che $M \geqslant m$. La condizione $x \leqslant l/2$ conduce anche a $M \leqslant 4m$.

29. Su una tavola orizzontale liscia si trova un'asta omogenea elastica, di lunghezza l e di massa M. Una pallina elastica di massa m, che si sposta alla velocità v perpendicolarmente all'asta, la colpisce ad una delle sue estremità. Determinare il massimo valore dell'energia di deformazione del sistema senza considerare l'attrito fra l'asta e la tavola.

Risposta. $U = \frac{M}{M + 4m}\frac{mv^2}{2}$. Nei casi limite 1) $M = 0$ e 2) $M = \infty$ si ottiene 1) $U = 0$, 2) $U = 1/2\, mv^2$.

30. Su una tavola orizzontale liscia si trova un'asta solida omogenea di lunghezza l e di massa M. Una pallina solida di massa m che si sposta alla velocità v_0 perpendicolarmente all'asse dell'asta, la colpisce ad una delle sue estremità. Supponendo che l'urto sia perfettamente elastico e che siano trascurabili le forze d'attrito tra la superficie della tavola e gli oggetti che vi si trovano, calcolare la velocità angolare di rotazione dell'asta dopo l'urto.

Soluzione. Se F è la forza che agisce sulla pallina durante l'urto, allora

$$m\frac{dv}{dt} = -F, \quad M\frac{dV}{dt} = F, \quad I\frac{d\omega}{dt} = F\frac{l}{2}.$$

Dividendo membro a membro, si elimina F e si ottiene

$$\frac{m\,dv}{I\,d\omega} = -\frac{2}{l}, \quad \frac{M\,dV}{I\,d\omega} = \frac{2}{l}.$$

Integrando nei limiti fra il valore iniziale della velocità angolare $\omega = 0$ e il suo valore finale, si ottiene

$$v - v_0 = -\frac{2\,I}{l\,m}\omega, \qquad V = \frac{2\,I}{l\,M}\omega,$$

dove v, V, ω rappresentano i valori delle velocità corrispondenti dopo l'urto. La velocità angolare ω si deduce dall'equilibrio che esprime la conservazione dell'energia. Se si introducono i valori v e V, allora la velocità angolare ω sarà definita dall'equiazione quadratica

$$\left[1 + \frac{4I}{l^2}\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M}\right)\right]\omega^2 - 4\frac{v_0}{l}\omega = 0.$$

Una delle radici di questa equazione ($\omega = 0$) è la velocità angolare dell'asta prima dell'urto, e l'altra il suo valore dopo l'urto. Per rispondere al problema posto, si deve prendere la seconda radice. Tenuto conto della relazione $I = \frac{1}{12} Ml^2$, questa radice si esprime così

$$\omega = \frac{12mv_0}{(4m + M)l}.$$

§ 49. *Giroscopi. Moto dei giroscopi liberi*

1. Secondo la sua etimologia, il « giroscopio » sta ad indicare un dispositivo che serve a scoprire la rotazione. In senso più ampio *un giroscopio* è un corpo solido in rotazione rapida il cui asse di rotazione può modificare la sua direzione nello spazio. Un giroscopio, in particolare, quando è sottoposto a forze esterne, può compiere dei moti sorprendenti che, a prima vista, possono sembrare anche inattesi e incomprensibili. Essi presentano sempre un vivo interesse. Una trottola in rotazione rapida può essere non soltanto un divertente giocattolo, ma può anche rappresentare un eccellente dispositivo di dimostrazione per lo studio delle leggi della meccanica. Tutti gli effetti determinati da una rotazione rapida del giroscopio sono chiamati *effetti giroscopici.* Essi hanno trovato numerose applicazioni scientifico-industriali (cfr. § 51).

Gli effetti giroscopici si manifestano anche negli atomi grazie all'esistenza di momenti determinati dai moti orbitali interni o dalle rotazioni proprie (gli spin) degli elettroni e dei nuclei atomici. È evidente che questi effetti devono essere studiati, come tutti gli altri fenomeni su scala atomica, nel quadro della meccanica quantistica. Tuttavia, poiché c'è una stretta parentela fra le proprietà giroscopiche dei sistemi atomici e macroscopici, la teoria del giroscopio può risultare utile anche nello studio della fisica atomica.

La scienza e la tecnica nutrono un profondo interesse soprattutto nei confronti dei *giroscopi simmetrici.* Un giroscopio si chiama *simmetrico* se possiede una simmetria di rivoluzione rispetto a un certo asse detto *asse geometrico* o *asse di rivoluzione.* La teoria del giroscopio simmetrico è più semplice e più importante di quella del giroscopio asimmetrico, e perciò, ci limiteremo soltanto allo studio della prima. In generale uno dei punti dell'asse di rivoluzione del giroscopio è fisso. Il punto fisso dell'asse si chiama *punto di sostegno* o di sospensione *del giroscopio.* In senso più ampio si intende per punto di sostegno del giroscopio un punto O dell'asse di rivoluzione al quale si riferisce la rotazione del giroscopio. In generale, il moto del giroscopio si compone del moto del punto di sostegno O e di una rotazione intorno all'asse istantaneo che passa attraverso questo punto. La *trottola* è un esempio di giroscopio con punto di sostegno mobile. Nella teoria del giroscopio il caso più significativo è quello in cui il punto di so-

stegno è *fisso*. Si può sempre ricondurre il caso generale del punto di sostegno mobile al caso particolare del punto di sostegno fisso.

2. Affinché l'asse di rivoluzione del giroscopio possa girare liberamente nello spazio, si mette generalmente il giroscopio su di un cardano di sospensione (fig. 143). Il volano del giroscopio è fisso sul suo asse di rivoluzione $A'A$ che può ruotare con attrito, possibilmente molto piccolo, su cuscinetti a sfere fissati alle due estremità di un diametro dell'*anello interno*. L'anello interno può a sua volta ruotare intorno ad un asse $B'B$ perpendicolare all'asse $A'A$; l'asse $B'B$ è sostenuto da cuscinetti fissati alle estremità di un diametro dell'*anello esterno*. Quest'ultimo può ruotare intorno ad un terzo asse $D'D$ sostenuto da cuscinetti fissati nel supporto. I tre assi si incontrano in un punto detto *centro del cardano di sospensione*. Un giroscopio a cardano di sospensione possiede tre gradi di libertà e può eseguire ogni sorta di rotazioni intorno al centro di sospensione. In tutti i problemi trascureremo l'energia cinetica ed i momenti della quantità di moto degli anelli, considerandoli infinitamente piccoli rispetto all'energia cinetica e al momento della quantità di moto del volano del giroscopio. Nel caso in cui il centro del cardano di sospensione o il punto di sostegno coincidano con il centro di massa del giroscopio, il giroscopio si chiamerà *giroscopio equilibrato*.

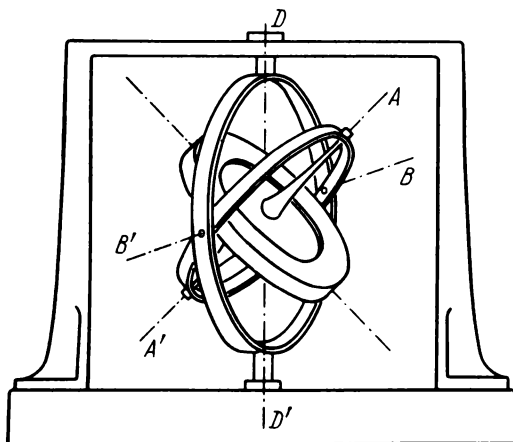



Fig. 143.

3. Secondo il teorema d'Eulero (§ 47) il moto di un giroscopio a punto di sospensione fisso (punto O) può essere rappresentato come una rotazione intorno all'asse istantaneo che passa per il punto O. Indichiamo con $\boldsymbol{\omega}$ il vettore velocità angolare istantanea di rotazione del giroscopio e con $\boldsymbol{L}$ il suo momento della quantità di moto rispetto al punto O. Cerchiamo la relazione fra questi vettori $\boldsymbol{L}$ e $\boldsymbol{\omega}$ per un giroscopio simmetrico. Se la velocità

angolare ω è diretta lungo l'asse di ivoluzione del giroscopio o lungo una direzione perpendicolare a quest'a' ,e, i vettori $\boldsymbol{L}$ e ω saranno mutuamente paralleli. Per convincersene basta fare il seguente ragionamento. Suddividiamo col pensiero il corpo del giroscopio in coppie di punti materiali identici, situati simmetricamente rispetto all'asse di rivoluzione (fig. 144 e 145). Il momento della quantità di moto di una tale coppia di punti materiali rispetto al punto O è $d\boldsymbol{L} = dm[\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{v}_1] + dm[\boldsymbol{r}_2\boldsymbol{v}_2]$, dove dm è la massa di ciascuna di esse. Quando il giroscopio è in rotazione intorno al suo asse di rivoluzione (fig. 144), le velocità $\boldsymbol{v}_1$ e $\boldsymbol{v}_2$ hanno lo stesso modulo, ma sono orientate in direzioni opposte. In questo caso $d\boldsymbol{L} = dm[\boldsymbol{v}_2(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1)]$. I vettori $\boldsymbol{v}_2$ e $(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1)$ sono perpendicolari all'asse di rotazione del giroscopio e perciò il vettore $d\boldsymbol{L}$ e il momento della quantità di moto $\boldsymbol{L}$ del giroscopio intero saranno orientati lungo l'asse di rotazione. Dato che il modulo di $\boldsymbol{L}$ coincide con il momento rispetto all'asse di rotazione, $\boldsymbol{L} = I_{\parallel}\omega$, dove $I_{\parallel}$ è il momento d'inerzia del giroscopio rispetto al suo asse di rivoluzione. Nel caso in cui il giroscopio ruoti intorno all'asse perpendicolare al suo asse di rivoluzione (fig. 145), allora $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_2$ e quindi $d\boldsymbol{L} = dm[\boldsymbol{v}_1(\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}_2)]$. Ne segue che $d\boldsymbol{L}$ e $\boldsymbol{L}$ sono ancora orientati lungo l'asse di rotazione, con $\boldsymbol{L} = I_{\perp}\omega$, $I_{\perp}$ essendo il momento d'inerzia del giroscopio, rispetto all'asse, perpendicolare al suo asse di rivoluzione.

Supponiamo ora che l'asse istantaneo formi un angolo qualunque con l'asse di rivoluzione. Scomponiamo il vettore ω in due componenti: l'una

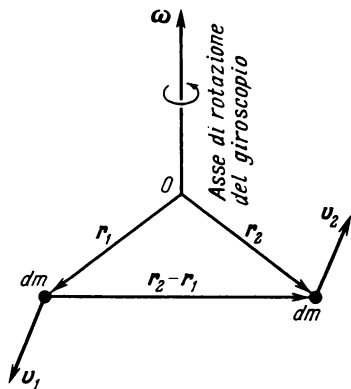
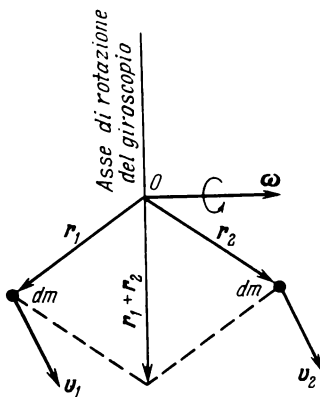



Fig. 144. Fig. 145.

$\omega_{\parallel}$ diretta lungo l'asse di rivoluzione del giroscopio e l'altra $\omega_{\perp}$ perpendicolare alla prima (fig. 146). Dalla definizione generale di momento della quantità di moto (cfr. § 30) deriva che esso si esprime mediante una funzione lineare delle velocità lineari dei punti materiali che risultano da una suddivisione immaginaria del corpo del giroscopio. Queste velocità a loro volta sono funzioni lineari del vettore velocità angolare ω che ha il medesimo

valore per tutti i punti del giroscopio. Ne segue che il *vettore L è una funzione lineare di ω*, quindi si può scrivere $L = L(\omega) = L(\omega_{\parallel} + \omega_{\perp})$, ossia, in virtù della linearità indicata, $L = L(\omega_{\parallel}) + L(\omega_{\perp})$. Osservando che la funzione $L(\omega_{\parallel})$ sarebbe uguale al momento della quantità di moto del giroscopio se questi ruotasse alla velocità angolare $\omega_{\parallel}$ soltanto intorno al suo asse di rivoluzione, si deve avere $L(\omega_{\parallel}) = I_{\parallel}\omega_{\parallel}$. Analogamente $L(\omega_{\perp}) = I_{\perp}\omega_{\perp}$. Infine si ottiene

$$L = I_{\parallel}\omega_{\parallel} + I_{\perp}\omega_{\perp}. \tag{49.1}$$

Utilizzando questa formula è facile costruire il vettore L se è conosciuto il vettore ω (fig. 146). Questa costruzione dimostra che i vettori L e ω e l'asse di rivoluzione del giroscopio si trovano nello stesso piano. Però generalmente le direzioni dei vettori L e ω sono differenti.

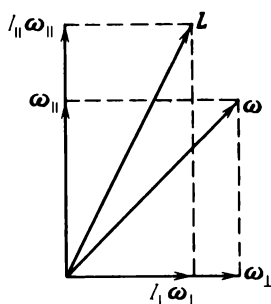



Fig. 146.

Utilizzando la formula (47.2) si possono dedurre dalla formula (49.1) le due espressioni seguenti per l'energia cinetica d'un giroscopio in rotazione

$$K = \frac{1}{2}(I_{\parallel}\omega_{\parallel}^2 + I_{\perp}\omega_{\perp}^2) = \frac{1}{2}\left(\frac{L_{\parallel}^2}{I_{\parallel}} + \frac{L_{\perp}^2}{I_{\perp}}\right). \tag{49.2}$$

Queste espressioni dimostrano che l'*energia cinetic di un giroscopio simmetrico è uguale alla somma delle energie cinetiche di due moti di rotazione di cui uno si effettua intorno all'asse di rivoluzione, l'altro intorno all'asse perpendicolare all'asse di rivoluzione.*

In pratica un giroscopio ha sempre una rotazione rapida intorno al suo asse di rivoluzione. In confronto a questo moto di rotazione rapida, ogni moto di rotazione intorno all'asse perpendicolare, che possa manifestarsi per cause varie, è sempre una rotazione *lenta*. Allora la differenza tra le direzioni dei vettori L e ω diventa molto piccola e ambedue le direzioni praticamente coincidono con la direzione dell'asse di rivoluzione del giroscopio.

Per convenzione, il senso positivo dell'asse di rivoluzione del giroscopio coincide con il senso del vettore velocità angolare ω (più precisamente, il

vettore forma con l'asse di rivoluzione un angolo acuto). Se dal punto di sostegno O si traccia un segmento di retta OS di lunghezza unitaria orientato nel senso positivo di quest'asse, l'estremità S del segmento di retta si chiamerà *apice del giroscopio*. Il moto del giroscopio è completamente determinato se si conosce il moto dell'apice del giroscopio e la sua velocità angolare di rotazione intorno all'asse di rivoluzione. Quindi il principale compito della teoria del giroscipio consiste nel determinare il moto dell'apice del giroscopio e la velocità angolare di rotazione intorno al suo asse di rivoluzione.

4. Tutta la teoria del giroscopio è basata sull'equilibrio dei momenti

$$\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{M}, \tag{49.3}$$

i momenti $\mathbf{L}$ e $\mathbf{M}$ essendo riferiti al punto di sospensione fisso O del giroscopio. Se il momento $\mathbf{M}$ delle forze esterne è uguale a zero, il giroscopio è detto *libero*. Per un giroscopio libero $\dot{\mathbf{L}} = 0$ e quindi

$$\mathbf{L} \equiv I_{\parallel}\boldsymbol{\omega}_{\parallel} + I_{\perp}\boldsymbol{\omega}_{\perp} = \text{cost}. \tag{49.4}$$

Questa equazione esprime la conservazione del momento della quantità di moto del giroscopio. Si deve aggiungere l'equazione che esprime la conservazione dell'energia

$$K \equiv \frac{1}{2}(\mathbf{L}\boldsymbol{\omega}) = \frac{1}{2}(I_{\parallel}\omega_{\parallel}^2 + I_{\perp}\omega_{\perp}^2) = \text{cost}, \tag{49.5}$$

che è una conseguenza dell'equazione (49.3). Se si eleva al quadrato l'equazione (49.4), si ha allora

$$I_{\parallel}^2\omega_{\parallel}^2 + I_{\perp}^2\omega_{\perp}^2 = \text{cost}.$$

Da quest'equazione e da quella precedente deriva che, *nel moto di un giroscopio libero, i moduli dei vettori $\boldsymbol{\omega}_{\parallel}$ e $\boldsymbol{\omega}_{\perp}$ rimangono costanti; rimangono* inoltre *ugualmente costanti le due componenti del momento della quantità di moto: $L_{\parallel} = I_{\parallel}\,\omega_{\parallel}$ e $L_{\perp} = I_{\perp}\,\omega_{\perp}$*. Quindi, *rimane costante l'angolo fra i vettori* $\mathbf{L}$ *e* $\boldsymbol{\omega}$, come viene dimostrato nell'equazione (49.5): *dato che $L_{\parallel}$* e *$L_{\perp}$ sono costanti, l'angolo fra il vettore* **L** *e l'asse di rivoluzione del giroscopio deve essere costante.* In ogni istante l'asse di rivoluzione del giroscopio compie una rotazione intorno all'asse istantaneo con una velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$. Come abbiamo visto i vettori $\boldsymbol{\omega}$ e $\mathbf{L}$ si trovano nello stesso piano dell'asse di rivoluzione del giroscopio. Dato che la direzione del vettore $\mathbf{L}$ è invariabile nello spazio, l'asse istantaneo e l'asse di rivoluzione devono ruotare intorno a questa direzione invariabile alla medesima velocità angolare. Arriviamo così alla seguente descrizione del moto di un giroscopio libero.

In ogni istante il moto di un giroscopio libero è una rotazione intorno ad un asse istantaneo che passa attraverso un punto di sospensione fisso. L'asse istantaneo ed il vettore **L** *variano nel tempo le loro posizioni rispetto al corpo descrivendo dei coni intorno all'asse di rivoluzione alla medesima velocità angolare ω_1 che generalmente non è uguale a ω. La direzione del*

*vettore **L** è invariabile nello spazio ed attorno ad essa ruotano alla medesima velocità angolare ω_1, ma in senso opposto, l'asse di rivoluzione del giroscopio e l'asse istantaneo.* Tale moto si chiama *precessione regolare libera del giroscopio.* La parola « regolare » va intesa nel senso che nessuna irregolarità deve comparire nelle rotazioni coniche dell'asse di rivoluzione e dell'asse istantaneo.

5. Se un giroscopio di momento d'inerzia sufficientemente grande viene messo in rapida rotazione, esso acquisterà un grande momento della quantità di moto. Secondo l'equazione (49.3) l'incremento di questo momento viene determinato dall'integrale

$$\Delta L = \int M dt. \tag{49.6}$$

Se la forza esterna agisce soltanto per un breve periodo di tempo, il valore dell'integrale (49.6), e quindi quello dell'incremento del momento della quantità di moto sarà piccolo. Ciò significa che se un giroscopio libero viene sottoposto per un breve periodo di tempo ad una forza anche notevole il suo moto varia di poco.

Sembra quasi che il giroscopio voglia opporre resistenza a tutti i tentativi tendenti a modificare la grandezza e la direzione del suo momento della quantità di moto. Da questo deriva l'eccezionale stabilità di moto che acquista un giroscopio dopo essere stato messo in rotazione rapida.

Prendiamo un giroscopio massiccio di forma conica (fig. 147). Lungo il suo asse di rivoluzione si può avvitare un'asta la cui estremità servirà da punto di sostegno. L'asta deve essere introdotta nel corpo conico del giroscopio a una profondità tale da permettere al punto di sostegno di coincidere con il centro di massa del giroscopio; il giroscopio allora sarà equilibrato. Qualunque sia l'inclinazione del suo asse di rivoluzione, esso si troverà in uno stato di equilibrio indifferente. Finché il giroscopio sarà in stato di quiete, una minima scossa lo farà deviare notevolmente dalla sua posizione di equilibrio. Mettiamolo ora in rotazione rapida intorno all'asse di rivoluzione. Se si colpisce fortemente l'asta con un bastone, la direzione dell'asta nello spazio non cambia quasi, l'asta comincerà appena ad eseguire una precessione regolare libera, cioè un moto di rotazione sulla superficie di un cono di piccola apertura. L'asse del cono sarà la direzione che acquisterà il momento della quantità di moto del giroscopio dopo aver ricevuto un colpo di bastone.

Diamo un altro esempio della stabilità del moto di un giroscopio in rotazione rapida. Prendiamo un giroscopio costituito da un volano metallico massiccio posto all'interno di una sfera metallica cava smontabile costituita da due semisfere. Le estremità dell'asse del volano sono infilate in cuscinetti a sfere fissati alla sfera cava in modo che il volano possa ruotare intorno ad un diametro della sfera. Sull'asse dell'albero si avvolge un filo la cui estremità libera esce da un foro praticato nella sfera cava. Tirando il filo si imprime al volano una rotazione rapida. Se si cerca di fare scendere questa

Fig. 147.

Fig. 148.

sfera lungo un piano inclinato, essa opporrà una notevole resistenza. La sfera diventa « ubbidiente » se l'asse del volano è orizzontale e perpendicolare alla direzione di rotolamento lungo il piano inclinato. In questa posizione la sfera può rotolare liberamente senza modificare la direzione dell'asse del volano, cioè senza modificare la direzione del momento della quantità di moto $\boldsymbol{L}$. In tutte le altre posizioni, per un rotolamento « normale » l'asse del volano nonché il vettore $\boldsymbol{L}$ devono modificare la loro direzione nello spazio. Il giroscopio « testardo » « non vuole farlo ». Sotto l'azione della gravità la sfera giroscopica acquista un moto di rotazione lento e rotola giù lungo il piano inclinato « di lato » cercando di mantenere invariato l'orientamento dell'asse del volano nello spazio.

Se si mette la sfera con l'albero ruotante sulla punta di un ago, essa non cade, anche se è in posizione inclinata (fig. 148); sotto l'azione della gravità essa si mette a ruotare lentamente intorno all'asse verticale. Tale moto di rotazione si chiama *precessione stimolata*; la studieremo nel seguente paragrafo.

6. Vediamo ora come cambierà l'equazione fondamentale (49.3) se il punto di sostegno è mobile. La risposta può essere dedotta dell'equazione (37.2). Rappresentiamo la velocità di ogni punto del giroscopio in moto con la relazione $v = v_O + v_{\text{rot}}$, dove v_O è la velocità del punto di sostegno O

e $v_{rot} = [\omega r]$ la velocità addizionale dovuta alla rotazione attorno al punto di sospensione O. Il momento della quantità di moto rispetto al punto di sostegno sarà rappresentato dall'espressione

$$L = \int dm[rv_O] + L_{rot},$$

dove L_{rot} è il momento dovuto alla sola rotazione. Introducendo il raggio vettore r_C del centro di massa, si ottiene

$$L = L_{rot} + m[r_C v_O]. \tag{49.7}$$

Derivando questa equazione e portando il risultato nell'equazione (37.2) si avrà

$$\dot{L}_{rot} = M - m[r_C \dot{v}_O]. \tag{49.8}$$

Questa formula dimostra che si può evitare di prendere in considerazione il moto del punto di sostegno, ma allora bisogna aggiungere al momento delle forze M il momento di una « forza fittizia », o « forza d'inerzia » $F_{in} = -m\dot{v}_O$, applicata al centro di massa del giroscopio. Questa conclusione diventa ancora più evidente se si riporta il moto ad un sistema di riferimento in cui il punto di sostegno del giroscopio sia immobile (cfr. cap. IX).

§ 50. *Giroscopio sotto l'azione di forze. Teoria approssimata*

1. Il moto più interessante del giroscopio è la *precessione stimolata* che compare sotto l'azione di forze esterne. Consideriamo, ad esempio, lo schema di principio del giroscopio rappresentato nella figura 149. Il giro-

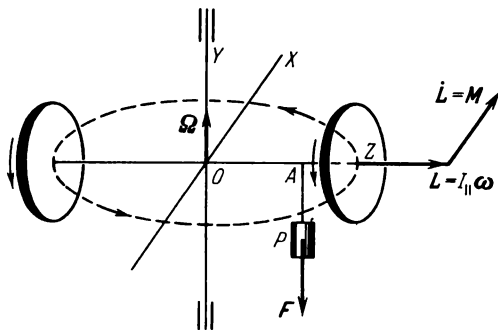



Fig. 149.

scopio è costituito da due volani identici infilati su un asse comune. Esso è concepito in modo tale da poter ruotare liberamente non soltanto intorno al suo asse di rivoluzione OZ, ma anche intorno all'asse verticale OY e all'asse orizzontale OX. Un giroscopio di questo tipo possiede *tre gradi di libertà*. Applichiamo in un punto A dell'asse di rivoluzione del giroscopio

una forza constante $\boldsymbol{F}$, ad esempio il peso $\boldsymbol{P}$. Quando i volani non ruotano si osserva un effetto normale: sotto l'azione del peso l'albero di destra si abbassa mentre il volano di sinistra si solleva rispetto all'asse orizzontale.

Il moto assume però carattere diverso se i volani sono stati messi preliminarmente in rotazione rapida nella stessa direzione. [1] In questo caso l'asse di rivoluzione del giroscopio non si abbassa dalla parte in cui è sospeso il peso $\boldsymbol{P}$, ma comincia a effettuare una rotazione lenta a velocità costante intorno all'asse verticale OY. tale rotazione si chiama *precessione stimolata*. La *teoria approssimata del giroscopio* la spiega in modo assai semplice. Si cerca sempre di comunicare al giroscopio una rotazione rapida intorno all'asse di rivoluzione. Ma per diverse ragioni esso, in generale, acquista anche una rotazione intorno ad un asse perpendicolare. Gli effetti giroscopici specifici si manifestano quando questa rotazione è lenta in confronto alla rotazione intorno all'asse di rotazione, ma nella teoria approssimata viene trascurata la rotazione lenta. Nella formula (49.4) viene ignorato il secondo termine; ciò equivale a scrivere

$$\boldsymbol{L} \approx I_{\|}\boldsymbol{\omega}_{\|} \approx I_{\|}\boldsymbol{\omega}. \tag{50.1}$$

In questa approssimazione i vettori $\boldsymbol{L}$ e $\boldsymbol{\omega}$ hanno la stessa direzione e sono orientati lungo l'asse di rivoluzione del giroscopio, perciò le particolarità del moto dell'asse di rivoluzione possono essere osservate dalle variazioni di direzione del vettore $\boldsymbol{L}$ che sono descritte dall'equazione (49.3). Se consideriamo il vettore $\boldsymbol{L}$ come raggio vettore, allora la derivata $\dot{\boldsymbol{L}}$ può essere considerata geometricamente la velocità di moto dell'estremità del vettore $\boldsymbol{L}$. Supponiamo che il punto d'applicazione della forza esterna $\boldsymbol{F}$ si trovi sull'asse di rivoluzione del giroscopio. Il momento di questa forza è $\boldsymbol{M} = [\boldsymbol{aF}]$, dove $\boldsymbol{a}$ è il raggio vettore condotto dal punto di sospensione del giroscopio al punto d'applicazione della forza $\boldsymbol{F}$. Secondo l'equazione (49.3) il vettore « velocità » $\dot{\boldsymbol{L}}$ deve essere perpendicolare all'asse di rivoluzione Z del giroscopio. Il momento della forza $\boldsymbol{M}$ può modificare la direzione del vettore $\boldsymbol{L}$ ma non il suo modulo. Quindi, se la forza esterna $\boldsymbol{F}$ è costante, allora il vettore $\boldsymbol{L}$ nonché l'asse di rivoluzione del giroscopio devono eseguire una rotazione regolare intorno all'asse OY. Questa rotazione è la precessione stimolata. Il vettore velocità angolare di precessione $\boldsymbol{\Omega}$ nel caso considerato è diretto lungo l'asse OY.

Se si fa ruotare un volano in un senso e l'altro in senso opposto (cfr. fig. 149), ma con la medesima velocità angolare, allora la precessione non avrà luogo. In questo caso $\boldsymbol{L} = 0$, e sotto l'azione del peso $\boldsymbol{P}$ il giroscopio ruota intorno all'asse orizzontale OX, come se i suoi volani non ruotassero.

---

[1] Nelle dimostrazioni di laboratorio il volano del giroscopio è messo in rotazione rapida mettendolo in contatto con il cerchione della puleggia di un motore elettrico. Esistono dei giroscopi nei quali il ruolo di volano è assunto dal motore elettrico a campo magnetico rotante alimentato da una corrente trifase.

2. Calcoliamo il modulo del vettore $\boldsymbol{\Omega}$. Il vettore $\boldsymbol{L}$ varia soltanto in seguito alla sua rotazione alla velocità angolare di precessione $\boldsymbol{\Omega}$. La velocità lineare dello spostamento della sua estremità, cioè la derivata $\dot{\boldsymbol{L}}$, si esprime con la relazione $\dot{\boldsymbol{L}} = [\boldsymbol{\Omega L}]$. Quindi l'equazione (49.3) dà

$$[\boldsymbol{\Omega L}] = \boldsymbol{M}. \tag{50.2}$$

Da questa equazione si può dedurre la velocità angolare di precessione $\boldsymbol{\Omega}$. Poiché nell'esempio considerato il vettore $\boldsymbol{\Omega}$ è perpendicolare all'asse di rivoluzione si avrà

$$\Omega = \frac{M}{L} = \frac{M}{I_{\parallel}\omega}. \tag{50.3}$$

È facile determinare il vettore $\boldsymbol{\Omega}$ anche nel caso più generale in cui l'asse di rivoluzione del giroscopio sia inclinato rispetto all'asse intorno al quale si effettua la precessione. Per questo è sufficiente portare nell'equazione (50.2) l'espressione $\boldsymbol{M} = [\boldsymbol{aF}] = a[\boldsymbol{sF}]$, dove $\boldsymbol{s}$ è un vettore unitario lungo l'asse di rivoluzione del giroscopio. Dato che la teoria approssimata trascura la differenza tra le direzioni del vettore $\boldsymbol{L}$ e dell'asse di rivoluzione del giroscopio, $\boldsymbol{L} = L\boldsymbol{s}$. Quindi l'equazione (50.2) si trasforma in

$$L[\boldsymbol{\Omega s}] = a[\boldsymbol{sF}].$$

Da questa espressione si ottiene

$$\boldsymbol{\Omega} = -\frac{a}{L}\boldsymbol{F} = -\frac{a}{I_{\parallel}\omega_{\parallel}}\boldsymbol{F}. \tag{50.4}$$

Le deduzioni sono valide a condizione che $\Omega \ll \omega$, cioè nel caso di un giroscopio in rotazione rapida. La *rotazione del giroscopio è considerata rapida se la velocità angolare di rotazione intorno all'asse di rivoluzione* $\omega_{\parallel}$ *è molto grande rispetto alla velocità angolare di rotazione intorno all'asse perpendicolare* $\omega_{\perp}$. In particolare, essa deve essere molto grande anche rispetto alla velocità angolare di precessione Ω. Per i giroscopi rapidi utilizzati in campo tecnico la grandezza Ω è millioni di volte più piccola di ω.

3. Per fare una dimostrazione di precessione stimolata non è necessario che il giroscopio abbia due volani, si può impiegare anche un giroscopio ad un solo volano. La figura 150 rappresenta un giroscopio a volano unico sospeso ad un filo. Il momento di rotazione $\boldsymbol{M}$ viene allora creato grazie al peso $\boldsymbol{P}$ del volano stesso ed è questo che provoca la precessione intorno all'asse verticale. Questa stessa esperienza è schematizzata nella figura 151 in scala più grande. Una pesante ruota di bicicletta, munita di un lungo asse e messa in rotazione rapida, ci serve da volano. Questa ruota è sospesa per l'estremità libera del suo asse ad un lungo filo di ferro. Se si pone l'asse della ruota in una posizione sensibilmente orizzontale, la ruota, girando intorno a suo asse, provoca una precessione sotto l'azione del proprio peso. L'esperimento suscita una forte emozione, perché è sorprendente vedere la

ruota descrivere una traiettoria circolare invece di abbassarsi sotto l'azione del proprio peso.

4. Infine, per osservare la precessione sotto l'azione del peso del giroscopio non ci vuole neanche il filo di sospensione. Si può prendere un giroscopio simmetrico con punto di sostegno fisso situato sull'asse di rivoluzione. Il punto di sostegno può trovarsi sotto il centro di massa del giroscopio (come nel caso di una trottola giocattolo) o sopra il centro di massa. In

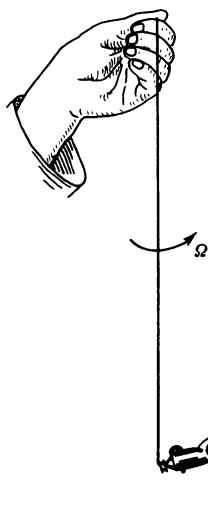



Fig. 150.

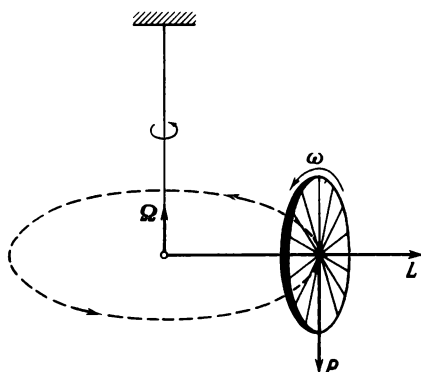



Fig. 151.

quest'ultimo caso il giroscopio si chiama *pendolo giroscopico*. In ambedue i casi la velocità angolare della precessione Ω è determinata mediante la formula (50.4) in cui si deve inserire $F=mg$. Per il periodo di precessione $T=2\pi/\Omega$ si ottiene

$$T = 2\pi \frac{I_{\parallel}\omega}{amg} . \tag{50.5}$$

Nel caso di pendolo giroscopico, si può fare corrispondere al suo *periodo T una lunghezza ridotta l*

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} . \tag{50.6}$$

Essa è uguale a

$$l = \frac{I_{\parallel}^2\omega^2}{m^2a^2g} . \tag{50.7}$$

Nel caso di rotazioni a grandi velocità ω e per piccoli valori di a, la lunghezza ridotta del pendolo giroscopico può essere molto grande ed il suo periodo può raggiungere qualche decina di minuti. La direzione dell'asse di rivoluzione di un tale pendolo giroscopico è poco sensibile all'influsso di forze di breve durata, nonché a scosse. I pendoli giroscopici sono usati sugli aerei e sulle navi in qualità di orizzonte artificiale (cfr. § 52) e di verticale artificiale.

Esempio. Il giroscopio destinato ad orizzonte artificiale per gli aerei possiede le seguenti caratteristiche tecniche $m = 5 \cdot 10^3$g, $I_\parallel = 8 \cdot 10^4$g $\cdot$ cm^2, $a = 0{,}25$ cm. La sua velocità di rotazione è di 20.000 giri/min e la velocità angolare è quindi $\omega = 2094$ rad/s. Inserendo questi dati nelle formule (50.6) e (50.7) si ottiene $l = 180$ km, $T = 860$ s = 14 min 20 s. La velocità angolare della precessione stimolata è di circa $1{,}7 \cdot 10^6$ volte più piccola della velocità angolare di rotazione intorno all'asse di rivoluzione del giroscopio.

5. A prima vista, il comportamento di un giroscopio che esegua un moto di precessione stimolata sembra contrario alla legge di conservazione dell'energia. Senza il peso P l'asse di rivoluzione del giroscopio resta immobile (si veda fig.149). Ma appena viene appeso il peso P, subito inizia un moto di precessione. A questo moto corrisponde un'energia cinetica supplementare del giroscopio. Quale è l'origine di questa energia? La sola forza che potrebbe comunicare al giroscopio questa energia cinetica è il peso P. Ma questa forza è diretta in basso ed è perpendicolare alla direzione del moto di precessione; essa non produce quindi nessun lavoro. Una risposta dettagliata a questo problema, nonché ad altri analoghi, la dà la *teoria esatta del giroscopio* esposta al § 52. Qui ci limitiamo a queste considerazioni preliminari, essenzialmente qualitative.

6. Studiamo il meccanismo di inizio di una precessione regolare. Supponiamo che un giroscopio ruoti ad una velocità angolare $\omega_\parallel$ intorno al suo asse di rivoluzione, il quale compie una rotazione supplementare uniforme

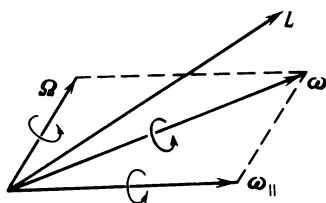



Fig. 152.

ad una velocità angolare Ω intorno ad un asse fisso inclinato di un angolo qualunque rispetto all'asse di rivoluzione (fig.152). Vediamo di chiarire in quali condizioni è possibile un simile moto. Nel caso considerato, alla rotazione propria intorno all'asse di rivoluzione del giroscopio ad una velocità angolare ω viene ad aggiungersi una rotazione supplementare intorno al

medesimo asse ad una velocità angolare $\Omega_{\parallel}$. Inoltre il giroscopio effettua una rotazione intorno all'asse perpendicolare ad una velocità angolare $\omega_{\perp} = \Omega_{\perp}$. Il momento della quantità di moto del giroscopio è quindi $\boldsymbol{L} = = I_{\parallel}(\omega_{\parallel} + \Omega_{\parallel}) + I_{\perp}\Omega_{\perp}$. Determiniamo la derivata di questo vettore rispetto al tempo. Dato che i tre vettori $\omega_{\parallel}$, $\Omega_{\parallel}$ e $\Omega_{\perp}$ effettuano una rotazione uniforme ad una velocità angolare Ω, il vettore $\boldsymbol{L}$ deve ruotare alla medesima velocità angolare. Quindi, la sua derivata rispetto al tempo è $\dot{\boldsymbol{L}} = [\Omega \boldsymbol{L}]$. D'altra parte, l'equazione dei momenti impone che $\dot{\boldsymbol{L}} = [\Omega_{prec}\boldsymbol{L}]$, dove Ω_{prec} è la velocità angolare della precessione regolare determinata dall'azione del momento delle forze esterne $\boldsymbol{M} = [\boldsymbol{aF}]$. Questa velocità angolare è determinata dall'equazione (50.2). Ne segue che il moto considerato del giroscopio è possibile, cioè compatibile con le equazioni della meccanica, se $\Omega = \Omega_{prec}$. Le considerazioni riportate, assolutamente esatte, dimostrano che la *precessione regolare stimolata sotto l'azione di una forza esterna costante F è uno dei moti che può effettuare un giroscopio.* Però un tale moto può verificarsi solo se le condizioni iniziali sono ben definite. Nell'istante iniziale si deve evidentemente comunicare al vertice del giroscopio una velocità iniziale $v_0 = [\Omega s]$, cioè mettere in rotazione uniforme l'asse di rivoluzione del giroscopio con una velocità angolare Ω. L'energia richiesta per farlo è comunicata da una spinta esterna, e non vi è alcuna contraddizione con la legge di conservazione dell'energia. Quando l'azione della spinta esterna sarà cessata, il moto di precessione del giroscopio sarà mantenuto dalla forza esterna $\boldsymbol{F}$. Quindi la *forza esterna non provoca la precessione regolare ma la conserva.*

Il comportamento del giroscopio che esegue una precessione regolare stimolata è in un certo senso analogo al comportamento di una pallina attaccata ad un filo e che effettua una rotazione uniforme su una traiettoria circolare. La forza di tensione del filo attira la pallina verso il centro, ma la pallina si muove in ogni istante perpendicolarmente al filo. La forza di tensione del filo non crea, ma solo mantiene il moto circolare uniforme. Perché il moto di rotazione della pallina abbia inizio, bisogna imprimergli una spinta laterale. La forza di tensione modifica soltanto la direzione della velocità senza influenzarne il modulo. Tenendo conto di questa analogia, lo spostamento dell'asse di rotazione del giroscopio che esegua una precessione stimolata regolare sembrerà forse meno strano che a prima vista.

7. Le considerazioni appena formulate non danno purtroppo una risposta al problema riguardante la conservazione dell'energia. Quando sospendiamo, ad esempio, un peso sull'asse del giroscopio (cfr. fig. 149) nessuna spinta iniziale viene comunicata al giroscopio, e tuttavia ha inizio il moto di precessione. La risposta risulta chiara se si tiene conto del fatto che la precessione che compare nel caso considerato *non è regolare.* Al moto di precessione del vertice del giroscopio si sovrappongono piccole rotazioni e vibrazioni che si chiamano *nutazioni.* In seguito a questa sovrapposizione il vertice del giroscopio descrive delle traiettorie di forme diverse: *elicoidali,*

cicloidali, sinusoidali, che sono schematicamente raffigurate nella figura 168, *a, b, c*. Riesamineremo questo problema più dettagliatamente nel § 52. La forma della traiettoria dipende dalla velocità iniziale comunicata all'asse di rotazione del giroscopio. È abbastanza facile capire cosa provoca le nutazioni più importanti (di grandi dimensioni). Attacchiamo un piccolo peso ad una delle estremità dell'asse di un giroscopio in rotazione moderata (cfr. fig. 149). Se lasciamo andare il peso senza spinta iniziale, il vertice del giroscopio descriverà una traiettoria cicloidale (cfr. fig. 168, *b*). Ma se imprimiamo al giroscopio una spinta laterale in senso opposto alla direzione della precessione prodotta dal peso, comparirà una traiettoria elicoidale (cfr. fig.168,*a*). Se la spinta laterale comunicata al giroscopio coincide con la direzione della precession, la traiettoria si presenterà sotto forma sinusoidale (cfr. fig.168,*c*). Nell'ultimo caso se la spinta è abbastanza energica, la traiettoria può diventare circolare e la precessione regolare.

Quando lasciamo cadere il peso attaccato all'asse del giroscopio, esso comincia ad abbassarsi sotto l'azione della forza di gravità, mentre l'estremità del vettore del momento della quantità di moto $\boldsymbol{L}$ acquista una velocità in direzione laterale conformemente all'equazione $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{M}$. Il vettore $\boldsymbol{L}$ cessa quindi di essere parallelo all'asse di rivoluzione del giroscopio; la traiettoria del vertice comincia ad incurvarsi, il che porta all'apparizione delle nutazioni. Il lavoro prodotto dalla forza di gravità durante la discesa del peso serve ad accrescere l'energia cinetica del moto di precessione-nutazione. Arrivato alla sua posizione più bassa, il peso comincia a salire e l'energia cinetica del moto di precessione-nutazione si converte nell'energia potenziale del peso sollevato. Quindi si nota un processo continuo di conversione di energia potenziale in energia cinetica e viceversa. Non si ha dunque nessuna violazione della legge di conservazione dell'energia.

Se la nutazione è piccola, la precessione si dice *quasi-regolare.* Nei giroscopi tecnici a grande velocità di rotazione la precessione quasi-regolare non si distingue praticamente da una precessione regolare. Le nutazioni in questo caso si presentano sotto forma di vibrazioni estremamente piccole e di grande frequenza dell'asse di rivoluzione e non hanno nessuna importanza nello studio del moto di precessione fondamentale (si veda l'esempio 8 nel § 52). Inoltre le piccole nutazioni (di piccole proporzioni) si attenuano rapidamente per attrito e la precessione quasi-regolare si trasforma in precessione regolare.

8. L'esistenza delle nutazioni chiarisce anche un'altra particolarità del giroscopio che può sembrare paradossale. Secondo l'equazione (49.3) il momento della quantità di moto $\boldsymbol{L}$ del giroscopio varia soltanto sotto l'azione di forze esterne. Se cessa l'azione delle forze esterne, cessa immediatamente anche la variazione del vettore $\boldsymbol{L}$ e, quindi, la precessione del giroscopio. L'asse di rivoluzione del giroscopio diventa fisso. È in contraddizione con la legge d'inerzia una tale *assenza d'inerzia* dell'asse di rivoluzione del giroscopio? Una certa contraddizione esisterebbe, se l'assenza

d'inerzia indicata concernesse il moto dell'asse di rivoluzione stesso. Ma in realtà l'assenza d'inerzia riguarda non l'asse di rivoluzione, ma il vettore $\boldsymbol{L}$. A queste conclusioni, sull'assenza d'inerzia dell'asse di rivoluzione, ci porta la teoria approssimata del giroscopio che non considera le nutazioni. Quindi, ogni contraddizione con la legge d'inerzia viene eliminata, se si tiene conto delle nutazioni.

9. Secondo quanto affermato al punto 6, la *precessione regolare stimolata dura un tempo indefinitamente lungo se il momento* $\boldsymbol{M}$ *delle forze esterne che la mantengono resta costante.* Ad esempio, sotto l'azione del peso P il giroscopio della figura 149 avrebbe dovuto descrivere un moto di precessione intorno all'asse verticale Y per un tempo indefinitamente lungo ed il peso P avrebbe dovuto restare sempre alla medesima altezza. Invece, in realtà il peso P discende lentamente ed ininterrottamente. Ciò si guistifica con l'*azione delle forze d'attrito* e di altre *forze di frenaggio* che creano un momento di rotazione di frenaggio $\boldsymbol{M}_1$ diretto lungo la verticale discendente, nel senso negativo dell'asse Y (cfr. fig. 149). Quindi il momento totale delle forze esterne applicate al giroscopio sarà $\boldsymbol{M}+\boldsymbol{M}_1$. In virtù dell'equazione fondamentale (49.3) la derivata $\dot{\boldsymbol{L}}$, cioè la velocità lineare di rotazione dell'estremità del vettore $\boldsymbol{L}$, è diretta lungo il momento risultante $\boldsymbol{M}+\boldsymbol{M}_1$. Essa possiede una componente verticale diretta lungo $\boldsymbol{M}_1$. È per questo che l'estremità del vettore $\boldsymbol{L}$ e il peso P si abbassano. Si può dire che il *momento di frenaggio* $\boldsymbol{M}_1$ *fa comparire una precessione supplementare intorno all'asse orizzontale X, che determina l'abbassamento del peso P.*

È facile ottenere conferma della validità di questa interpretazione mediante un esperimento pratico. Imprimiamo al giroscopio in precessione piccole spinte in senso opposto a quello della precessione determinata dal peso P, il peso allora comincerà ad abbassarsi. Se invece le spinte si imprimono nel medesimo senso della precessione, il peso si alzerà. Nel primo caso facciamo comparire un momento di rotazione $\boldsymbol{M}_1$ diretto lungo la verticale discendente, nel secondo lungo la verticale ascendente. Questo momento crea una rotazione di precessione intorno all'asse orizzontale X abbassando o alzando il peso P. Quindi, *se si cerca di rendere la precessione più rapida, il giroscopio reagisce facendo salire il peso sospeso e se si cerca di rallentare il moto di precessione, il peso subito si abbassa.*

10. È interessante esaminare questa regola alla luce del *principio di Le Chatelier* (1850-1936), che è un principio generale della fisica. Secondo questo principio, stabilito da Le Chatelier in seguito all'esame di casi particolari, *un sistema sottoposto ad un'azione esterna reagisce in modo da far risultare attutita l'azione esercitata.* Quando attacchiamo all'asse di rivoluzione del giroscopio un piccolo peso, esso reagisce contro questo intervento con un moto di precessione. Dal punto di vista del principio di Le Chatelier, questa precessione deve essere considerata una reazione del giroscopio che attutisce l'effetto dell'azione esterna, cioè una reazione che impedisce al peso di abbassarsi. È chiaro che aumentando artificialmente la reazione

del giroscopio, cioè accelerando la velocità della precessione, questo effetto *si rafforzerà*. In altre parole, il peso *deve salire*. Al contrario, una diminuzione artificiale della velocità di precessione del giroscopio equivale ad una *riduzione della sua reazione contro l'azione esercitata dal peso* che, quindi, *deve abbassarsi*. Un approccio di questo tipo può risultare utile, ad esempio, nello studio di diversi dispositivi giroscopici di stabilizzazione, quando è necessario trovare rapidamente il modo di rafforzare l'effetto stabilizzante del giroscopio.

11. Quanto enunciato permette di spiegare facilmente il comportamento di un giroscopio *a due gradi di libertà*. Perché un giroscopio libero sia stabile e perché, sottoposto all'azione di forze esterne, possa esercitare una precessione stimolata come quella appena descritta, bisogna che esso possieda *tre gradi di libertà,* cioè possa ruotare liberamente intorno ai tre assi che passano attraverso il punto di sostegno O. Uno di questi assi è l'asse di rivoluzione del giroscopio la cui rotazione deve essere possibile in ogni caso; in caso contrario non si può parlare affatto di effetto giroscopico. Fissiamo un giroscopio in modo che la rotazione intorno ad uno degli altri due assi sia impossibile. In questo caso il giroscopio diventa un sistema con due gradi di libertà. Si abbia un giroscopio equilibrato fissato, in modo che la rotazione intorno all'asse verticale OY non possa avere luogo (cfr. fig. 149). Se si attacca il peso P, il giroscopio comincia a ruotare intorno all'asse orizzontale OX, come un corpo solido normale, il peso P comincia ad abbassarsi nel senso della forza di gravità $\boldsymbol{F}$. Questo cambiamento radicale di comportamento del giroscopio viene giustificato anche dalla stessa regola di precessione. La forza $\boldsymbol{F}$ crea un momento $\boldsymbol{M}$ che deve suscitare un moto di precessione intorno all'asse verticale OY. Dato che il giroscopio è fisso, la precessione non può prodursi. Essa produrrà soltanto una deformazione di torsione dell'asse verticale. I cuscinetti applicheranno allora a quest'asse deformato un momento rotatorio diretto lungo la verticale discendente. È questo momento che farà comparire la precessione del giroscopio intorno all'asse orizzontale OX. Poiché a questo moto di rotazione non c'è opposizione, la precessione si produrrà veramente e il peso P comincerà ad abbassarsi. Si può dire che l'asse deformato frena la precessione che sarebbe comparsa sotto l'azione del peso P ed è questo frenamento che determina l'abbassamento del peso.

Se si dà una spinta, diretta verso l'alto o il basso ad una delle estremità dell'asse di rivoluzione del giroscopio, in assenza del peso, esso continuerà a ruotare per inerzia intorno all'asse orizzontale OX nel senso della spinta ricevuta. In questo caso, durante la spinta, il giroscopio cercherà di descrivere una rotazione di precessione intorno all'asse verticale OY, il che porta ad una deformazione di torsione dell'asse verticale. Il momento di torsione, a cui è sottoposto il giroscopio, farà elevare o abbassare il vertice del giroscopio, cioè provocherà una rotazione di precessione del giroscopio intorno all'asse OX nel senso della spinta ricevuta. Finché dura questa precessione, l'asse verticale rimarrà deformato.

Si può studiare nello stesso modo anche il comportamento di un giroscopio il cui asse orizzontale OX sia bloccato.

12. Generalmente il centro di massa di una trottola si trova al di sopra del suo punto di sostegno. Perché la trottola non cada di lato, bisogna comunicarle una velocità di rotazione sufficientemente grande intorno al suo asse di rivoluzione. Se la velocità di rotazione è piccola, la posizione verticale dell'asse di rivoluzione diventa instabile e la trottola cade. Se si mette in rotazione una trottola in posizione inclinata, il suo centro di massa comincia ad alzarsi e la trottola acquisterà la posizione verticale. Causa di questo effetto sono le forze d'attrito che agiscono sul punto di sostegno.

Vediamo dapprima quale sarebbe il moto della trottola se non ci fossero le forze d'attrito. Supponiamo che il piano di sostegno della trottola sia orizzontale e perfettamente liscio. La trottola è sottoposta all'azione di due forze: il suo proprio peso $\boldsymbol{P}$ e la forza della pressione normale $\boldsymbol{F}$ prodotta

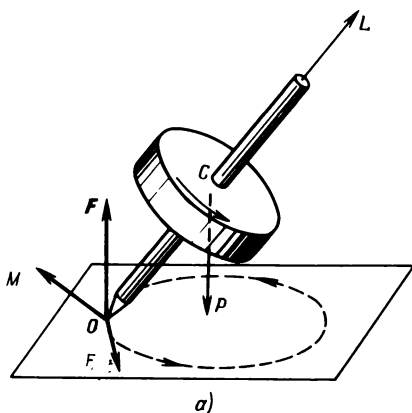



Fig. 153.

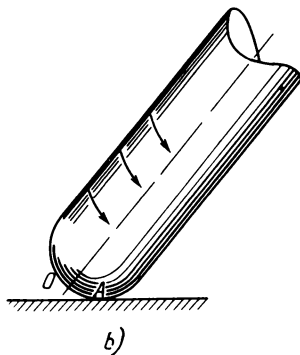



Fig. 154.

dal piano di sostegno (fig. 153). Il momento di queste forze è perpendicolare al piano del disegno ed orientato verso il retro dello stesso. Questo momento determina la precessione della trottola intorno all'asse verticale. Per lo studio di questa precessione utilizziamo l'equazione dei momenti rispetto al centro di massa C. L'equazione si presenta sotto la sua forma usuale (49.3). Sia la precessione regolare. Allora il centro di massa rimane immobile e quindi $\boldsymbol{F}+\boldsymbol{P}=0$ in virtù del teorema del moto del centro di massa. Il momento della forza di precessione normale $\boldsymbol{F}$ farà spostare il vertice della trottola dietro il piano del disegno. La trottola eseguirà una rotazione di precessione nello stesso senso in cui si effettua la rotazione intorno all'asse di rivoluzione del giroscopio. Dato che il centro di massa è immobile, il punto di sostegno O descriverà una traiettoria circolare nel senso indicato dalle frecce (figura 154).

Consideriamo ora le forze d'attrito per scivolamento che sorgono durante il moto del punto sulla traiettoria circolare indicata. È importante che la risultante $\boldsymbol{F}_{att}$ di queste forze d'attrito sia diretta nello stesso senso in cui si muove il punto di sostegno della trottola. Ciò risulterà più evidente se si considera che la punta della trottola non è perfettamente affilata, ma arrotondata, come si vede nell'ingrandimento della figura 154. Se dopo aver messo la trottola in rotazione intorno al suo asse di rivoluzione, la si appoggia sul piano di sostegno, si crea uno scivolamento nel punto di contatto A. È chiaro che la forza d'attrito per scivolamento che agisce sulla punta della trottola è orientata in senso inverso alla sua rotazione, cioè nel senso dello spostamento durante la precessione del punto di sostegno della trottola. Va sottolineato che questa particolarità della forza d'attrito non dipende assolutamente dalla posizione del centro di massa rispetto al punto di sostegno della trottola. La forza d'attrito per scivolamento $\boldsymbol{F}_{att}$ agisce sempre nel senso della precessione determinata dal peso della trottola e dalla pressione del piano di sostegno e tende ad accelerare questa precessione. Secondo la regola generale, ciò porta al sollevamento del centro di massa della trottola. Se il centro di massa si trova al di sopra del punto di sostegno, durante il sollevamento del centro di massa l'asse di rivoluzione della trottola si avvicinerà alla verticale.

È possibile fare ragionamenti più precisi. Supponiamo di nuovo che il centro di massa si trovi al di sopra del punto di sostegno della trottola. Il momento delle forze d'attrito $\boldsymbol{F}_{att}$ ha una componente verticale diretta verso l'alto. Questo momento cerca di provocare la precessione del vettore $\boldsymbol{L}$, il che comporta il sollevamento del vertice della trottola. Se il centro di massa C è immobile, l'innalzamento del vertice provocherebbe la discesa del punto di sostegno O. Ma questa discesa viene impedita dal piano di sostegno e non può avvenire. La tendenza alla discesa del punto di sostegno si manifesterà quindi con un aumento della forza di pressione normale $\boldsymbol{F}$ che diventa superiore alla forza del peso $\boldsymbol{P}$. La risultante di queste due forze che è diversa da zero, è diretta verso l'alto e provoca quindi di alzare il centro di massa C, raddrizza cioè l'asse della trottola.

La forza d'attrito $\boldsymbol{F}_{att}$ che agisce sul punto di sostegno della trottola, si manifesta anche in altri modi. Essa non soltanto rallenta la rotazione assiale della trottola, ma fa muovere il suo centro di massa e la trottola comincia a correre sul piano di sostegno. Se non ci fossero altre forze d'attrito (la resistenza dell'aria, ad esempio, ecc.) questo moto subirebbe un'accelerazione costante. (È un'altra conferma che la direzione della forza $\boldsymbol{F}_{att}$ coincide con quella del moto della trottola). Osserviamo che lo scivolamento diminuisce costantemente e il moto della trottola si trasforma infine in puro rotolamento. In questo istante, la rotazione della trottola intorno al suo asse rallenta a tal punto che essa perde stabilità e cade sotto l'azione della forza di gravità.

13. Si può spiegare l'innalzamento dell'asse della trottola per mezzo dell'equazione dei momenti rispetto al punto di sostegno O. Si deve consi-

derare che il punto di sostegno è in moto accelerato ed utilizzare l'equazione dei momenti nella sua forma (49.8). In breve, bisogna tener conto delle « forze d'inerzia » (cfr. §§ 63 e 64) che compaiono grazie al moto accelerato del punto di sostegno. Nel caso considerato, ci interessa la forza d'inerzia legata all'accelerazione tangenziale. Questa « forza » è applicata al centro di massa C ed è di senso contrario a quello dell'accelerazione tangenziale (nella figura 153 essa punta dietro il disegno, cioè è orientata in avanti rispetto al lettore). Il suo momento rispetto al punto di sostegno O ha una componente verticale diretta verso l'alto. Questo momento fa comparire la precessione grazie alla quale si innalza il vertice della trottola.

14. Esaminiamo ora nello stesso modo il caso in cui il centro di massa si trovi sotto il punto di sostegno. Le forze d'attrito per scivolamento che sorgono nel punto di sostegno fanno alzare ugualmente il cento di massa. Però in questo caso il vertice della trottola simultaneamente si abbassa.

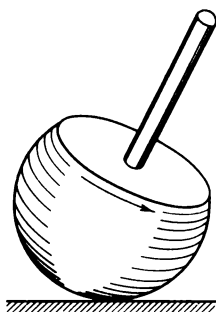



Fig. 155.

15. Serve da curioso esempio la *trottola cinese* che è a forma di fungo (fig.155). A causa dell'azione delle forze d'attrito, il centro di massa della trottola si innalza continuamente, mentre l'asse di rivoluzione si inclina sempre di più. Questo provoca infine il *capovolgimento della trottola* ed essa gira dalla parte del gambo. L'asse di rivoluzione si avvicina sempre di più alla verticale a meno che la trottola non perda stabilità per il rallentamento della rotazione assiàle.

16. Per fare ruotare l'asse di rivoluzione d'un giroscopio gli si devono applicare forze, il cui momento $\boldsymbol{M}$ è determinato dall'equazione (50.2), in cui Ω rappresenta la velocità angolare della rotazione stimolata. Tali forze vengono create, ad esempio, dalla pressione dei cuscinetti sull'asse di rivoluzione del giroscopio. L'asse di rivoluzione del giroscopio esercita sui cuscinetti forze di contro-pressione uguali, ma di senso contrario. Queste forze di contro-pressione ed i momenti rotatori creati da queste forze si chiamano *giroscopici.*[1] È facile accorgersi della presenza di forze giroscopiche;

---

[1] Il termine « forze giroscopiche » qui ha un significato diverso che nel § 24.

è sufficiente prendere in mano l'asse di una ruota di bicicletta in rapida rotazione e cercare di fare ruotare quest'asse. La ruota tenterà di sfuggirvi di mano in senso perpendicolare. Se si fa ruotare l'asse rapidamente, bisognerà fare un notevole sforzo per non farselo sfuggire.

Nell'esperimento con lo sgabello di Žukovskij (§ 34, punto 7) il dimostratore che fa ruotare l'asse di una ruota di bicicletta è sottoposto a forze giroscopiche, il cui momento è diretto lungo la verticale. Sono queste forze a mettere lo sgabello in rotazione modificandone la velocità angolare. Le forze giroscopiche agiscono sui cuscinetti dell'albero di una turbina di propulsione di una nave o dell'elica di un aereo quando, facendo una manovra, la direzione della nave o del velivolo varia rapidamente. Queste forze provocano un'« imbardata » o « braccheggio della rotta ». Simili effetti non si osservano sulle grandi navi, ma si registrano sulle piccole imbarcazioni e sui piccoli aerei.

17. Avviciniamo all'asse del giroscopio rappresentato nella figura 147 un'asta orizzontale. (L'asse di rivoluzione del giroscopio è rappresentato sulla figura 156,*a*. La sezione retta dell'asta nel piano della figura è rappresentata da un cerchio tratteggiato. Supponiamo che l'asta sia perpendicolare al piano della figura). Al contatto compare una forza d'attrito per slitta-

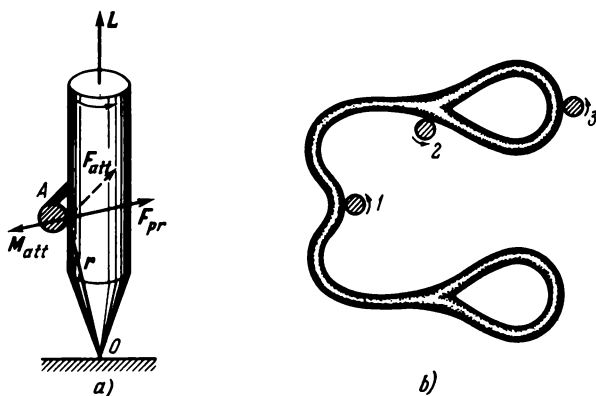



Fig. 156.

mento F_{att} parallela all'asta e, quindi, perpendicolare al piano del disegno nel quale è rappresentata con una freccia tratteggiata. Il momento di questa forza rispetto al punto di sostegno $M_{att} = [rF_{att}]$ si trova nel piano della figura ed è orientato perpendicolarmente all'asta ed al raggio vettore r. Questo momento avrà tendenza ad imporre all'asse del giroscopio un moto di precessione nel medesimo senso, ma poiché l'asta lo impedisce, la precessione non potrà avere luogo. Questa tendenza alla precessione si manifesta solo con una « adesione » dell'asse del giroscopio all'asta. Perciò si crea una forza di pressione F_{press} esercitata dall'asta sull'asse del giroscopio.

Questa forza si manifesterà dapprima nell'aumento della forza F_{att}; ed in secondo luogo provocherà una precessione dell'asse di rivoluzione del giroscopio facendo spostare questo asse lungo l'asta nella medesima direzione della forza F_{att} dato che il momento della forza di pressione $M_{press} = [rF_{press}]$ è diretto nella medesima direzione. L'aumento della forza F_{att} a sua volta causerà l'aumento della forza di pressione F_{press} e l'accelerazione dello spostamento di precessione dell'asse di rivoluzione del giroscopio lungo l'asta. Questa accelerazione cesserà quando il moto dell'asse di rivoluzione con scivolamento si trasformerà in rotolamento puro. (Nell'esperienza descritta, può mancare il tempo a causa della variazione dell'inclinazione dell'asse di rivoluzione del giroscopio durante il moto). A partire da questo istante la forza F_{att} praticamente si annulla, la forza F_{press} diventa costante e il moto di precessione dell'asse di rivoluzione del giroscopio lungo l'asta diventa uniforme.

Invece dell'asta si può prendere un profilo fatto di filo di ferro, chiuso o aperto, di una forma qualsiasi. Per le dimostrazioni si può utilizzare il contorno rappresentato sulla figura 157,*b*. Il contorno si fissa in posizione orizzontale per mezzo di un cavalletto, in prossimità dell'asse di rivoluzione del giroscopio. Se si pone in contatto l'estremità superiore dell'asse del giroscopio con il contorno, l'asse comincia a percorrere il contorno passando successivamente dalla posizione *1* alla posizione *2*, poi alla posizione *3*, ecc. Durante questo spostamento l'asse del giroscopio si stringe fortemente al contorno. È una esperienza assai spettacolare. L'effetto descritto si chiama *moto perimetrico*.

Problemi

1. Il protagonista di un romanzo di Jules Verne propose di fare ruotare l'asse terrestre sparando dalla Terra un proiettile pesante. Valutare a quale velocità v minima un proiettile di massa $m = 1000$ t deve essere tirato dal polo per far ruotare l'asse istantaneo di rotazione della Terra di un angolo $\alpha = 1°$. La massa della Terra è $M = 6 \cdot 10^{21}$ t. La lunghezza di un grado del meridiano terrestre è $l = 111$ km. Considerare la Terra una sfera omogenea (si veda il § 37 i problemi 23 e 24).

Soluzione. L'angolo α sarà massimo quando la velocità v del proiettile sarà perpendicolare all'asse terrestre. Il proiettile acquista un momento della quantità di moto $L = \dfrac{m[rv]}{\sqrt{1+v^2/c^2}}$ che è perpendicolare alla velocità v. La Terra acquista lo stesso momento in senso opposto, e ciò provocherà una deviazione del vettore velocità angolare ω di rotazione della Terra di un angolo $\alpha = L/I\omega$. Portando in questa relazione $I = 2/5\, Mr^2$ ed osservando che la differenza $c - v$ è molto piccola, si ottiene

$$\frac{c-v}{c} \approx \frac{25m^2c^2}{8M^2l^2\omega^2} \approx 1{,}9 \cdot 10^{-22}.$$

2. Una trottola simmetrica, il cui asse di rivoluzione forma un angolo α con la verticale (si veda fig. 153), esegue una precessione regolare sotto l'azione della forza di gravità. Essendo il punto di sostegno O della trottola fisso, calcolare l'angolo β che la forza, con cui la trottola agisce sul piano di sostegno, forma con la verticale.

Risposta. $\mathrm{tg}\beta = \dfrac{a^3 m^2 g \sin\alpha}{I_1^2 \omega^2}$.

3. Un pendolo giroscopico utilizzato come orizzonte artificiale negli aerei presenta le caratteristiche indicate al punto 4 di questo paragrafo. Fintantoché il moto dell'aereo è uniforme, l'asse di rivoluzione del pendolo è verticale. Poi, durante $\tau = 10$s, l'aereo si mette a volare con una accelerazione orizzontale $\dot{v}_0 = 1$ m/s^2. Calcolare l'angolo di deviazione α rispetto alla verticale dell'asse di rivoluzione del giroscopio durante il moto accelerato.

Risposta. $\alpha \approx \dfrac{m a \dot{v}_0 \tau}{I_1 \omega} \approx 0{,}43° \approx 25'$.

4. Una sfera, omogenea e liscia, posta su una tavola orizzontale, è in rotazione rapida intorno al suo diametro verticale alla velocità angolare ω_0 (fig. 157). Una seconda sfera, identica alla prima, la urta. Poiché l'urto è perfettamente elastico, la rotazione non si trasmette. La prima sfera comincia a muoversi scivolando sulla tavola. Supponiamo che il coefficiente d'attrito per scivolamento k non dipenda dalla velocità. Calcolare l'angolo α tra l'asse istantaneo di rotazione della prima sfera e la verticale in ogni istante t, in cui lo scivolamento non è ancora cessato.

Si calcoli anche il valore di questo angolo nell'istante in cui il moto della sfera si trasforma in rotolamento puro. Si ignori l'attrito per rotazione e per rotolamento.

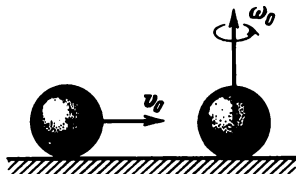
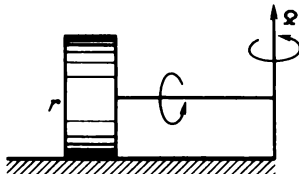



Fig. 157. Fig. 158.

Soluzione. Dopo l'urto il centro della sfera rotante si metterà in moto alla velocità iniziale v_0. Secondo il teorema sul moto del centro di massa, la sua velocità nell'istante t sarà $v = v_0 - kgt$. Sia ω il valore istantaneo del vettore velocità angolare. Il momento della forza d'attrito rispetto al centro della sfera sarà $kmgr\boldsymbol{i}$, dove $\boldsymbol{i}$ è un vettore unitario perpendicolare al piano della figura e diretto dietro al piano del disegno.

Dall'equazione dei momenti $I\dfrac{d\omega}{dt} = kmgr\,\boldsymbol{i}$ si ottiene $\dfrac{2}{5} r \dfrac{d\omega}{dt} = kg\boldsymbol{i}$, quindi $\omega = \omega_0 + 5\,kgt\boldsymbol{i}/(2r)$. L'asse istantaneo di rotazione si trova sempre su un piano perpendicolare al piano del disegno. L'angolo α è determinato dall'equazione $\mathrm{tg}\alpha = 5\,kgt/(2r\omega_0)$. Determiniamo ora l'istante in cui ha origine il rotolamento puro. La velocità del moto traslatorio della sfera dipende soltanto dalla componente orizzontale del vettore $\boldsymbol{\omega}$. L'istante in cui comincia il rotolamento puro si deduce dalla condizione $5/2\, kgt = v_0 - kgt$. A partire da questo istante l'angolo α diventa costante e non varia più, e si avrà $\mathrm{tg}\alpha = 5/7\; v_0/r\omega_0$. Se $v_0 = \omega_0 r$, allora $\mathrm{tg}\alpha = 5/7$, $\alpha = 35°32'$. La rotazione della sfera intorno ad un diametro dato è instabile. Perciò la soluzione ottenuta determina l'inclinazione dell'asse di rotazione rispetto allo *spazio esterno* e non all'interno della sfera stessa.

5. Il giroscopio rappresentato sulla figura 147 descrive un moto sul perimetro di un anello metallico circolare di raggio R ed il cui piano è orizzontale. Il raggio r dell'asta del giroscopio è piccolo in confronto a $R\,(r \ll R)$. L'asse del giroscopio forma un angolo α con la verticale. (Nel caso considerato questo asse descrive un cono di rivoluzione il cui vertice si trova nel punto di sostegno O.) Determinare la forza di pressione F_{press} con la quale l'asta del giroscopio agisce sull'anello metallico.

Soluzione. In regime stazionario il moto perimetrico dell'asse di rivoluzione del giroscopio è di rotolamento puro. Se $r \ll R$, la velocità angolare della precessione si deduce dalla condizione $\Omega R = \omega r$. Utilizzandola è facile determinare la forza cercata

$$F_{press} = \frac{I_\parallel \omega^2 r}{R^2} \sin^2\alpha.$$

Siano $\omega = 100$ giri/s $= 628$ rad/s, $I_\parallel = 2 \cdot 10^4$ g·cm^2, $r = 0{,}5$ cm, $R = 8$ cm, $\alpha = 20°$. Allora $F_{press} \approx 70$ N.

6. Gli effetti giroscopici vengono utilizzati nei mulini a disco. Un rullo cilindrico massiccio (macina rotante) che può ruotare intorno al suo asse geometrico è messo in rotazione intorno ad un asse verticale (alla velocità angolare Ω) e rotola su una lastra orizzontale di sostegno (fig.158). Una tale rotazione può essere assimilata alla precessione stimolata di un giroscopio costituito in questo caso dalla stessa macina rotante. In presenza di precessione stimolata, la forza di precessione che esercita la macina sulla lastra su cui essa rotola, aumenta. È questa forza a stritolare e sbriciolare i materiali versati sulla lastra. Calcolare la forza di pressione totale che esercita la macina (mola, rullo) sulla lastra.

Risposta. $F_{press} = P + \dfrac{I_\parallel \Omega^2}{r} = P + \dfrac{1}{2} m\Omega^2 r$, dove P è il peso della mola, m la sua massa e r il suo raggio. Sia $r = 50$ cm. Allora per una velocità di lavoro uguale a 1 giro/s, e quindi $\Omega = 2\pi$ rad/s si ottiene $1/2\, m\Omega^2 r \approx mg = P$. Quindi $F_{att} \approx 2P$. Si noti che il momento della quantità di moto totale L non è diretto lungo l'asse di rotazione della mola, perché esiste ancora un momento dovuto alla rotazione intorno all'asse verticale. Dato che quest'ultimo momento resta invariato durante la rotazione della mola, si può ignorarlo nella soluzione del problema.

7. Un disco di raggio r in rotazione intorno al proprio asse alla velocità angolare ω rotola senza scivolamento in posizione inclinata su un piano orizzontale descrivendo un cerchio in un tempo T. Calcolare T e il raggio R del cerchio se $R \gg r$ e se l'angolo formato dal piano orizzontale e da quello del disco è α.

Risposta. $T = \dfrac{3\pi\omega r}{g} \operatorname{tg}\alpha$, $R = \dfrac{3}{2} \dfrac{\omega^2 r^2}{g} \operatorname{tg}\alpha$.

§ 51. *Applicazioni dei giroscopi*

1. I giroscopi trovano numerose e varie applicazioni scientifiche e tecniche ed un corso di fisica generale può darne solo qualche accenno sommario. Prendiamo in esame i principi di funzionamento di alcuni *dispositivi giroscopici* a prescindere però dalle loro caratteristiche di costruzione e tecniche. Supporremo che tutti i dispositivi ed anche le loro condizioni di funzionamento siano « ideali ». Ammettiamo quindi che non siano presenti nè forze d'attrito nè altre forze nocive, che i momenti d'inerzia ed i momenti della quantità di moto degli anelli dei cardani siano infinitesimi ecc. Nella realtà invece tutti questi fattori esercitano un'influenza notevole e qualche volta decisiva sul comportamento dei giroscopi reali. Limitiamoci ad esaminare solo le idee ed i principi fondamentali su cui si basa il funzionamento dei dispositivi giroscopici.

2. Cominciamo con lo studio del giroscopio *equilibrato (astatico)* a tre gradi di libertà. Consideriamo un tale giroscopio in rotazione rapida intor-

no al suo asse di rivoluzione. Supponiamo che la direzione di quest'asse non sia influenzata né dalla forza di gravità, né dalla rotazione della Terra, né da alcun moto accelerato del suo punto di sostegno. In assenza di forze che possono creare momenti di rotazione rispetto al punto di sostegno, l'asse di rivoluzione di un giroscopio equilibrato dovrebbe conservare una direzione immutabile rispetto alle stelle. Se si orienta l'asse di rivoluzione del giroscopio su una certa stella, esso ruoterà rispetto alla Terra rimanendo sempre orientato in modo da seguire il moto della stella sulla volta celeste. Un tale giroscopio permette di determinare la rotazione completa (di 24 ore) della Terra, come è stato dimostrato per la prima volta in modo convincente dal fisico francese Léon Foucault (1819-1868). La realizzazione di tali esperimenti è molto difficile, perché è impossibile liberarsi completamente dall'attrito, inevitabile nei cuscinetti della sospensione a cardano, e da altre forze nocive che creano momenti rotatori rispetto al centro di sospensione del giroscopio.

3. La proprietà del giroscopio equilibrato di mantenere invariata la direzione dell'asse di rivoluzione viene utilizzata nel controllo automatico del moto delle mine e dei siluri semoventi, degli aerei, delle navi, dei razzi, ecc. Il momento della quantità di moto del giroscopio $L = I_{\parallel}\omega$ deve essere sufficientemente grande per diminuire l'influenza delle forze d'attrito e di altre forze nocive. L'asse di rivoluzione del giroscopio in rotazione fissa la direzione di rotta degli ordini. Qualsiasi deviazione dalla rotta fissata (a causa dell'urto delle onde o delle folate di vento ad esempio) lascia invariata la direzione spaziale dell'asse di rivoluzione del giroscopio. Questo significa che l'asse di rivoluzione con le intelaiature della sospensione a cardano ruota rispetto all'ordigno mobile. La rotazione delle intelaiature della sospensione a cardano mette in azione, per mezzo di vari congegni, i *motori dei timoni di governo* che correggono il moto dell'ordigno e lo rimettono in rotta. Nel caso di un siluro che si sposti su un piano orizzontale (sulla superficie del mare) è sufficiente un giroscopio il cui asse di rivoluzione sia orientato nel senso del moto. Per un aereo bisogna disporre di due giroscopi: l'uno, ad asse verticale, definisce il piano orizzontale in cui deve rimanere l'aereo, l'altro, con l'asse orizzontale orientato lungo l'asse dell'aereo, fissa la rotta da seguire. Tutti gli aerei moderni sui lunghi percorsi sono forniti di « giropilota » che sostituisce i piloti in volo, liberandoli dalla necessità di essere sempre ai comandi e concedendo loro così la possibilità di riposare.

4. Un'applicazione importante del giroscopio non equilibrato a tre gradi di libertà è la realizzazione dell'*orizzonte* e *della verticale artificiali*. Questi dispositivi sono neccessari alla navigazione quando la linea dell'orizzonte non è visibile. In tutti i punti del globo terrestre si può facilmente determinare la direzione della verticale per mezzo di un semplice pendolo usato come filo a piombo. Però non lo si può adoperare a bordo di un aereo o di una nave a causa delle inevitabili accelerazioni che compaiono nei momenti di aumento della velocità, di cambiamento della rotta, in

presenza di beccheggio o rullio, ecc. In questi casi, invece del pendolo comune, si utilizza un *pendolo giroscopico* (*orizzonte artificiale*) di grande lunghezza ridotta (cfr. § 50, n.4). In assenza di accelerazioni l'asse di *un pendolo giroscopico* si dispone sulla verticale. Se un apparecchio si muove con moto accelerato allora compare una precessione che fa deviare l'asse del pendolo in senso opposto rispetto alla verticale. Però, se il periodo T della precessione è molto grande e la durata dell'accelerazione è breve rispetto a T, essendo la precessione lenta, non avrà il tempo di fare deviare notevolmente l'asse del giroscopio dal suo stato verticale (si veda il problema 3 nel § 50). Questo si nota, ad esempio, nelle virate degli apparecchi poiché la durata della virata è sempre breve rispetto al periodo T. Il pendolo giroscopico è ancor meno sensibile al rullio della nave. In effetti il periodo del rullio è sempre piccolo rispetto a T e, ancora più importante, durante il rullio l'accelerazione cambia periodicamente di segno più volte durante il tempo T. Il rullio provoca soltanto piccole oscillazioni dell'asse del pendolo giroscopico attorno alla sua posizione verticale. In modo più marcato influenzano l'asse del giroscopio un'accelerazione o una diminuzione di velocità più o meno duratura che possono provocare sensibili, anche se non tanto grandi, deviazioni dell'asse di rivoluzione del giroscopio.

5. L'applicazione più significativa del giroscopio è la *girobussola*, largamente utilizzata sulle navi. La bussola magnetica comune è soggetta all'azione di diverse perturbazioni del campo magnetico terrestre (tempeste magnetiche) che ne influenzano le indicazioni e che sono provocate dalla presenza di grandi masse di ferro sulla nave, nonché da azioni elettrodinamiche di ogni genere dovute ai complessi impianti elettrotecnici. In queste condizioni l'utilizzazione della bussola magnetica a bordo di una nave è praticamente impossibile. Il giroscopio non è soggetto a questi inconvenienti.

L'idea di utilizzare il giroscopio fu avanzata nel 1852 da Foucault che propose di servirsi di un giroscopio *a due gradi di libertà* con sospensione a cardano. Per meglio chiarire l'idea di base delle bussole giroscopiche, nonché di altri dispositivi giroscopici, ampliamo l'argomento e trattiamo il problema in modo più generale, iniziando dallo studio del comportamento di un giroscopio fissato su un supporto rotante.

6. Fissiamo l'anello esterno nella sospensione a cardano (cfr. fig. 143). Il giroscopio sarà privo di quella stabilità che avrebbe posseduto se avesse avuto tre gradi di libertà. Il motivo, come è stato dimostrato nel paragrafo precedente, è che il fissaggio dell'anello esterno toglie al giroscopio la possibilità di eseguire una precessione intorno all'asse verticale. Il grado di libertà perso può essere, in una certa misura, compensato, se si fissa l'anello esterno del cardano ad un supporto in rotazione libera intorno ad un asse verticale. Un tale fissaggio equivale semplicemente ad aumentare il momento d'inerzia dell'anello esterno. Attacchiamo un peso all'asse del giroscopio; esso provocherà una precessione intorno all'asse verticale. Questa

rotazione è trasmessa al supporto dove è fissato l'anello del cardano. Dato che il supporto possiede un proprio momento d'inerzia, la sua velocità angolare di rotazione Ω sarà più piccola della velocità angolare Ω_0 con la quale ruoterebbe il giroscopio se non fosse fisso. L'esistenza del supporto, quindi, porta a frenare la precessione dovuta al peso. Perciò il peso deve abbassarsi (si veda § 50, punti 9 e 10). Se si agisce sul supporto, aumentandone la velocità angolare di rotazione fino a che diventi uguale a Ω_0, allora in presenza della precessione il peso rimarrà ad una altezza costante. Se si fa girare il supporto a una velocità superiore a Ω_0, il peso dovrà salire finché l'asse di rivoluzione del giroscopio non si disponga in posizione verticale, nello stesso tempo la sua estremità positiva sarà puntata verso l'alto. Durante la rotazione alla velocità $\Omega < \Omega_0$ o in senso inverso alla rotazione del supporto, l'asse di rivoluzione si porterà ancora in posizione verticale, ma la sua estremità positiva sarà puntata verso il basso. Il comportamento descritto del giroscopio si giustifica col fatto che il giroscopio con il suo supporto è obbligato a ruotare intorno all'asse verticale ad una velocità angolare ω differente dalla velocità di precessione Ω_0 che esso avrebbe avuto sotto l'azione del peso. È questo che determina la deformazione di torsione dell'asse verticale $D'D$ (si veda fig. 143). La deformazione di torsione crea un momento di rotazione $\boldsymbol{M}$ parallelo allo stesso asse $D'D$. Sotto l'azione di questo momento nasce la precessione intorno all'asse orizzontale $B'B$ a causa della quale l'asse del giroscopio si mette in verticale, ascendente o discendente, a seconda della velocità o del senso di rotazione del supporto. Tale orientamento dell'asse di rivoluzione del giroscopio si osserverà anche nel caso limite in cui la massa del peso è uguale a zero, cioè quando il peso non c'è e quando $\Omega_0 = 0$. È evidente che in questo caso l'*asse di rivoluzione si dispone parallelamente all'asse di rotazione del supporto, le due rotazioni essendo del medesimo senso* (regola di Foucault). Si dice che questi assi sono *omonimi paralleli* (paralleli e del medesimo senso).

Tutto ciò è facilmente dimostrabile per mezzo di un piccolo giroscopio con sospensione a cardano. Per rendere più chiaro il disegno della figura 159 abbiamo sostituito agli anelli circolari delle cornici rettangolari. Dopo aver messo il giroscopio in rotazione intorno al suo asse di rivoluzione, facciamo ruotare colla mano la cornice esterna intorno all'asse verticale. L'asse del giroscopio assumerà una posizione verticale tale da permettere che la rotazione della cornice e quella del giroscopio intorno al suo asse di rivoluzione siano del medesimo senso. Se si fa ruotare la cornice in senso contrario, allora si assiste al « capovolgimento » del giroscopio, cioè alla rotazione dell'asse di rivoluzione di 180° intorno all'asse verticale $A'A$. Quindi le due rotazioni avverranno di nuovo nel medesimo senso. Il capovolgimento del giroscopio avrà luogo ogni volta che cambierà il senso di rotazione della cornice esterna. Durante il capovolgimento del giroscopio il dimostratore risente in modo notevole dell'azione delle forze giroscopiche che cercano di farlo ruotare intorno ad un asse orizzontale perpendicolare al piano della cornice esterna.

In un'altra dimostrazione si dispone un giroscopio equilibrato con due gradi di libertà su un disco orizzontale che può ruotare intorno al suo asse verticale (fig.160). Quando si fa ruotare il disco, l'asse del giroscopio assume una posizione verticale, e se si inverte il senso di rotazione del disco, l'asse del giroscopio si capovolge.

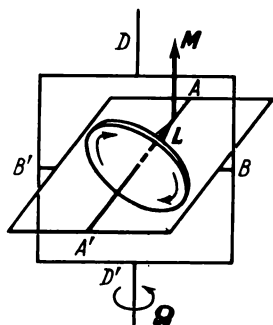
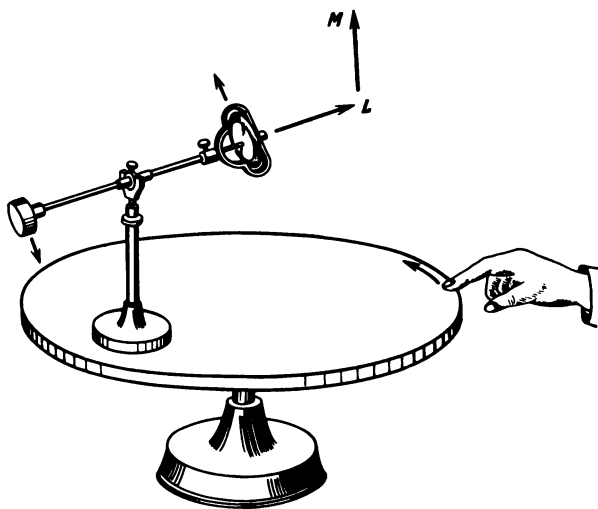



Fig. 159. Fig. 160.

7. Esaminiamo ora l'idea della bussola giroscopica avanzata da Foucault. L'anello esterno della sospensione a cardano del giroscopio può ruotare liberamente intorno all'asse verticale $D'D$ (cfr. fig.159), mentre l'anello interno è rigidamente fissato all'anello esterno in posizione ortogonale. In queste condizioni l'asse di rivoluzione $A'A$ del giroscopio è costretta a rimanere su un piano orizzontale che coincide con il piano dell'anello interno e può ruotare liberamente in questo piano intorno all'asse verticale $D'D$. Si mette il giroscopio su un supporto orizzontale che partecipa evidentemente alla rotazione completa (di 24 ore) della Terra. Sia $\boldsymbol{\Omega}$ la velocità angolare di rotazione della Terra intorno al suo asse. Scomponiamo il vettore $\boldsymbol{\Omega}$ in una componente verticale $\boldsymbol{\Omega}_v$ ed in una componente orizzontale $\boldsymbol{\Omega}_h$. La componente verticale non esercita nessuna influenza sul giroscopio poiché può ruotare liberamente intorno all'asse verticale, perciò possiamo evitare di prenderla in considerazione. La componente orizzontale $\boldsymbol{\Omega}_h$ si trova nel piano del meridiano, cioè diretta lungo la *linea meridiana.* Quindi solo la rotazione della Terra intorno alla linea meridiana rispetto al luogo considerato può influenzare il comportamento del giroscopio. Supponiamo che il piano della figura 161 coincida con il piano orizzontale. Scomponiamo il vettore $\boldsymbol{\Omega}_h$ in una componente $\boldsymbol{\Omega}_1$ lungo l'asse di rivoluzione del giroscopio e in una componente $\boldsymbol{\Omega}_2$ perpendicolare a $\boldsymbol{\Omega}_1$. La prima componente non esercita nessuna influenza sul giroscopio poiché niente si oppone alla sua rota-

zione libera intorno all'asse di rivoluzione. Rimane solo la componente Ω_2 che varia con la rotazione della Terra. Il giroscopio non può ruotare intorno all'asse Ω_2 poiché il suo asse di rivoluzione è costretto a restare sul piano orizzontale (è il piano della figura); può invece ruotare liberamente intorno al suo asse di rivoluzione ed intorno ad un asse verticale, cioè all'asse perpendicolare al piano del disegno. Quindi il caso considerato è ricondotto al caso esaminato nel punto 6 di questo paragrafo, dove però il ruolo della verticale è svolto dalla direzione del vettore Ω_2. Quindi l'asse di rivoluzione del giroscopio deve ruotare sul piano della figura nel senso della linea meridiana, cercando di coincidere in direzione e verso con l'asse del vettore Ω_2. Ma nel caso di tale rotazione la lunghezza del vettore Ω_2 diminuisce e quella del vettore Ω_1 aumenta. Quando l'asse di rivoluzione del giroscopio diventa parallelo alla linea meridiana, Ω_2 si annulla. In questa posizione l'asse di rivoluzione non subisce più l'influenza della rotazione della Terra. Conformemente alla regola di Foucault, la rotazione propria del giroscopio e la rotazione della Terra intorno alla linea meridiana devono allora avvenire nel medesimo senso.

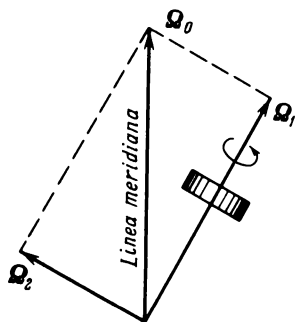
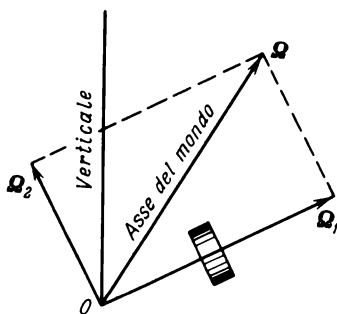



Fig. 161. Fig. 162.

Il principio di funzionamento della girobussola di Foucault può essere spiegato in altro modo. La rotazione della Terra tende a fare ruotare l'asse di rivoluzione del giroscopio intorno alla retta portante il vettore Ω_2. Ma una tale rotazione è impossibile poiché costringerebbe l'asse di rotazione del giroscopio a lasciare il piano del disegno in cui è costretto a rimanere; essa si manifesta esclusivamente con deformazioni e con la comparsa in seguito a ciò di un momento rotatorio M parallelo al vettore Ω_2. Questo momento di rotazione si trasmette al giroscopio e provoca una precessione intorno alla verticale, in seguito a ciò l'asse del giroscopio ruota verso la linea meridiana cercando di coincidere perfettamente con questa linea.

8. Foucault dimostrò anche che un giroscopio a due gradi di libertà può essere utilizzato come *inclinometro,* un dispositivo cioè che serve a determinare la latitudine geografica di un luogo. Fissiamo l'anello esterno del car-

dano del giroscopio in posizione tale che il suo piano coincida con quello del meridiano terrestre. Il giroscopio avrà due gradi di libertà e potrà ruotare intorno al suo asse di rivoluzione ed intorno (insieme con l'anello interno) all'asse orizzontale $B'B$ perpendicolare al piano del meridiano. Supponiamo che il piano della figura 161 coincida con il piano del meridiano terrestre, l'asse di rivoluzione del giroscopio può ruotare soltanto nel piano della figura intorno all'asse orizzontale $B'B$ perpendicolare a questo piano e non potrà quindi lasciare il piano della figura. Scomponiamo la velocità angolare $\mathbf{\Omega}$ della rotazione assiale della Terra in una componente $\mathbf{\Omega}_1$ lungo l'asse di rivoluzione del giroscopio ed in una componente $\mathbf{\Omega}_2$, perpendicolare alla prima. La prima componente non esercita nessuna influenza. È importante soltanto la rotazione intorno all'asse del vettore $\mathbf{\Omega}_2$. Ci troviamo nella stessa situazione del paragrafo precedente, nel punto in cui abbiamo esaminato la girobussola di Foucault; ripetendo gli stessi ragionamenti, arriviamo alla conclusione che l'asse di rivoluzione del giroscopio ruoterà in direzione dell'*asse del mondo* (cioè verso l'asse di rotazione propria della Terra). Questa rotazione sarà accompagnata dalla riduzione della lunghezza del vettore $\mathbf{\Omega}_2$. Quando l'asse del giroscopio coinciderà perfettamente con l'asse del mondo, il vettore $\mathbf{\Omega}_2$ si annullerà e la rotazione ulteriore del giroscopio dovuta alla rotazione assiale della Terra cesserà. Quindi l'asse di rivoluzione del giroscopio si dispone parallelamente all'asse del mondo e nel medesimo senso. L'angolo tra questa direzione e il piano orizzontale è la latitudine geografica del luogo in esame.

9. Né la girobussola né l'inclinometro di Foucault hanno avuto applicazione pratica. Essi servono solo per risolvere in teoria i problemi posti. In effetti, a causa della velocità relativamente moderata della rotazione della Terra intorno al suo asse, le forze dovute a questa rotazione ed applicate al giroscopio sono estremamente deboli e non possono superare (o se lo possono, con difficoltà) l'attrito dei cuscinetti di questi dispositivi. Inoltre i dispositivi suindicati potrebbero essere utilizzati solo se installati su supporti fissi (rispetto alla Terra). Essi sono inutilizzabili a bordo di navi o aerei perché durante il moto si sviluppano velocità angolari di rotazione ed accelerazioni di molte volte superiori alle grandezze corrispondenti dovute alla rotazione giornaliera della Terra.

Il problema della costruzione di una girobussola è diventato realizzabile praticamente quando si riuscì ad utilizzare giroscopi non a due, ma *a tre gradi di libertà*. Il giroscopio deve essere *astatico*, ma un giroscopio astatico a tre gradi di libertà è insensibile alla rotazione della Terra. Per superare questa difficoltà è sufficiente accoppiare al giroscopio un dispositivo sensibile all'azione della rotazione della Terra e quindi capace di agire sul giroscopio. Illustriamo questo principio usando un vecchio modello di girobussola, realizzato nel 1911 dall'americano Sperry, che si è rivelato un dispositivo di navigazione perfettamente utilizzabile. Il dispositivo ausiliario, che egli aveva utilizzato, era *un pendolo* fissato rigidamente all'anello interno

della sospensione a cardano del giroscopio. Come pendolo era utilizzata una sbarra curva Q, il cui piano era perpendicolare al piano dell'anello interno e quindi parallelo al piano del giroscopio (fig. 163). Il principio di funzionamento del dispositivo è estremamente semplice. Supponiamo che l'asse $D'D$ dell'anello esterno sia verticale e che il piano dell'anello interno contenente l'asse di rivoluzione $A'A$ del giroscopio sia orizzontale. In questa posizione nessun momento di forza può influenzare il giroscopio. Se si punta l'asse di rivoluzione $A'A$ del giroscopio in direzione di una stella, esso seguirà il suo moto. Supponiamo che l'asse di rivoluzione $A'A$ del giro-

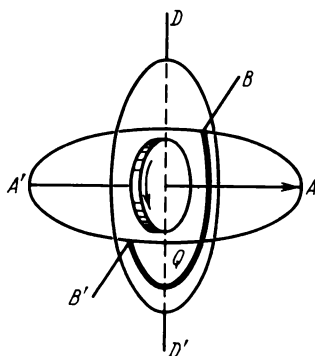
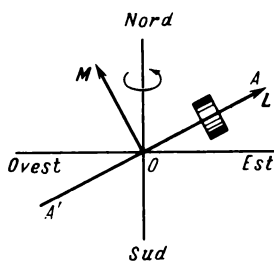



Fig. 163. Fig. 164.

scopio sia deviato dalla linea meridiana verso est, ad esempio (fig.164). Quando la stella verso la quale è puntato questo asse si muove verso l'alto, l'estremità positiva A dell'asse di rivoluzione del giroscopio seguirà il moto della stella e provocherà la rotazione intorno all'asse $B'B$ della sbarra curva Q del pendolo. Il momento M della forza di gravità dell'anello rispetto al punto O cercherà di abbassare il punto A e provocherà la precessione del giroscopio intorno all'asse verticale $D'D$; in seguito alla precessione l'asse di rivoluzione del giroscopio ruoterà verso la linea meridiana, cercando di coincidere perfettamente con questa linea. Se l'estremità positiva A dell'asse di rivoluzione è stata deviata verso ovest dalla linea meridiana, il sistema si comporterà esattamente nel medesimo modo.

10. Per concludere vediamo come costruire una monorotaia. Una vettura che si muove su una sola rotaia si trova in stato di instabilità. Per stabilizzarne il moto si può utilizzare un giroscopio massiccio a tre gradi di libertà montato nell'interno della vettura, come indicato sulla figura 165,*a*. Il ruolo di anello esterno della sospensione a cardano viene svolto dalle pareti della vettura. Supponiamo che la vettura si inclini a destra. La forza di gravità cercherà ancor più di spingere nel medesimo senso. Questa forza crea un momento di rotazione orientato verso il retro del piano della figura e parallelo all'asse longitudinale della vettura. Questo momento si trasmette

tramite i cuscinetti al giroscopio che comincia a esercitare un moto di precessione, il che provocherà un'inclinazione della cornice interna (fig.165,*b*). Se si riesce in qualche modo ad accelerare la precessione, si farà aumentare il momento di rotazione delle forze di resistenza generate da parte del giroscopio (si veda il § 50, punti 9 e 10). Il centro di gravità della vettura comincerà ad innalzarsi e la vettura riprenderà la sua posizione verticale. Questa accelerazione stimolata del moto di precessione dell'intelaia-

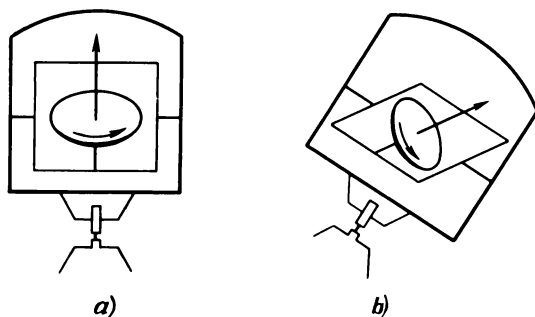



Fig. 165.

tura deve esercitarsi automaticamente. La costruzione di questo dispositivo automatico rappresenta la difficoltà principale nella realizzazione pratica dell'idea della monorotaia.

§ 52. *Fondamenti della teoria esatta del giroscopio simmetrico.*

1. La teoria esatta del giroscopio simmetrico prende in considerazione le differenze di orientamento dell'asse istantaneo di rotazione, dell'asse di rivoluzione e del momento della quantità di moto del giroscopio rispetto al suo punto di sostegno. Questa teoria è valida per tutti i valori del rapporto tra le velocità angolari $\omega_\parallel$ e $\omega_\perp$ delle rotazioni che effettua il giroscopio intorno al suo asse di rivoluzione ed intorno all'asse cui esso è ortogonale. Però gli effetti giroscopici più importanti, che ne determinano le applicazioni tecniche e scientifiche, si manifestano a condizione che $\omega_\parallel \gg \omega_\perp$.

Conduciamo dal punto O lungo il verso positivo dell'asse di rivoluzione il vettore unitario $\dot{s}$ (fig.166). Il punto estremo di questo vettore è il *vertice del giroscopio*. La derivata s ha il significato di velocità lineare del moto del vertice del giroscopio e perciò può essere rappresentata nella forma $\dot{s} = [\omega s] = [\omega_\perp s]$. I tre vettori $\dot{s}$, $\omega_\perp$ e s sono reciprocamente perpendicolari e formano un sistema destrorso come indicato sulla figura 167. È evidente

che $\omega_\perp = [s\dot{s}]$. Quindi

$$L = I_\parallel \omega_\parallel + I_\perp \omega_\perp = I_\parallel \omega_\parallel s + I_\perp [s\dot{s}]. \tag{52.1}$$

Portando questa espressione in (49.3) si ottiene

$$I_\parallel \dot{\omega}_\parallel s + I_\parallel \omega_\parallel \dot{s} + I_\perp [s\ddot{s}] = M. \tag{52.2}$$

Questa è l'equazione fondamentale della teoria esatta del giroscopio simmetrico. Per comodità, essa si suddivide in due equazioni di cui la prima si ottiene moltiplicando scalarmente l'equazione (52.2) per s. In considerazio-

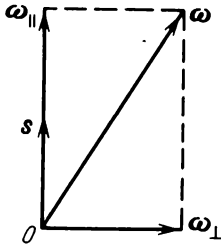
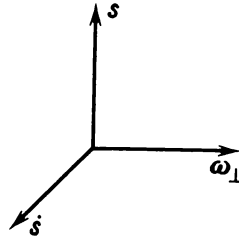



Fig. 166. Fig. 167.

ne del fatto che $(s\dot{s}) = 0$, questa moltiplicazione scalare dà

$$I_\parallel \dot{\omega}_\parallel = M_\parallel, \tag{52.3}$$

dove $M_\parallel \equiv (Ms)$ è la proiezione del vettore M sull'asse di rivoluzione del giroscopio. Si ottiene la seconda equazione ancora da (52.2) moltiplicandola vettorialmente per s. In considerazione dell'identità $[s[s\ddot{s}]] = -s^2\ddot{s} + (s\ddot{s})s =$ $= -\ddot{s} + (s\ddot{s})s$, si avrà

$$I_\parallel \omega_\parallel [s\dot{s}] - I_\perp \ddot{s} + I_\perp (s\ddot{s}) s = [sM].$$

Derivando la relazione $(s\dot{s}) = 0$, si ottiene $(s\ddot{s}) + \dot{s}^2 = 0$; in considerazione di ciò mettiamo l'equazione precedente nella forma

$$I_\perp \ddot{s} = [Ms] + I_\parallel \omega_\parallel [s\dot{s}] - I_\parallel \dot{s}^2 s. \tag{52.4}$$

2. L'equazione (52.3) caratterizza la variazione rispetto al tempo della velocità angolare di rotazione $\omega_\parallel$ del giroscopio intorno al suo asse di rivoluzione. Essa coincide con l'equazione che descrive la rotazione di un corpo solido intorno ad un asse fisso.

L'equazione (52.4) definisce l'accelerazione $\ddot{s}$ del moto del vertice del giroscopio. Scriviamola nella forma

$$I_\perp \ddot{s} = f, \tag{52.5}$$

in cui

$$f = [Ms] + I_\parallel \omega_\parallel [s\dot{s}] - I_\perp \dot{s}^2 s. \tag{52.6}$$

Per la sua forma, l'equazione (52.5) coincide con l'equazione di Newton in cui il ruolo della massa viene svolto dalla grandezza $I_\perp$ e quello della forza dal vettore $\boldsymbol{f}$. Il vertice del giroscopio si muove sulla superficie di una sfera immobile di raggio unitario $s^2 = 1$. La sua accelerazione ha per componenti l'accelerazione $(\ddot{s})_\perp$ tangenziale alla sfera e l'accelerazione radiale, o centripeta, $(\ddot{s})_\parallel = -\frac{\dot{s}^2}{s}s = -\dot{s}^2 s$, cioè $\ddot{s} = (\ddot{s})_\perp - \dot{s}^2 s$. Portando questa espressione in (52.5) vediamo che l'accelerazione centripeta si elimina e l'equazione assume la forma

$$I_\perp(\ddot{s})_\perp = [Ms] + I_\parallel\omega_\parallel[s\dot{s}]. \tag{52.7}$$

Quindi, l'equazione (52.5) o l'equazione equivalente (52.7) definiscono non l'accelerazione totale $\ddot{s}$ del vertice del giroscopio, ma soltanto la sua componente $(\ddot{s})_\perp$ tangenziale alla superficie della sfera unitaria $s^2 = 1$. Questi dati sono sufficienti a calcolare il moto del vertice del giroscopio partendo dai dati iniziali (la posizione e la velocità iniziali del giroscopio, ad esempio). In effetti il moto del vertice del giroscopio è analogo al moto di un punto materiale non libero, ma costretto a spostarsi su una superficie data.

Chiameremo talvolta *punto figurativo* il punto materiale immaginario di massa $I_\perp$ posto al vertice del giroscopio. Il secondo membro dell'equazione (52.7) può essere una certa « forza » sotto la cui azione il punto figurativo acquista una accelerazione. Il primo termine di questa « forza » è collegato all'azione delle forze reali risultanti dall'interazione del giroscopio con i corpi che lo circondano. Chiameremo questo termine *forza reale*

$$f_{\text{real}} = [Ms]. \tag{52.8}$$

In secondo termine $I_\parallel\omega_\parallel[s\dot{s}]$ non ha nessun legame con le interazioni dei corpi. È una « forza » fittizia che compare quando il giroscopio ruota intorno al suo asse di rivoluzione. Si chiama *forza di deviazione*

$$f_{\text{dev}} = I_\parallel\omega_\parallel[s\dot{s}] \tag{52.9}$$

Questa forza differisce da zero solo quando il punto figurativo è in moto ed è perpendicolare sia all'asse di rivoluzione del giroscopio che alla velocità del punto figurativo. Questa forza tende a fare deviare il vertice del giroscopio dalla sua traiettoria ed è la sua presenza che determina tutti gli effetti giroscopici caratteristici.

Quindi, si può scrivere l'equazione del moto del giroscopio simmetrico

$$I_\perp(\ddot{s})_\perp = f_{\text{real}} + f_{\text{dev}}. \tag{52.10}$$

3. La teoria approssimata del giroscopio prende in esame soltanto il moto di cui si può ignorare nell'equazione (52.10) l'accelerazione $(\ddot{s})_\perp$. In questo caso $f_{\text{real}} + f_{\text{dev}} = 0$, ossia

$$I_\parallel\omega_\parallel[s\dot{s}] + [Ms] = 0.$$

Dato che nessuno dei vettori $\dot{s}$ e M ha componenti lungo l'asse di rivoluzione, ne segue

$$I_{\|}\omega_{\|}\dot{s} = M.$$

È l'equazione fondamentale della teoria approssimata del giroscopio.

4. Si possono applicare formalmente al moto del punto figurativo, descritto dall'equazione (52.10), tutti i teoremi della meccanica del punto, come ad esempio l'equazione della conservazione dell'energia. Nello stesso tempo bisogna tenere conto che la forza di deviazione, che è perpendicolare alla velocità $\dot{s}$, non produce nessun lavoro. Solo la forza reale f_{reale} produce lavoro.

5. Sulla base dell'equazione esatta del moto del giroscopio simmetrico si può descrivere il moto di un giroscopio libero. Ma dato che i risultati che si ottengono sono già stati descritti nel §49, è sufficiente studiare nel quadro della teoria esatta la precessione stimolata e le nutazioni del giroscopio simmetrico.

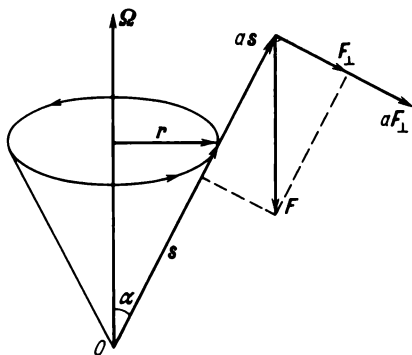



Fig. 168.

Supponiamo che la forza attiva F sia costante e che sia applicata ad uno dei punti dell'asse di rivoluzione del giroscopio (fig.168). Indichiamo con a il raggio vettore di questo punto condotto dal punto di sostegno. Se il punto di sostegno O non coincide con il centro di massa del giroscopio allora il ruolo della forza F può venire esercitato dal peso del giroscopio stesso. Il momento della forza F è uguale a $M = [aF] = [aF_{\perp}]$, dove $F_{\perp}$ è la componente della forza F perpendicolare all'asse di rivoluzione. Quindi $f_{\text{reale}} = [Ms] = [[aF_{\perp}]s] = aF_{\perp}$ poiché i vettori a ed s sono collineari. Quindi l'equazione (52.10) si scriverà

$$I_{\perp}(\ddot{s})_{\perp} = aF_{\perp} + I_{\|}\omega_{\|}[s\dot{s}]. \tag{52.11}$$

Ci si deve domandare ora se è possibile comunicare al vertice del giroscopio una velocità iniziale perché esso eserciti una precessione regolare, cioè una rotazione uniforme intorno ad un asse parallelo alla forza applica-

ta $\boldsymbol{F}$ e passante per il punto di sostegno O del giroscopio. Indichiamo con $\boldsymbol{\Omega}$ la velocità angolare di questa rotazione. Per precisare supponiamo che la forza attiva $\boldsymbol{F}$ sia il peso stesso del giroscopio: $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{g}$. Scegliamo come verso positivo del vettore $\boldsymbol{\Omega}$ il senso della verticale ascendente, cioè opposto a quello della forza $\boldsymbol{F}$ (cfr. fig.168). È facile trovare una risposta alla questione posta tramite l'equazione (52.11). A questo scopo proiettiamo l'equazione (52.11) nella direzione del vettore $\boldsymbol{F}_\perp$. Nel caso di una precessione regolare il vertice del giroscopio si muove alla velocità $\dot{\boldsymbol{s}} = [\boldsymbol{\Omega s}]$ e con accelerazione $\ddot{\boldsymbol{s}} = -\Omega^2 \boldsymbol{r}$, dove $\boldsymbol{r}$ è il raggio vettore condotto dall'asse di rivoluzione al vertice del giroscopio ($r = s \sin\alpha = \sin\alpha$, dove α è l'angolo tra la verticale e l'asse di rivoluzione del giroscopio). Calcolata la componente dell'accelerazione $\ddot{\boldsymbol{s}}$ normale all'asse di rivoluzione ed eseguita la proiezione si ottiene dopo divisione per $\sin\alpha$

$$I_\perp \Omega^2 \cos\alpha - I_\| \omega_\| \Omega + aF = 0, \tag{52.12}$$

donde

$$\Omega = \frac{I_\| \omega_\| \pm \sqrt{I_\|^2 \omega_\|^2 - 4aFI_\perp \cos\alpha}}{2I_\perp \cos\alpha} \tag{52.13}$$

Se il centro di massa del giroscopio si trova sopra il punto di sostegno l'angolo α è acuto (cfr.fig.168). Se la rotazione propria del giroscopio non è sufficientemente rapida l'espressione sotto radice nella formula (52.13) può risultare negativa. Allora la precessione regolare considerata è impossibile e la posizione del giroscopio è instabile. In generale, affinché il giroscopio sia stabile bisogna che sia soddisfatta la condizione

$$I_\|^2 \omega_\|^2 - 4aFI_\perp \cos\alpha > 0. \tag{52.14}$$

Questa condizione è sempre soddisfatta se il centro di massa del giroscopio si trova sotto il punto di sostegno. Se invece si trova sopra il punto di sostegno è necessario che la velocità di rotazione del giroscopio sia sufficientemente grande.

Supponiamo che la condizione (52.14) sia soddisfatta. Allora l'equazione di secondo grado (52.12) possiede due radici reali. In questo caso il giroscopio può avere due precessioni regolari. La precessione alla quale corrisponde la più piccola radice in valore assoluto dell'equazione (52.12) si chiama *lenta*. La precessione corrispondente all'altra radice si chiama *rapida*.

6. Supponiamo soddisfatta la condizione $I_\|^2 \omega_\|^2 \gg |4aFI_\perp \cos\alpha|$. Allora la radice nella formula (52.13) è approssimativamente uguale a

$$I_\| \omega_\| \left(1 - \frac{4aFI_\perp \cos\alpha}{I_\|^2 \omega_\|^2}\right)^{1/2} \approx I_\| \omega_\| - \frac{2aFI_\perp \cos\alpha}{I_\| \omega_\|}.$$

Si ottiene infine

$$\Omega_{\text{lent}} \approx \frac{aF}{I_{\parallel}\omega_{\parallel}}, \tag{52.15}$$

$$\Omega_{\text{rap}} \approx \frac{I_{\parallel}}{I_{\perp}\,|\cos\alpha|}\,\omega_{\parallel}. \tag{52.16}$$

La formula (52.15) coincide con la formula (50.4) della teoria approssimata. Quindi, la precessione regolare di cui si tratta nella teoria approssimata è la *precessione lenta*. Come risulta dalla formula (52.16) la velocità angolare della precessione rapida è dello stesso ordine di grandezza di $\omega_{\parallel}$ (coincide con $\omega_{\parallel}$ per ordine di grandezza). Dato che in questo caso la condizione essenziale di applicabilità della teoria approssimata $\omega_{\perp} \ll \omega_{\parallel}$ non è rispettata, la precessione rapida non può essere esaminata nel quadro della teoria approssimata. La precessione regolare del giroscopio libero, trattata nel §49, è un caso particolare della precessione rapida in cui $F=0$.

7. A evitare che il lettore rimanga con l'impressione che la precessione rapida sia un fenomeno esclusivamente immaginario, consideriamo l'esempio semplice di un pendolo conico, quando $\omega_{\parallel}=0$ e non si può parlare di effetti giroscopici. Si intende che in questo caso il centro di massa deve trovarsi sotto il punto di sospensione. Quindi conviene sostituire l'angolo α con l'angolo supplementare $\beta=\pi-\alpha$ formato dall'asse del pendolo con la verticale discendente. La formula (52.13) si riduce a

$$\Omega = \pm\sqrt{\frac{aF}{I\cos\beta}},$$

che è la formula conosciuta della pulsazione circolare del pendolo conico.

8. La precessione regolare, lenta o rapida, è un caso particolare del moto del vertice del giroscopio, che si manifesta solo per certe condizioni iniziali ben definite. Per lo studio del caso generale poniamo nell'equazione (52.7) $\dot{s} = v_{\text{p}} + v_{\text{n}}$. Definiamo il vettore v_{p} dalla condizione $[\boldsymbol{M}s] + I_{\parallel}\omega_{\parallel}[sv_{\text{p}}] = 0$. Allora si avrà $I_{\perp}(\ddot{s})_{\perp} = I_{\parallel}\omega_{\parallel}[sv_{\text{n}}]$. La grandezza v_{p} è la velocità che avrebbe il vertice del giroscopio se esercitasse una precessione regolare lenta. (La seconda componente della velocità v_{n} descriverà la nutazione). Se ignoriamo l'accelerazione di una tale precessione, allora $\ddot{s}=\dot{v}_{\text{n}}$, quindi

$$I_{\perp}\dot{v}_{\text{n}} = I_{\parallel}\omega_{\parallel}[sv_{\text{n}}]. \tag{52.17}$$

Abbiamo omesso l'indice $\perp$ prima di $\dot{v}_{\text{n}}$ poiché la componente dell'accelerazione lungo l'asse di rivoluzione del giroscopio per ora non ci interessa e si può trascurare. Considerando il secondo membro dell'equazione (52.17) una grandezza analoga ad una forza, questa forza sarà perpendicolare alla velocità v_{n}, quindi non può produrre nessun lavoro. Ne segue che il modulo della velocità v_{n} non può variare e l'equazione (52.17) descrive un moto cir-

colare uniforme. Se r è il raggio di questo cerchio e Ω_n la velocità angolare di rotazione, allora $v_n = \Omega_n r$, $|\dot{v}_n| = \Omega_n^2 r$. Dato che s e v_n sono ortogonali, si ottiene dall'equazione (52.17)

$$I_\perp \Omega_n^2 r = I_\parallel \omega_\parallel \Omega_n r,$$

quindi

$$\Omega_n = \frac{I_\parallel}{I_\perp} \omega_\parallel. \tag{52.18}$$

Quindi, nel caso generale al moto di precessione lento del vertice del giroscopio si sovrappone un moto circolare uniforme di pulsazione Ω_n definita dall'equazione (52.18). Il raggio della traiettoria circolare è uguale a $r = \frac{v_n}{\Omega_n} = \frac{v_n}{\omega_\parallel} \frac{I_\perp}{I_\parallel}$. In seguito a questa sovrapposizione di due moti, il vertice del giroscopio può descrivere una traiettoria cicloidale (fig.169,b), elicoidale (fig.169,a) o di tipo sinusoidale (fig.169,c). Ogni tipo di traiettoria si rea-

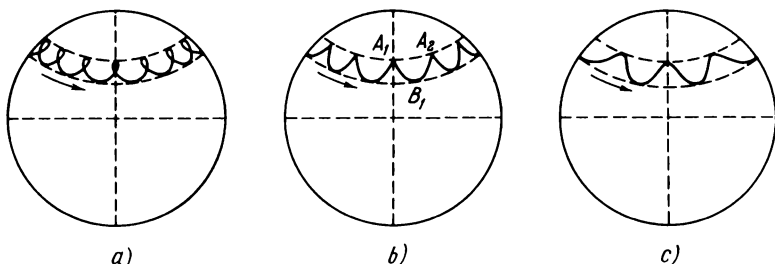



Fig. 169.

lizza, in pratica, per determinate condizioni iniziali, cioè posizione e velocità del vertice del giroscopio nell'istante iniziale. È la sovrapposizione del moto circolare alla precessione lenta che determina l'effetto di nutazione di cui è stato detto nel §50. Il raggio r del moto circolare è l'ampiezza delle oscillazioni di *nutazione*. Se $r = 0$, le nutazioni non ci saranno ed il moto del vertice sarà una precessione regolare.

Esempio. Per l'orizzonte aereo descritto nel § 50, $I_\perp = 3/5 I_\parallel$. Il numero di nutazioni per un giro di precessione è uguale a

$$N = \frac{\Omega_n}{\Omega_p} = \frac{I_\parallel \omega_\parallel}{I_\perp \Omega_p} = 4{,}77 \cdot 10^5.$$

Se la velocità iniziale del vertice del giroscopio è uguale a zero, allora $v_p + v_n = 0$, quindi $r = v_p/\Omega_n$. Ma $v_p = R\Omega_p$, dove R è il raggio della precessione. Si ha allora

$$\frac{r}{R} = \frac{\Omega_p}{\Omega_n} = \frac{1}{N} = \frac{1}{4{,}77 \cdot 10^5}.$$

Questo esempio dimostra quanto sono piccole le nutazioni nei giroscopi tecnici a grande velocità di rotazione.

9. Per concludere consideriamo come interpretare qualitativamente il carattere della traiettoria del vertice del giroscopio in presenza di nutazioni. Partiamo dall'equazione del moto del vertice (52.11). Supponiamo che nella figura 169 l'estremità positiva dell'asse di rivoluzione del giroscopio punti verso il lettore. Poniamo che nell'istante iniziale il vettore sia immobile nella posizione A_1 (cfr. fig.169, b). In quest'istante la velocità $\dot{s}$ e quindi la forza di deviazione $I_{\parallel}\omega_{\parallel}[s\dot{s}]$ sono uguali a zero. Per azione della gravità, il vertice acquista una velocità indirizzata verso il basso. Simultaneamente compare anche una forza di deviazione laterale che comincia a far ruotare la traiettoria del vertice a sinistra (a sinistra se, con i piedi sul piano della figura, si ha nel senso del moto del vertice). In posizione B_1 la velocità del vertice diventa orizzontale e la forza di deviazione verticale. Dato che il modulo di questa forza è superiore a quello del peso, il vertice del giroscopio comincia ad elevarsi. Nella posizione superiore A_2 la velocità del vertice si annulla. Questo risultato deriva direttamente dall'equazione dell'energia, che regola, del tutto formalmente, il moto del vertice. In seguito il moto si riproduce continuamente. Si ottiene così una traiettoria di tipo cicloidale. La traiettoria elicoidale (fig.169, a) compare se nell'istante iniziale si imprime al vertice una velocità di senso opposto a quello della precessione. Se invece la velocità iniziale è nel senso della precessione si ottiene una traiettoria di tipo sinusoidale (fig.169, c). In quest'ultimo caso si può scegliere una velocità tale da far comparire una precessione regolare senza nutazioni.

§ 53. *Tensore e ellissoide d'inerzia*

1. Calcoliamo il momento d'inerzia I di un corpo solido rispetto ad un asse qualunque OA (fig.170). Senza perdere in generalità si può supporre che l'asse passi per l'origine delle coordinate O. Indichiamo le coordinate sia con x, y, z, che con x_1, x_2, x_3. Quindi $x_1 \equiv x$, $x_2 \equiv y$, $x_3 \equiv z$. Scomponiamo il raggio vettore $\boldsymbol{r}$ di un elemento di massa dm del corpo solido nelle sue componenti lungo l'asse OA e lungo una direzione ortogonale $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_{\parallel} + \boldsymbol{r}_{\perp}$. Per definizione, il momento d'inerzia è

$$I = \int r_{\perp}^2 dm = \int (r^2 - r_{\parallel}^2) dm.$$

Se $\boldsymbol{s}$ è il vettore unitario lungo l'asse OA si ha $r_{\parallel} = (\boldsymbol{rs}) = xs_x + ys_y + zs_z$. Inoltre $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$. Tenuto conto sia di queste relazioni che della relazione $s_x^2 + s_y^2 + s_z^2 = 1$, si ottiene

$$I = I_{xx}s_x^2 + I_{yy}s_y^2 + I_{zz}s_z^2 + 2I_{xy}s_xs_y + 2I_{yz}s_ys_z + 2I_{zx}s_zs_x, \tag{53.1}$$

dove I_{xx}, I_{yy}, I_{zz}, $I_{xy} \equiv I_{yx}$, $I_{yz} \equiv I_{zy}$, $I_{zx} \equiv I_{xz}$ sono delle costanti definite dalle espressioni

$$I_{xx} = \int (y^2 + z^2) dm, \quad I_{xy} \equiv I_{yx} = -\int xy \, dm,$$

$$I_{yy} = \int (z^2 + x^2) dm, \quad I_{yz} \equiv I_{zy} = -\int yz \, dm, \tag{53.2}$$

$$I_{zz} = \int (x^2 + y^2) dm, \quad I_{zx} \equiv I_{xz} = -\int zx \, dm.$$

Indichiamo queste costanti anche con i simboli I_{11}, I_{22}, ... I_{13}. Le quantità I_{xx}, I_{yy}, I_{zz} hanno evidentemente il significato dei momenti d'inerzia del corpo rispetto agli assi di coordinate *X, Y, Z* rispettivamente. L'insieme delle

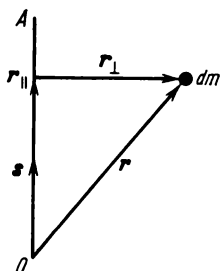



Fig. 170.

nove quantità

$$\begin{matrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{matrix} \tag{53.3}$$

si chiama *tensore d'inerzia del corpo rispetto al punto O* e le quantità stesse si chiamano *componenti di questo tensore.* [1] Il *tensore d'inerzia è simmetrico,* cioè $I_{ij} = I_{ji}$. Per definirlo è sufficiente quindi conoscere *sei* componenti. La formula (53.1) può essere espressa in forma succinta e simmetrica

$$I = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} I_{ij} s_i s_j. \tag{53.4}$$

Conosciute le sei componenti del tensore d'inerzia in un sistema di coordinate, si può calcolare secondo la formula (53.1) o (53.4) il momento

[1] In generale, si chiama tensore un insieme ordinato di nove numeri definito rispetto ad un sistema di coordinate; a seguito di una rotazione degli assi delle coordinate, questi numeri si trasformano come i prodotti delle componenti di due vettori.

d'inerzia di un corpo rispetto ad un asse qualunque passante per l'origine delle coordinate O. Il momento d'inerzia rispetto ad ogni altro asse che non passa per l'origine delle coordinate si può calcolare applicando il teorema di Huygens-Steiner.

2. La formula (53.4) si presta ad un'interpretazione geometrica evidente. Facciamo passare per l'origine delle coordinate O delle rette divergenti e riportiamo su ciascuna di queste rette dei segmenti di lunghezza $r = 1/\sqrt{I}$. Il luogo geometrico delle estremità di questi segmenti di retta è una certa superficie. Cerchiamo l'equazione di questa superficie. Conformemente alla costruzione adottata il raggio vettore di un punto di questa superficie è definito dall'espressione $\mathbf{r} = \mathbf{s}/\sqrt{I}$ e le coordinate di questo punto $-x_i = s_i/\sqrt{I}$. Eliminando per mezzo di queste relazioni le quantità s_i che figurano nella formula (53.4) si ottiene l'equazione della superficie cercata

$$\sum \sum I_{ij} x_i x_j = 1. \qquad (53.5)$$

Questa superficie di secondo grado è evidentemente un ellissoide, poiché il momento d'inerzia I ed inoltre la lunghezza del raggio vettore r hanno valori finiti, qualunque sia la direzione dell'asse $\mathbf{s}$. Essa si chiama *ellissiode d'inerzia* del corpo rispetto al punto O che è il centro del corpo. Se si sposta l'origine delle coordinate O rispetto al corpo, l'ellissoide d'inerzia deve cambiare. Se come O si prende il centro di massa del corpo, l'ellissoide corrispondente si chiamerà ellissoide *centrale d'inerzia.*

3. Come tutti i tensori, il tensore d'inerzia dipende dalla scelta dell'origine delle coordinate e dalle direzioni degli assi di coordinate. In caso di variazione del sistema di coordinate variano anche i valori delle componenti del tensore d'inerzia del corpo. È importante notare però che, qualunque sia il sistema di coordinate, si riesce sempre a determinare le sei componenti del tensore d'inerzia, ad esempio con la formula (53.2). In particolare si possono orientare gli assi di coordinate lungo gli assi principali dell'ellissoide d'inerzia. In questo sistema di coordinate i termini della formula (53.5) in cui figurano i prodotti delle coordinate si eliminano e l'equazione può essere scritta nella forma

$$I_x x^2 + I_y y^2 + I_z z^2 = 1 \qquad (53.6)$$

ossia

$$\sum I_i x_i^2 = 1. \qquad (53.7)$$

Il tensore d'inerzia si riduce alla forma *diagonale*

$$\begin{matrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{matrix} \qquad (53.8)$$

Gli *elementi diagonali* del tensore sono indicati per mezzo di un solo indice. In secondo indice nel sistema di assi principali dell'ellissoide è omesso poiché superfluo.

Quindi, *per ogni corpo solido, ovunque sia stata fissata l'origine delle coordinate O, esistono tre assi reciprocamente perpendicolari che coincidono con gli assi principali dell'ellissoide d'inerzia del corpo rispetto all'origine O per i quali gli elementi non diagonali del tensore d'inerzia di annullano.* Questi assi si chiamano *assi principali del tensore d'inerzia.* È evidente che questi assi sono rigidamente legati al corpo, come pure l'ellissoide d'inerzia. Se è conosciuta la posizione dell'ellisoide d'inerzia, sarà immediatamente nota la posizione dell'intero corpo. Quindi il problema della rotazione di un corpo solido intorno ad un punto fisso si riduce al problema della rotazione del suo ellissoide d'inerzia intorno a questo stesso punto. Ne approfittò Poinsot (1777-1859) per dare un'interpretazione geometrica della rotazione di un corpo solido intorno ad un punto fisso. Questa interpretazione sarà esposta nel paragrafo seguente. Gli assi principali dell'ellissoide centrale d'inerzia si chiamano *assi principali del corpo stesso.*

Le orientazioni degli assi principali di un corpo possono spesso essere determinate attraverso considerazioni di simmetria. Così gli assi principali di un parallelepipedo retto omogeneo sono paralleli ai suoi bordi. Se il corpo possiede una simmetria di rivoluzione intorno ad un asse, anche il suo ellissoide d'inerzia possiederà la stessa simmetria. È il caso del cilindro, ad esempio; i momenti d'inerzia di un corpo cilindrico rispetto a tutti gli assi perpendicolari all'asse di simmetria sono uguali. L'asse di simmetria è uno dei principali assi del corpo considerato. Ogni retta perpendicolare a quest'asse sarà anche asse principale del corpo. Quindi esiste una quantità infinita di triade di assi principali reciprocamente perpendicolari al corpo che hanno per asse comune l'asse di simmetria del corpo. Per una sfera gli ellisoidi d'inerzia rispetto a tutti gli assi che passano per il centro della sfera sono uguali ed ogni asse sarà *asse principale del corpo.*

Nello studio della dinamica dei moti di rotazione di un corpo solido è importante la simmetria non del corpo stesso ma dell'ellissoide d'inerzia corrispondente. Tutti i corpi aventi i medesimi ellissoidi d'inerzia sono *dinamicamente equivalenti.* Perché l'ellissoide d'inerzia possieda simmetria di rotazione non è necessario che il corpo stesso possieda la medesima simmetria. Consideriamo, ad esempio, un parallelepipedo omogeneo a base quadrata e poniamo l'origine delle coordinate O in un punto qualunque del suo asse geometrico. È facile dimostrare che l'ellissoide d'inerzia sarà ellisoide di rivoluzione il cui asse di simmetria coincide con l'asse geometrica del parallelepipedo. Dal punto di vista della dinamica, il moto di un tale parallelepipedo viene descritto dalle stesse equazioni del moto del cilindro omogeneo. Se il parallelepipedo diventa un cubo e l'origine delle coordinate è posta nel suo centro, l'ellissoide d'inerzia sarà una sfera. Dal punto di vista della dinamica un cubo omogeneo si comporta come una sfera omogenea.

4. Supponiamo ora che un corpo solido ruoti uniformemente intorno ad un asse fisso, ad esempio intorno ad un asse fissato con cuscinetti fissi, che sottopongono il corpo all'azione di forze. Siano queste le sole forze esterne che agiscono sul corpo. La risultante di queste forze $\boldsymbol{F}$ si ottiene mediante il teorema del moto del centro di massa. Essa è uguale a

$$\boldsymbol{F} = -m\omega^2 \boldsymbol{r}_C,$$

dove $\boldsymbol{r}_C$ è il raggio vettore del centro di massa, condotto dall'asse perpendicolarmente ad essa. Il momento delle forze esterne rispetto all'origine delle coordinate è

$$\boldsymbol{M} = -\int [\boldsymbol{r}\omega^2 \boldsymbol{r}_\perp]dm = \omega^2\int[\boldsymbol{r}_\perp \boldsymbol{r}_\parallel]dm.$$

Supponiamo che l'asse di rotazione coincida con l'asse di coordinate X, allora $\boldsymbol{r}_\parallel = x\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{r}_\perp = y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$. Poiché $[\boldsymbol{ij}]=\boldsymbol{k}$, $[\boldsymbol{ik}]=-\boldsymbol{j}$, si ottiene

$$\boldsymbol{M} = \omega^2\boldsymbol{j}\int zx\, dm - \omega^2\boldsymbol{k}\int xy\, dm,$$

ossia

$$\boldsymbol{M} = \omega^2(I_{xy}\boldsymbol{k} - I_{zx}\boldsymbol{j}).$$

Sopprimiamo i cuscinetti e domandiamoci in quali condizioni il moto del corpo non si modifica, cioè resta una rotazione intorno allo stesso asse X. Per questo bisogna che $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{M}=0$. Quindi, l'asse di rotazione deve passare per il centro di massa del corpo e, oltre a ciò, deve essere $I_{zx}=I_{xy}=0$. L'ultima condizione significa che l'asse di rotazione deve essere uno degli assi principali del corpo. Le condizioni poste sono sufficienti. Questo risultato deriva dal fatto che, essendo soddisfatte le condizioni, la soppressione dei cuscinetti non modifica né l'equazione del moto del centro di massa né l'equazione dei momenti rispetto al centro di massa. Le stesse equazioni, date le condizioni iniziali, descrivono univocamente il moto del corpo solido.

5. Dunque, *esistono in ogni corpo solido tre assi reciprocamente perpendicolari che coincidono con gli assi principali dell'ellissoide d'inerzia centrale del corpo, intorno ai quali il corpo può ruotare senza intervento di forze esterne*. Tali assi si chiamano *assi di rotazione libera* o *assi permanenti di rotazione*. Con l'ultima definizione si vuole sottolineare che in assenza di perturbazioni la rotazione per inerzia di un corpo solido può durare un tempo infinito. E inoltre questa rotazione sarà stabile rispetto a piccole perturbazioni inevitabili in condizioni reali. Se in presenza di piccole perturbazioni il moto del corpo non subisce che leggere modifiche, cioè l'asse istantaneo di rotazione, benché si sposti nel corpo e nello spazio incessantemente, passa sempre vicino all'asse libero corrispondente, la rotazione del corpo intorno a quest'asse sarà *stabile*. Se invece una perturbazione trascurabile modifica sensibilmente il moto del corpo, cioè sposta l'asse istantaneo lontano dalla sua posizione d'origine di rotazione, allora questa rotazione del corpo si chiama *instabile*. Sarà dimostrato nel paragrafo seguente

che la *rotazione intorno all'asse con momento d'inerzia massimo o minimo è stabile, mentre la rotazione intorno ad un asse con un valore intermedio del momento d'inerzia è instabile.* Per illustrare questo enunciato si può prendere una scatola di cartone rettangolare in cui i tre bordi siano di lunghezze differenti. L'asse con il più grande momento d'inerzia sarà evidentemente parallelo al bordo più corto e l'asse con il più piccolo momento d'inerzia sarà parallelo al bordo più lungo, l'asse con il valore intermedio del momento d'inerzia corrisponde al bordo di lunghezza media. Si getta la scatola in aria comunicandole una rotazione rapida intorno ad uno di questi assi. Durante il volo l'asse di rotazione si conserva se corrisponde al più grande o al più piccolo valore del moto d'inerzia. Se invece la rotazione avviene intorno all'asse con momento d'inerzia intermedio, l'asse istantaneo di rotazione varia costantemente durante il volo della scatola e si allontana sensibilmente dalla sua posizione d'origine nel corpo. Il moto della scatola assume allora un carattere complesso e irregolare.

6. Supponiamo ora che il corpo solido sia in rotazione intorno ad un asse fisso o ad un asse istantaneo OA con una velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ costante o variabile. Calcoliamo il suo momento della quantità di moto $\boldsymbol{L}$ rispetto all'origine delle coordinate O, nonché la sua energia cinetica K. Per definizione

$$\boldsymbol{L} = \int [\boldsymbol{r}\boldsymbol{v}]dm.$$

Introduciamo $\boldsymbol{v} = [\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{r}]$ ed utilizziamo la relazione $[\boldsymbol{r}[\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{r}]] = r^2\boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{r})\boldsymbol{r}$. Si otterrà allora

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{\omega}\int r^2 dm - \int (\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{r})\boldsymbol{r}dm.$$

Proiettando sugli assi coordinati questa relazione, si ottiene

$$\begin{aligned} L_x &= L_{xx}\omega_x + L_{xy}\omega_y + L_{xz}\omega_z, \\ L_y &= L_{yx}\omega_x + L_{yy}\omega_y + L_{yz}\omega_z, \\ L_z &= L_{zx}\omega_x + L_{zy}\omega_y + L_{zz}\omega_z, \end{aligned} \tag{53.9}$$

ossia, più succintamente

$$L_i = \sum_{j=1}^{3} I_{ij}\omega_j \quad (i = 1, 2, 3). \tag{53.10}$$

Quindi le *componenti del vettore momento della quantità di moto sono funzioni lineari omogenee delle componenti del vettore velocità angolare.* Nel sistema di assi principali le formule (53.9) si semplificano ed assumono la forma

$$L_x = I_x\omega_x, \quad L_y = I_y\omega_y, \quad L_z = I_z\omega_z. \tag{53.11}$$

Le formule dimostrano chiaramente che nel caso generale le direzioni dei vettori L e ω non coincidono. L'energia cinetica del corpo solido in rotazione è facile da ottenere tramite la formula (47.2). Essa è uguale a

$$K = \frac{1}{2}(L\omega) = \frac{1}{2} \sum \sum I_{ij}\omega_i\omega_j. \tag{53.12}$$

§ 54. *Rotazione per inerzia di un solido intorno ad un punto fisso.*

1. Poinsot ha dato un' interpretazione semplice ed evidente della rotazione per inerzia d'un corpo solido intorno ad un punto di sostegno fisso O. Si attacca al corpo solido il suo ellissoide d'inerzia centrato nel punto di sostegno O. Il moto reale del corpo è sostituito dal moto di questo ellissoide (si veda il paragrafo precedente, punto 3). L'interpretazione di Poinsot si basa su tre teoremi che vogliamo dimostrare. Per maggiore concisione chiameremo *polo* il punto d'intersezione P dell'asse istantaneo con la superficie dell'ellissoide d'inerzia.

Teorema 1. *Il raggio vettore che congiunge il punto di sostegno O al polo P è proporzionale alla velocità angolare istantanea di rotazione del corpo.*

Per la dimostrazione partiamo dall'equazione dell'energia $\sum \sum I_{ij}\omega_i\omega_j = 2K =$ cost. Prendiamo sull'asse istantaneo un punto Q di raggio vettore $r = \frac{\omega}{\sqrt{2K}}$. Dall'equazione dell'energia si ricava allora che le coordinate del punto Q devono soddisfare l'equazione $\sum \sum I_{ij}x_ix_j = 1$. Questo significa che il punto Q si trova sulla superficie dell'ellissoide d'inerzia. Dato che si trova anche sull'asse istantaneo esso coincide col polo P. Dunque, il raggio vettore del polo P è collegato al vettore velocità angolare ω tramite la relazione $\omega = \sqrt{2K}r$, ciò che dimostra il teorema.

Teorema 2. *Il piano tangente all'ellissoide d'inerzia nel punto in cui si trova il polo P è perpendicolare al vettore momento della quantità di moto L del corpo rispetto al punto di sostegno O.*

Per la dimostrazione si può utilizzare l'equazione dell'ellissoide d'inerzia in un qualsiasi sistema di coordinate. Ma è più semplice utilizzare l'equazione di questa superficie in rapporto al sistema di assi principali dell'ellissoide, cioè $I_xx^2 + I_yy^2 + I_zz^2 = 1$. Indichiamo il primo membro di questa equazione con $F(x, y, z)$, cioè scriviamo l'equazione nella forma $F(x, y, z) = 1$. Abbiamo dimostrato nel paragrafo 29 (punto 3) che il vettore

$$N = \frac{\partial F}{\partial x}i + \frac{\partial F}{\partial y}j + \frac{\partial F}{\partial z}k \equiv \text{grad } F,$$

è orientato lungo la normale alla superficie dell'ellissoide. In altre parole, il vettore N è perpendicolare al piano tangente di cui si tratta nel teorema. Esso è uguale a

$$N = 2(I_x xi + I_y yj + I_z zk).$$

Partendo dal primo teorema, si può scrivere

$$N = \mu(I_x \omega_x i + I_y \omega_y j + I_z \omega_z k),$$

cioè

$$N = \mu L,$$

dove μ è uno scalare. Questa relazione dimostra il teorema.

Dato che non ci sono momenti di forze esterne rispetto al punto di sostegno O il vettore L non varia nel tempo. Perciò non cambierà il suo orientamento neanche il piano tangente all'ellissoide d'inerzia di cui si tratta nel teorema.

Teorema 3. *La lunghezza della perpendicolare abbassata dal punto di sostegno O sul piano tangente all'ellisoide d'inerzia nel punto in cui si trova il polo P non varia rispetto al tempo.*

Per dimostrare il teorema utilizziamo l'equazione dell'energia sotto la forma $(L\omega) = 2K = \text{cost}$. Ovvero $L\omega_L = 2K = \text{cost}$, dove ω_L è la proiezione del vettore ω sulla direzione invariabile del vettore L. Dato che le grandezze L e K sono costanti, anche la proiezione ω_L è costante. Però come è stato dimostrato nel teorema 1, questa proiezione è collegata alla lunghezza r_L della perpendicolare mediante la relazione $\omega_L = \sqrt{2K} r_L$. Quindi, anche la lunghezza r_L è costante, come si voleva dimostrare.

Dal teorema dimostrato segue che il *piano tangente all'equazione d'inerzia nel punto in cui si trova il polo è invariabile sia come orientamento che come posizione nello spazio.* Perciò questo piano è chiamato *piano invariabile.*

2. L'interpretazione di Poinsot è ora pressoché evidente. Collegato al corpo mobile il suo ellissoide d'inerzia centrato al punto di sostegno O conduciamo in un istante qualunque il piano tangente nel polo P all'ellissoide d'inerzia. Secondo i teoremi 2 e 3 questo piano sarà invariabile. Nel polo P non si può essere scivolamento tra l'ellissoide d'inerzia ed il piano tangente poiché proprio in questo punto passa l'asse istantaneo di rotazione del corpo. Se si fa rotolare senza scivolamento l'ellissoide d'inerzia del corpo sul piano invariabile con una velocità angolare proporzionale al raggio vettore del punto di contatto (cioè del polo), conformemente al teorema 1, viene riprodotta (a cadenza accelerata o rallentata) la rotazione del corpo solido collegato all'ellissoide d'inerzia.

3. Il polo P si trova simultaneamente sull'ellissoide d'inerzia e sul piano invariabile. Per rendere più evidente la questione supponiamo che il piano invariabile sia, ad esempio, coperto di fuliggine. Durante il rotolamento dell'ellissoide d'inerzia sulla superficie dell'ellissoide e sul piano invariabile

rimarranno delle tracce che indicano per quali punti è passato il polo. La curva descritta dal polo sulla superficie dell'ellissoide d'inerzia si chiama *polodia.* La curva piana descritta dallo stesso polo sul piano invariabile si chiama *gerpolodia.* Se l'ellissoide d'inerzia ha un punto di contatto con il piano invariabile, dopo un certo tempo lo stesso punto dell'ellissoide sarà ancora in contatto con il piano invariabile, ma in un altro punto di questo piano. In altre parole, il polo sulla superficie dell'ellissoide d'inerzia ritorna alla sua posizione di partenza. Ciò dimostra che la *polodia è una curva chiusa,* mentre la gerpolodia, in generale, *non lo è.*

Collegando i punti della polodia e i punti della gerpolodia ai punti di sostegno O, si ottengono due superficie coniche. Una delle superfici è rigidamente collegata al corpo in rotazione. Essa si chiama *cono di polodia.* L'altra superficie, che è immobile nello spazio, è il *cono di gerpolodia.* Queste due superfici sono in contatto lungo una retta che coincide con l'asse istantaneo di rotazione. Perciò tra di loro non c'è scivolamento. Il *moto del corpo può essere considerato come un rotolamento senza scivolamento del cono di polodia sul cono fisso di gerpolodia con una velocità angolare proporzionale al raggio vettore condotto dal punto di sostegno al polo.* Questa interpretazione, anch'essa di Poinsot, si distingue dalla precedente solo per i termini usati.

4. Supponiamo che un corpo solido libero ruoti intorno ad un asse principale dell'ellissoide centrale d'inerzia. Nell'interpretazione di Poinsot l'ellissoide d'inerzia si appoggerà su un piano invariabile con uno dei suoi vertici e l'asse principale corrispondente sarà perpendicolare a questo piano. La polodia e la gerpolodia diventeranno punti coincidenti col polo P. Ne segue che la rotazione intorno ad un asse principale dell'ellissoide centrale d'inerzia può durare un tempo indefinito. Ciò coincide con l'enunciato dimostrato qui sopra secondo cui gli assi principali dell'ellissoide centrale d'inerzia sono assi di rotazione liberi.

5. Basandosi sulla seconda interpretazione di Poinsot, è possibile precisare intorno a quali assi liberi la rotazione è stabile ed intorno a quali è instabile. La soluzione di questo problema consiste nel trovare l'equazione del cono di polodia rispetto al sistema di coordinate collegate al corpo. Scegliamo come tale il sistema di assi principali. Siano X l'asse con il più grande momento d'inerzia e Z l'asse con il più piccolo momento d'inerzia. Ciò equivale a porre

$$I_x > I_y > I_z. \tag{54.1}$$

In ogni istante il moto del corpo è una rotazione intorno ad un asse istantaneo. Durante la rotazione l'energia cinetica del corpo si conserva:

$$I_x\omega_x^2 + I_y\omega_y^2 + I_z\omega_z^2 = 2K = \text{cost}. \tag{54.2}$$

Oltre a ciò si conserva il momento della quantità di moto

$$\boldsymbol{L} = I_x\omega_x\boldsymbol{i} + I_y\omega_y\boldsymbol{j} + I_z\omega_z\boldsymbol{k}.$$

Elevando al quadrato, si ottiene

$$I_x^2\omega_x^2 + I_y^2\omega_y^2 + I_z^2\omega_z^2 = L^2 = \text{cost.} \tag{54.3}$$

Moltiplicando l'equazione (54.2) per $h^2 \equiv L^2/(2K)$ e sottraendola dall'equazione (54.3) si ottiene l'equazione omogenea

$$I_x(I_x - h^2)\omega_x^2 + I_y(I_y - h^2)\omega_y^2 + I_z(I_z - h^2)\omega_z^2 = 0 \tag{54.4}$$

alla quale devono soddisfare le componenti del vettore velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$. L'equazione dell'asse istantaneo si può scrivere nella forma $\boldsymbol{r} = \rho\boldsymbol{\omega}$, dove ρ è un parametro variabile che può assumere qualunque valore. Ricavandone ω_x, ω_y, ω_z, ed introducendo i valori ottenuti nell'equazione precedente (54.4) si ottiene che le coordinate dei punti dell'asse istantaneo devono soddisfare l'equazione omogenea di secondo grado

$$I_x(I_x - h^2)x^2 + I_y(I_y - h^2)y^2 + I_z(I_z - h^2)z^2 = 0. \tag{54.5}$$

Questo significa che l'asse istantaneo di rotazione si trova sulla superficie (54.5), che è una superficie conica di secondo grado. Questo cono è precisamente il cono di polodia poiché per definizione esso è il luogo delle posizioni successive dell'asse istantaneo nel corpo.

6. La forma del cono di polodia (54.5) dipende dal valore del parametro $h^2 \equiv L^2/(2K)$. È evidente che i coefficienti dell'equazione (54.5) non possono avere tutti lo stesso segno, perché in questo caso l'equazione non sarebbe soddisfatta per valori reali di x, y, z. Ne segue che $I_x - h^2 > 0$. In effetti, se $I_x - h^2$ fosse minore di zero, in virtù della condizione (54.1) le quantità $I_y - h^2$ e $I_z - h^2$ sarebbero a maggior ragione minori di zero, cioè tutti e tre i coefficienti dell'equazione (54.5) sarebbero negativi. Ma questo, come abbiamo dimostrato, è impossibile. Allora non ci possono essere che due casi:

$$\text{caso 1: } (I_y - h^2) > 0, \quad (I_z - h^2) < 0;$$

$$\text{caso 2: } (I_y - h^2) < 0, \quad (I_z - h^2) < 0.$$

Nel primo caso l'equazione (54.5) è della forma $Ax^2 + By^2 - Cz^2 = 0$, dove A, B, C sono delle costanti positive tali che $A > B > C$. La sezione del cono di polodia con il piano $z = a = \text{cost}$ è una ellisse $Ax^2 + By^2 = Ca^2$, perciò il cono di polodia contiene l'asse Z del più piccolo momento d'inerzia. Invece la sezione del cono con i piani $x = \text{cost}$ e $y = \text{cost}$ è di forma iperbolica.

Nel secondo caso l'equazione del cono di polodia è della forma $Ax^2 - By^2 - Cz^2 = 0$, dove le costanti A, B, C sono tutte positive. La sezione del cono con il piano $x = \text{cost}$ è un'ellisse. Le sezioni con i piani $y = \text{cost}$ e $z = \text{cost}$ formano delle iperboli.

Quindi a seconda del valore del parametro h *il cono di polodia contiene in un caso l'asse del più grande momento d'inerzia, nell'altro l'asse del più piccolo momento d'inerzia, ma esso non contiene mai l'asse corrispondente ad un valore intermedio del momento d'inerzia.*

7. Ora è facile risolvere il problema della stabilità della rotazione intorno agli assi liberi. Se il corpo ruota per inerzia intorno ad un asse libero, questo moto sarà deformato da una eventuale perturbazione. Una volta cessata la perturbazione l'asse istantaneo comincia a descrivere nel corpo un cono di polodia. Se la rotazione avviene intorno ad un asse con il più piccolo o con il più grande momento d'inerzia, e la perturbazione è piccola, cessata questa perturbazione, si forma un cono di polodia di piccola apertura intorno all'asse di rotazione. Descrivendo questo cono l'asse istantaneo passerà sempre in prossimità dell'asse libero intorno al quale il corpo è stato inizialmente messo in rotazione. Ne risulta che la rotazione intorno a quest'asse è stabile. Se invece il corpo è stato inizialmente messo in rotazione intorno ad un asse con momento d'inerzia intermedio, in seguito ad una perturbazione compare un cono di polodia di grande apertura all'interno del quale si trova l'asse con il più grande o con il più piccolo momento d'inerzia. Descrivendo questo cono l'asse istantaneo si allontanerà assai dalla sua direzione d'origine. Quindi la rotazione intorno all'asse libero del momento d'inerzia intermedio è instabile.

8. Se i momenti d'inerzia rispetto a due assi principali, X ed Y, ad esempio, coincidono tra di loro ($I_x = I_y$), l'ellissoide d'inerzia ed il cono di polodia assumeranno una simmetria di rotazione rispetto all'asse Z. Il cono di polodia sarà descritto dall'equazione $A(x^2+y^2) - Cz^2 = 0$, dove A e C sono costanti positivi. La sezione di questo cono con un piano perpendicolare all'asse Z sarà circolare, mentre le sezioni con piani paralleli a quest'asse saranno iperboliche. Il cono di polodia quindi comprende l'asse Z. La rotazione intorno a quest'asse sarà stabile, invece la rotazione intorno ad un asse perpendicolare a Z sarà instabile. Infatti se il corpo è stato posto in rotazione intorno all'asse X, ad esempio, ed è stato sottoposto ad una perturbazione, allora, cessata questa perturbazione, l'asse istantaneo comincia a descrivere un cono di polodia intorno all'asse Z. Se la perturbazione è piccola, il cono sarà di grande apertura e le sue generatrici saranno inclinate rispetto all'asse di simmetria Z di un angolo vicino a 90°. Percorrendo un tale cono l'asse istantaneo di rotazione si allontanerà assai dalla sua posizione d'origine nel corpo, ma per tutto il tempo sarà pressoché perpendicolare all'asse Z. Qualunque retta perpendicolare all'asse e passante per il centro di massa del corpo può servire da asse di rotazione permanente.

Quando i momenti d'inerzia I_x, I_y, I_z coincidono tra loro, i coefficienti dell'equazione (54.5) si annullano. Questo significa che ogni asse che passa per il centro di massa del corpo può essere un asse di rotazione libero.

VIII. GRAVITAZIONE

§ 55. *Leggi di Keplero e legge di gravitazione universale*

1. In seguito ad un laborioso studio durato molti anni sulle osservazioni dell'astronomo danese Ticho Brahe (1546-1601), Keplero (1571-1630) ha empiricamente stabilito le tre leggi dei moti planetari, formulandole nel modo seguente:

1) *ogni pianeta descrive un'ellisse di cui il Sole occupa uno dei fuochi;*

2) *le aree spazzate dai raggi vettori, congiungenti un pianeta al Sole, sono proporzionali ai tempi impiegati a coprirle;*

3) *i quadrati dei tempi di rivoluzione dei pianeti sono proporzionali ai cubi degli assi maggiori delle loro orbite.*

Le prime due leggi furono pubblicate da Keplero nel 1609 e la terza nel 1619. Le *leggi di Keplero* permisero a Newton di giungere alla scoperta della *legge della gravitazione universale.*

Dalla prima legge di Keplero deriva che la traiettoria di un pianeta è una curva piana. Tenendo conto di ciò, come è stato dimostrato nel § 31, dalla seconda legge segue che la forza che costringe il pianeta a ruotare lungo orbite chiuse è orientata verso il Sole. Calcoliamo ora come varia questa forza a seconda della variazione della distanza dal Sole e della massa del pianeta. Per semplificare i calcoli ammettiamo dapprima che il pianeta ruoti non lungo un'ellisse ma lungo un cerchio al cui centro si trova il Sole. Per i pianeti del sistema solare tale approssimazione non è troppo grossolana, poiché le ellissi su cui infatti ruotano i pianeti si differenziano assai poco dai cerchi. L'accelerazione del moto uniforme su un'orbita circolare di raggio r si esprime tramite la formula

$$a_r = -\omega^2 r = -\frac{4\pi^2}{T^2}r.$$

Per i pianeti che ruotano lungo traiettorie circolari, la terza legge di Keplero si scrive

$$T_1^2 : T_2^2 : T_3^2 : \ldots = r_1^3 : r_2^3 : r_3^3 : \ldots,$$

ossia

$$\frac{r^3}{T^2} = \mathcal{K},$$

dove $\mathscr{K}$ è una costante per tutti i pianeti del sistema solare chiamata appunto costante di Keplero. In funzione dei parametri dell'orbita ellittica la *costante di Keplero* si esprime con la formula

$$\mathscr{K} = \frac{a^3}{T^2}, \tag{55.1}$$

dove a è la lunghezza del semiasse maggiore dell'orbita.

Esprimendo T in funzione di $\mathscr{K}$ ed r, si ottiene per l'accelerazione del moto sull'orbita circolare la formula

$$a_r = -\frac{4\pi^2\mathscr{K}}{r^2}. \tag{55.2}$$

La forza che agisce sul pianeta è uguale a

$$F = -\frac{4\pi^2\mathscr{K}m}{r^2}, \tag{55.3}$$

dove m è la massa del pianeta.

Abbiamo dimostrato in questo modo che le accelerazioni di due diversi pianeti in rivoluzione attorno al Sole su orbite circolari sono inversamente proporzionali ai quadrati delle loro distanze dal Sole. Ma non abbiamo ancora dimostrato che una tale legge è valida per un unico pianeta in rivoluzione attorno al Sole su un'orbita ellittica. Per dimostrare ciò, bisogna sostituire alle orbite circolari quelle ellittiche, cosa che faremo nel paragrafo seguente. Ma volendo limitarci alle orbite circolari possiamo avanzare una supposizione supplementare secondo cui la forza di interazione tra il Sole e il pianeta dipende soltanto dalla distanza istantanea tra di loro, ma non dipende dalla forma della traiettoria del pianeta. Allora le formule (55.2) e (55.3) possono essere applicate sia ai diversi pianeti in rivoluzione su orbite circolari a diverse distanze del Sole sia alle diverse posizioni di un unico pianeta in rotazione su di una traiettoria ellittica.

2. Il coefficiente di proporzionalità $4\pi^2\mathscr{K}$ che figura nelle formule (55.2) e (55.3) è il medesimo per tutti i pianeti e non può quindi dipendere dalla loro massa. Esso può però dipendere dai parametri che caratterizzano il Sole, poiché il Sole è la sorgente delle forze che impongono ai pianeti il moto su orbite chiuse. Ma il Sole ed un qualsiasi pianeta si comportano nella loro interazione *nello stesso modo.* La differenza tra di loro è solo di carattere puramente quantitativo, dato che si distinguono l'uno dall'altro per la loro massa. Se la forza d'interazione F è proporzionale alla massa m del pianeta, essa deve essere proporzionale anche alla massa M del Sole. Per questa forza, quindi, si può scrivere la formula

$$F = G\frac{Mm}{r^2}, \tag{55.4}$$

dove G è una nuova costante che non dipende né dalla massa del Sole né dalla massa del pianeta. Paragonando la formula (55.4) con la (55.3) si ottiene la seguente espressione per la costante di Keplero:

$$\mathcal{K} \equiv \frac{a^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2}. \qquad (55.5)$$

3. Il Sole ed i pianeti si distinguono tra di loro e dagli altri corpi soltanto *quantitativamente,* cioè per le loro masse. Perciò è logico supporre che esista una mutua attrazione non soltanto tra il Sole ed i pianeti del sistema solare, ma anche tra i pianeti stessi nonché tra ogni altro corpo; questa forza di attrazione è definita dalla formula (55.4) in cui M e m rappresentano le masse dei corpi in interazione. Questa ipotesi è stata enunciata da Newton e confermata dall'esperienza. Newton ha elaborato la legge della gravitazione universale secondo cui *corpi qualsiasi (o due punti materiali) si attraggono mutuamente con forza proporzionale al prodotto delle masse e inversamente proporzionale al quadrato della loro distanza.* Tali forze si chiamano *gravitazionali* o *forze di gravitazione universale.* Il coefficiente di proporzionalità G, che figura nella formula (55.4), è il medesimo per tutti i corpi. È una delle più importanti costanti universali, detta *costante gravitazionale.*

La formulazione qui riportata della legge di gravitazione universale suppone che i corpi in interazione siano *puntiformi.* Fisicamente ciò significa che le dimensioni dei corpi sono molto piccole rispetto alla distanza che li separa. Qui come sempre in fisica, gli aggettivi «grande» e «piccolo» sono usati in un senso relativo: grande o piccolo *rispetto a qualcos'altro.* La condizione enunciata è soddisfatta nell'interazione del Sole con i pianeti, nella mutua interazione dei pianeti o dei pianeti con i loro satelliti. Ma se si tratta dell'attrazione gravitazionale di due corpi di 10 cm, la cui distanza tra i centri di massa è di 20 cm, ad esempio, questi corpi non possono essere considerati puntiformi. Per calcolare la loro interazione gravitazionale, si deve suddividere mentalmente ciascun corpo in parti molto piccole, calcolare attraverso la formula (55.4) le forze di attrazione tra queste minime parti e poi sommare geometricamente queste forze (quindi integrare). Alla base di questo calcolo c'è il *principio di sovrapposizione dei campi gravitazionali.* Secondo questo principio, il *campo gravitazionale generato da una massa data non dipende assolutamente dalla presenza di altre masse.* Oltre a ciò, il *campo gravitazionale generato da alcuni corpi è uguale alla somma geometrica dei campi gravitazionali generati da ognuno di questi corpi separatamente.* Questo principio si ricava dalla generalizzazione dei dati sperimentali.

Utilizzando il principio di sovrapposizione è facile dimostrare che *due sfere omogenee si attraggono come se le loro masse fossero concentrate nei centri rispettivi* (si vedano i problemi 2, 3, 4 di questo paragrafo).

Osserveremo ancora che ciascun pianeta è sottoposto non soltanto all'attrazione gravitazionale del Sole, ma anche a quella degli altri corpi del sistema solare. La massa del Sole tuttavia è molto superiore a tutte le altre; è 700 volte più grande della massa totale dei pianeti e di tutti gli altri corpi del sistema solare. Per questo il Sole è il corpo principale che governa i moti dei pianeti. La legge di Keplero può essere dedotta dalla legge di gravitazione universale di Newton (cfr. § 62). Si suppone, quindi, che ad agire su di un dato pianeta, ci sia solo la forza di attrazione gravitazionale del Sole. Perciò le *leggi di Keplero sono approssimate* e non tengono conto dell'influsso gravitazionale degli altri corpi del sistema solare.

4. Ai tempi di Newton la legge di gravitazione universale era confermata soltanto dalle osservazioni astronomiche sui moti dei pianeti e dei loro

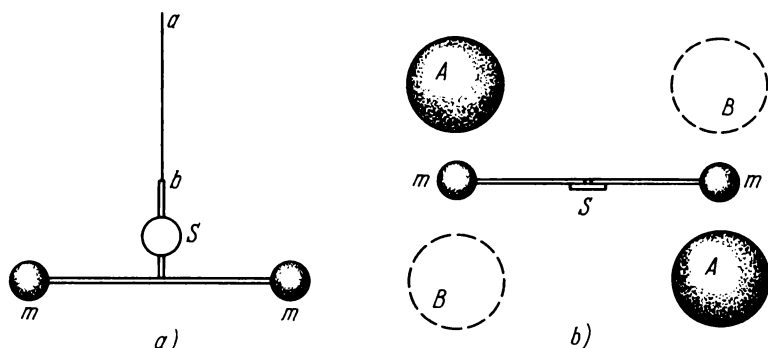



Fig. 171.

satelliti. La prima prova sperimentale diretta di questa legge applicata ai corpi terrestri, nonché il valore numerico della costante gravitazionale G, furono forniti dal fisico inglese H. Cavendish (1731-1810) nel 1798. Il dispositivo di Cavendish consisteva in un leggero bilanciere orizzontale alle cui estremità si fissavano due identiche palline di piombo di massa m. Il bilanciere era sospeso ad un filo sottile ab (fig. 171,a). Vicino alle palline di piombo erano sistemate due grandi palle di piombo identiche di massa M con $M \gg m$. Le grandi palle erano prima disposte nella posizione AA, poi venivano spostate nella posizione BB (fig. 171,b). *Grazie all'interazione gravitazionale delle palline m con le palle M* il bilanciere spostandosi dalla sua posizione di equilibrio ruotava di un certo angolo. L'angolo di torsione α veniva misurato segnando la posizione d'un raggio luminoso riflesso dallo specchio S. Se r è la distanza tra i centri della palla piccola e di quella grande, l la lunghezza dell'asta del bilanciere, allora il momento della coppia delle forze gravitazionali che fanno ruotare il bilanciere sarà $G\dfrac{Mm}{r^2}l$.

Nella posizione di equilibrio questo momento rotante deve essere bilanciato dal momento elastico $f\alpha$ del filo in torsione. Qualora si voglia scrivere la

condizione di equilibrio prima per la posizione AA ($\alpha = \alpha_1$), poi per la posizione BB ($\alpha = \alpha_2$) delle palle di piombo, si ottengono due equazioni

$$f\alpha_1 = G\frac{Mm}{r^2}l, \quad f\alpha_2 = -G\frac{Mm}{r^2}l.$$

Ne deriva

$$f(\alpha_1 - \alpha_2) = 2G\frac{Mm}{r^2}l.$$

È facile determinare il modulo di torsione f, osservando il periodo di oscillazione libera del bilanciere

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{f}} = 2\pi\sqrt{\frac{ml^2}{2f}}.$$

In fine si ottiene

$$G = \frac{lr^2}{M}\left(\frac{\pi}{T}\right)^2(\alpha_1 - \alpha_2).$$

5. Un altro metodo per determinare la costante gravitazionale è stato proposto da Jolly (1809-1884) nel 1878. Ad una estremità dell'asta di un bilanciere si sospendono due piattini sovrapposti tra i quali è stato messo un corpo di piombo immobile di massa M e di forma geometrica regolare (fig. 172). Questo corpo è attraversato da un foro verticale per cui passa senza

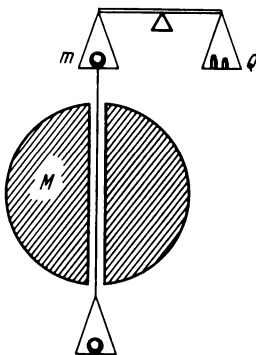



Fig. 172.

difficoltà un filo di ferro che collega i due piattini. Se si pone sul piattino superiore un corpo di massa m, il corpo sarà sottoposto all'azione della forza diretta verso il basso $Q_1 = mg + F$, dove F è una forza di attrazione gravitazionale tra le masse M e m. Essa è uguale a $F = kG\frac{Mm}{r^2}$, dove r è la distanza tra i centri delle masse in esame, k il coefficiente numerico il cui valore dipende dalla forma del corpo M. Per i corpi di forme geometriche

regolari si può calcolarlo teoricamente. Per una sfera $k = 1$. Se si porta la massa m nella posizione inferiore, la forza F cambierà di senso. La forza diretta verso il basso diventerà $Q_2 = mg - F$. I valori Q_1 e Q_2 sono determinati dal valore del peso da posare sul piattino sospeso all'altra estremità dell'asta per riportare il bilanciere in equilibrio. Quindi

$$Q_1 - Q_2 = 2F = 2kG\frac{Mm}{r^2}.$$

Da questa relazione si può dedurre il valore di G.

6. Le misurazioni di G con metodi moderni hanno fornito il seguente risultato

$$G = (6{,}6732 \pm 0{,}0031) \cdot 10^{-8} \text{dine} \cdot \text{cm}^2 \cdot \text{g}^{-2} = $$
$$= (6{,}6732 \pm 0{,}0031) \cdot 10^{-11} \text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}.$$

La costante gravitazionale, come si vede, è piccola. Per questo le interazioni gravitazionali tra corpi ordinari, anche se giudicate comunemente grandi, sono molto deboli. È facile calcolare che due corpi puntiformi identici con una massa di 1 kg ciascuno che si trovino alla distanza di 1 m l'uno dall'altro si attraggono con una forza $F = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$N $= 6{,}67 \cdot 10^{-6}$ dine. Le forze gravitazionali, quando si tratta di interazione tra *particelle elementari,* sono trascurabili. In questo caso queste forze non hanno probabilmente nessun ruolo poiché sono infinitesimali rispetto a tutte le altre *forze fondamentali* (si veda il problema 1 di questo paragrafo). Ma le forze gravitazionali sono le *principali forze* che governano i moti dei corpi celesti, le cui masse sono molto grandi. In quest'ultimo caso le forze *nucleari* che pure sono le più intense, non si manifestano, perché il loro raggio d'azione è soltanto dell'ordine di 10^{-13} cm. Le *forze elettriche,* così come le forze di gravitazione universale, sono forze *a lunga distanza* che decrescono in modo inversamente proporzionale al quadrato della distanza. Ma le prime non esercitano nessuna influenza sul moto dei corpi astronomici, perché possono essere sia forze di attrazione che di repulsione. Tutti i corpi macroscopici sono *elettricamente neutri* poiché l'azione delle cariche positive del corpo è compensata da un'azione uguale ed opposta delle cariche negative. Le forze gravitazionali invece sono sempre *forze d'attrazione,* quindi i campi gravitazionali dei corpi si addizionano e non si sottraggono mai. Ragione per cui tra tutte le forze fondamentali, quelle gravitazionali sono le *uniche forze* che governano il moto dei corpi astronomici.

7. Newton si era limitato a constatare la presenza delle forze gravitazionali e a darne una descrizione quantitativa. Ma si era astenuto da qualsiasi considerazione a proposito della loro natura fisica, ritenendo giustamente che a quei tempi pronunciarsi in merito non sarebbe stato altro che fantasticare. Dopo Newton numerosi tentativi sono stati fatti per dare una spiegazione fisica oggettiva della natura dell'attrazione gravitazionale. Questi tentativi non hanno ormai nessun valore scientifico né storico. La teoria

della gravitazione ha trovato ulteriore sviluppo nella *teoria della relatività generale* di Einstein. Anche Einstein non dà un'interpretazione fisica oggettiva della gravitazione, ma la descrive in modo nuovo come *generalizzazione della legge di gravitazione newtoniana.*

Il rifiuto da parte di Newton di dare una spiegazione della natura della gravitazione riconducendola ad altri fenomeni fisici fu interpretato dai suoi discepoli e sostenitori come concezione generale della *fisica dell'azione diretta a distanza.* Questa concezione non soltanto considera la gravitazione una proprietà inerente alla materia, ma anzi ritiene che ciascun corpo possieda la capacità di influenzare direttamente gli altri corpi, che si trovano in punti diversi dello spazio, e ciò senza alcun intervento di mezzi intermedi o di altri agenti fisici.

La scienza moderna respinge la concezione dell'azione diretta a distanza. Oggi la fisica ritiene, che *tutte le interazioni si realizzino per mezzo di campi.* Senza pretendere di presentare oggettivamente il meccanismo di azione del campo, essa attribuisce al campo soltanto la proprietà di esistere oggettivamente e la capacità di trasmettere interazioni. Un corpo A non agisce direttamente su un corpo B. Esso crea intorno a sè un campo gravitazionale ed è questo campo che esercita un'azione su di un altro corpo B manifestandosi sotto forma di forza che agisce su di esso.

Problemi

1. Calcolare il rapporto della forza d'attrazione gravitazionale che si esercita tra due elettroni (e due protoni) rispetto alla forza della loro repulsione elettrostatica.

Risposta. $\frac{F_{gr}}{F_{el}} = \frac{Gm^2}{e^2}$, dove $e = 4{,}8 \cdot 10^{-10}$ unità CGSE è la carica elementare. Portando nella formula la massa dell'elettrone $m_e = 9{,}11 \cdot 10^{-28}$g e la massa del protone $m_p = 1{,}67 \cdot 10^{-24}$g, si ottiene per l'elettrone $F_{gr}/F_{el} = 2{,}4 \cdot 10^{-43}$ e per il protone $F_{gr}/F_{el} = 8 \cdot 10^{-37}$.

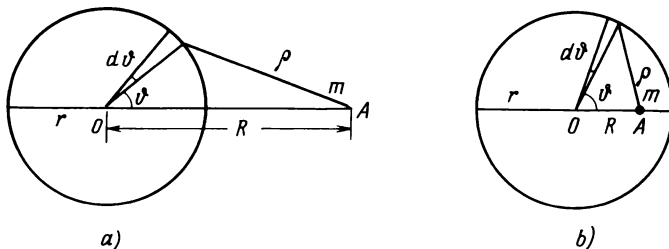



Fig. 173.

2. Determinare l'energia potenziale e la forza d'attrazione gravitazionale tra una sfera cava omogenea di massa M e un punto materiale di massa m.

Soluzione. L'energia potenziale d'interazione di due masse puntiformi è determinata dalla formula (25.6). Colleghiamo con una retta il centro O della sfera e il punto A in cui è posta la massa puntuale m (fig. 173, *a* e *b*). Dal punto O preso come vertice disegnamo due coni circo-

lari aventi per asse comune la retta OA e le cui generatrici formino con quest'asse gli angoli ϑ e $\vartheta + d\vartheta$. Questi coni ritagliano sulla superficie della sfera una zona sferica elementare di area $dS = 2\pi r^2 \sin\vartheta d\vartheta$, dove r è il raggio della sfera. La massa di questa zona è $dM = M\frac{dS}{4\pi r^2} = \frac{M}{2}\sin\vartheta d\vartheta$. Dato che tutti i punti della zona sono equidistanti dal punto A, l'energia potenziale di interazione gravitazionale della zona e della massa puntuale m è uguale a

$$dU = -G\frac{Mm}{2}\sin\vartheta d\vartheta.$$

Introduciamo una nuova variabile ρ che è la distanza tra la massa puntuale m ed un punto della zona sferica. Questa variabile è collegata con ϑ tramite la relazione $\rho^2 = R^2 + r^2 - 2Rr\cos\vartheta$, dove R è la distanza OA tra il centro della sfera e la massa puntuale m. Spostandosi lungo la superficie della sfera le grandezze R ed r rimangono costanti e perciò

$$\rho d\rho = Rr\sin\vartheta d\vartheta,$$

e quindi

$$dU = -G\frac{Mm}{2Rr}d\rho, \quad U = -G\frac{Mm}{2Rr}\int_{\rho_{min}}^{\rho_{mass}} d\rho.$$

Se il punto A si trova fuori della sfera, i valori massimi e minimi ρ sono rispettivamente $\rho_{mass} = R + r$ e $\rho_{min} = R - r$. In questo caso l'integrazione fornisce il risultato

$$U = -G\frac{Mm}{R}. \tag{55.6}$$

L'*energia potenziale ha lo stesso valore che avrebbe se tutta la massa della sfera fosse concentrata in un solo punto, proprio al centro della sfera.* Questo risultato è valido anche per la forza di interazione F. Infatti, secondo (29.3) la forza F è determinata dalla formula

$$F = -\frac{dU}{dR} = -G\frac{Mm}{R^2}.$$

Si può dire che la *sfera attrae un punto materiale come se tutta la massa fosse concentrata* nel suo centro. In altre parole, la massa puntiforme attrae la sfera come se l'intera massa della sfera fosse concentrata nel centro.

Qualora invece il punto A si trovi all'interno di una cavità sferica (fig. 173, *b*), si ha $\rho_{mass} = r + R$, $\rho_{min} = r - R$ e l'integrazione dà

$$U = -G\frac{Mm}{r}. \tag{55.7}$$

Ai bordi della cavità le espressioni (55.6) e (55.7) coincidono. Secondo la (55.7), l'*energia potenziale del punto materiale all'interno della cavità non dipende da R, ma è costante. La forza F che agisce sul punto materiale in questo caso è uguale a zero,* poiché $U =$ cost, quindi $F = -\frac{dU}{dR} = 0$.

3. Dimostrare che *due sfere cave omogenee si attraggono tra di loro come se le rispettive masse fossero concentrate al centro.*

Dimostrazione. Come risulta dal problema precedente il campo gravitazionale della prima sfera non varierà qualora si concentri tutta la massa di questa sfera al centro. Perciò non cambierà la forza con la quale questo campo agisce sulla seconda sfera. Quindi il problema si riduce al calcolo della forza con la quale una massa puntiforme agisce su una sfera. Nel precedente problema è stato dimostrato che questa forza non cambia anche nel caso in cui la massa della seconda sfera si concentri al centro. E la dimostrazione è fatta.

4. Dimostrare che *due sfere omogenee si attraggono tra di loro come se la massa di ogni sfera fosse concentrata al centro delle medesime.* Dimostrare anche che se all'interno di una sfera omogenea esiste una cavità sferica, il cui centro coincida con il centro della sfera, il campo gravitazionale all'interno di questa sfera è uguale a zero. Dimostrare che questi risultati sono validi anche per sfere con massa distribuita in strati concentrici, cioè quando la densità ρ in ciascuna sfera dipende soltanto dalla distanza dal centro.

5. Calcolare l'intensità del campo gravitazionale, cioè la forza che agisce sull'unità di massa, all'interno e all'esterno, di una sfera di raggio R, riempita di sostanza con densità costante ρ.

Soluzione. All'esterno della sfera il campo è uguale a $g = G\frac{M}{r^2}$, dove M è la massa della sfera. Per calcolare il campo di un punto A, che si trova all'interno della sfera ad una distanza r dal centro (fig. 174), conduciamo per questo punto una superficie sferica ausiliare col mede-

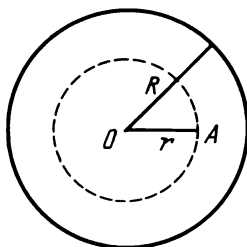



Fig. 174.

simo centro O. La sostanza della sfera che si trova all'esterno della superficie sferica ausiliare non influenza il campo all'interno della superficie sferica ausiliare, cioè non influisce sul campo nel punto A. Il campo gravitazionale nel punto A è creato soltanto dalla sostanza che si trova all'interno della superficie sferica ausiliare. Questo campo è uguale a $G\frac{m}{r^2}$, dove m è la massa della sostanza limitata dalla superficie sferica ausiliare. Quindi

$$g = \begin{cases} G\frac{M}{r^2} = \frac{4\pi G}{3}\frac{R^3}{r^2}\rho, \text{ se } r \geqslant R, \\ G\frac{m}{r^2} = \frac{4\pi}{3}G\rho r, \text{ se } r \leqslant R. \end{cases} \qquad (55.8)$$

Con $r = R$ ambedue le espressioni coincidono.

6. Calcolare l'energia gravitazionale U di una sfera di raggio R uniformemente riempita di una sostanza di densità ρ.

Soluzione. L'energia gravitazionale della sfera è l'energia potenziale determinata dalle forze di gravità, che agiscono tra tutti i punti materiali in cui possiamo suddividere mentalmente la sfera. Essa è uguale al lavoro, cambiato di segno, che devono esercitare le forze esterne per disperdere all'infinito la sostanza della sfera, quando ogni particella di sostanza sia stata trasportata all'infinito. Questo lavoro non dipende dal procedimento utilizzato per far passare la sostanza della sfera dal suo stato iniziale a quello finale. Perciò per calcolarlo si può procedere nel modo seguente. Suddividiamo mentalmente la sfera in strati concentrici infinitamente sottili e trasportiamoli successivamente all'infinito, a cominciare dallo strato esterno. In un punto qualunque di uno dato strato l'intensità del campo gravitazionale creato dalla sostanza esterna rispetto a questo strato è uguale a zero. Il campo è creato soltanto dalla sostanza circondata dallo strato considerato. Se m è la massa di questa sostanza e dm la massa dello stra-

to, il lavoro impiegato per allontanare questo strato all'infinito è uguale a $dA = G\dfrac{mdm}{r}$.

Ma per una sfera omogenea si ha $m = M\left(\dfrac{r}{R}\right)^3$, dove M è la massa di tutta la sfera.

Quindi $dA = 3G\dfrac{M^2}{R^6}r^4dr$. Dato che $dA = -dU$, integrando si ottiene

$$U = -3\frac{GM^2}{R^6}\int_0^R r^4dr = -\frac{3}{5}\frac{GM^2}{R}. \tag{55.9}$$

Abbiamo scelto come zero dell'energia potenziale l'energia della sfera nello stato disperso all'infinito.

Un certo interesse presentano le applicazioni astrofisiche della formula (55.9). I fisici studiavano da tempo il problema delle sorgenti d'energia, emanata dal Sole e dalle stelle. Nel XIX° secolo Helmholtz (1821-1894) e William Thomson (1824-1907) avevano avanzato l'ipotesi secondo cui il Sole è incessantemente compresso sotto l'azione delle forze gravitazionali. Il calore liberato da questa compressione alimenta la radiazione solare. L'energia massima che può essere liberata con la compressione gravitazionale del Sole corrisponde allo stadio iniziale in cui la sostanza del Sole era uniformemente dispersa in uno spazio infinito. Ammettiamo che nello stadio finale la densità della sostanza solare sia uguale in tutto il suo volume. In realtà essa aumenta man mano che ci si avvicina al centro del Sole. Ma ai nostri fini la supposizione avanzata non comporta un errore troppo grave. Accettandola si può utilizzare la formula (55.9), dove la massa del Sole è $M = 2\cdot 10^{33}$ g, il raggio $R = 7\cdot 10^{10}$ cm. Con questi valori si ottiene per l'energia liberata la formula

$$E = \frac{3}{5}\frac{GM^2}{R} = 2{,}28\cdot 10^{48}\text{ erg}.$$

Attualmente il tasso di emissione dell'energia solare è uguale a $3{,}86\cdot 10^{33}$ erg/s. Presupponendo che questa quantità sia rimasta costante nel tempo (ipotesi valida per una stima grossolana) risulta che l'età del Sole è di

$$t \approx \frac{2{,}28\cdot 10^{48}}{3{,}86\cdot 10^{33}} = 5{,}9\cdot 10^{14}\text{ s} \approx 1{,}9\cdot 10^7\text{ anni}.$$

Se si corregge questo risultato tenendo conto della distribuzione della densità della sostanza solare corrispondente ai modelli in vigore, l'età t crescerà fino a $6\cdot 10^7$ anni. Ma questa grandezza è ancora troppo piccola. Secondo stime geologiche, l'età della Terra è di 4—4,5$\cdot 10^9$ anni circa. L'età del Sole non è certo minore. Questo significa che la contrazione gravitazionale è una sorgente d'energia troppo piccola per compensare le perdite di energia solare per radiazione. In realtà la sorgente dell'energia solare come pure dell'energia emanata dalle stelle è costituita dalle reazioni nucleari che avvengono nelle profondità solari, il cui risultato finale è la trasformazione dell'idrogeno in elio. Si deve, però, osservare che la contrazione gravitazionale diventa la principale sorgente di energia negli ulteriori stadi evolutivi delle stelle (nane bianche, stelle neutroniche, pulsar, quasar e «buchi neri»).

7. In una sfera omogenea continua, la cui materia è di densità ρ, si crea una cavità sferica il cui centro O_1 è spostato rispetto al centro O della sfera (fig. 175). Si calcoli il campo gravitazionale all'interno di questa cavità.

Soluzione. Immaginiamo che la cavità sia riempita di una sostanza, la cui densità è uguale alla densità della sfera. Allora il campo gravitazionale g che dobbiamo calcolare sarà uguale alla differenza dei campi gravitazionali di due sfere continue con i centri rispettivamente O e O_1. Il punto di osservazione A si trova all'interno di entrambe le sfere. Perciò, utilizzando la

formula (55.8), si può scrivere la formula

$$g = -\frac{4\pi}{3}G\rho r - \left(-\frac{4\pi}{3}G\rho r_1\right) = -\frac{4\pi}{3}G\rho \boldsymbol{R},$$

dove $\boldsymbol{R}$ è il raggio vettore condotto dal centro O della sfera al centro O_1 della cavità. Questo campo è omogeneo, ha, cioè, medesimo modulo e senso in tutti i punti della cavità.

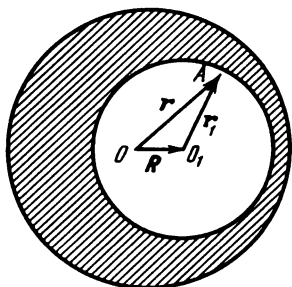



Fig. 175.

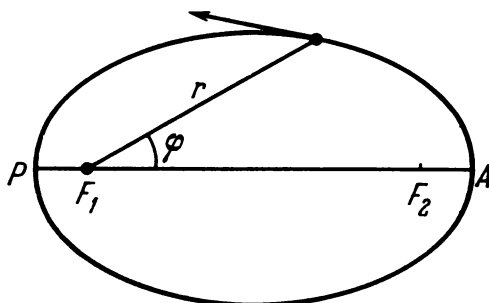



Fig. 176.

§ 56. *Accelerazione dei pianeti e delle comete in moto su traiettorie chiuse ed aperte*

1. Nel paragrafo precedente alle orbite ellittiche sono state sostituite quelle circolari con l'unico scopo di semplificare i calcoli. Consideriamo ora il problema in modo più rigoroso senza volerlo semplificare. I nostri calcoli saranno applicabili non soltanto ai *pianeti,* ma anche alle *comete.* Come dimostrano le osservazioni compiute, le comete si muovono lungo *iperboli* e *parabole* aventi per fuoco il Sole e il loro moto risponde alla seconda legge di Keplero. È evidente che per i moti iperbolici e parabolici la terza legge di Keplero non è valida, quindi non serve a calcolare l'accelerazione dei pianeti e delle comete. È vero tuttavia che, per una traiettoria data, la seconda legge di Keplero permette di calcolare la velocità del pianeta o della cometa lungo questa traiettoria ed è più che sufficiente a descrivere il moto di un corpo, ad indicarne, cioè, la posizione e la velocità in ogni istante. Tenendo ben presente quanto si è appena detto, si può calcolare l'accelerazione di un corpo in ogni punto della sua traiettoria. Riportiamo questo calcolo che è molto semplice.

2. Utilizziamo un sistema di coordinate polari con il polo nel fuoco F_1, (quello occupato dal Sole) e con l'asse polare PA diretto lungo l'asse maggiore dell'ellisse o dell'iperbole (fig. 176). Decomponiamo l'accelerazione del corpo mobile in una componente radiale a_r diretta lungo il raggio r ed in una azimutale a_φ perpendicolare al raggio. Esse sono determinate dalle

espressioni

$$a_r = \ddot{r} - \varphi^2 r, \quad a_\varphi = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\varphi) \tag{56.1}$$

(cfr. § 46). La grandezza

$$\sigma = \frac{1}{2} r^2\dot{\varphi} \tag{56.2}$$

è la velocità arcolare, cioè l'area descritta nell'unità di tempo dal raggio vettore del pianeta o della cometa. In virtù della seconda legge di Keplero, la velocità arcolare è costante e perciò $a_\varphi = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(2\sigma) = 0$. Quindi, l'accelerazione del corpo celeste in esame non possiede una componente azimutale, punta, cioè, verso il Sole. Questo risultato è stato già ottenuto con un altro procedimento nel § 31.

Per determinare l'accelerazione radiale a_r si devono calcolare le derivate $\ddot{r}$ e $\dot{\varphi}$. La derivata $\dot{\varphi}$ è data dalla formula (56.2). Per calcolare la derivata $\ddot{r}$ utilizziamo l'equazione dell'elisse in coordinate polari

$$r(1 - e\cos\varphi) = p, \tag{56.3}$$

dove p ed e sono costanti di cui la prima si chiama *parametro dell'ellisse* e la seconda *eccentricità dell'ellisse*. Senza perdere in generalità entrambe le costanti si possono considerare non negative. Per l'ellisse $e < 1$, per la parabola $e = 1$, per l'iperbole $e > 1$. Nei casi limite $e = 0$ ed $e = \infty$ si ottiene un cerchio ed una retta. Derivando l'equazione (56.3) rispetto al tempo, si ottiene

$$\dot{r}(1 - e\cos\varphi) + er\dot{\varphi}\sin\varphi = 0,$$

da cui, dopo moltiplicazione per r e tenuto conto delle relazioni (56.2) e (56.3)

$$p\dot{r} + 2e\sigma\sin\varphi = 0.$$

Derivando ancora una volta

$$p\ddot{r} + 2\sigma e\cos\varphi\cdot\dot{\varphi} = 0.$$

Sostituendo $\dot{\varphi} = \frac{2\sigma}{r^2}$, e $\cos\varphi = 1 - \frac{p}{r}$, si ottiene

$$\ddot{r} = -\frac{4\sigma^2}{pr^2} + \frac{4\sigma^2}{r^3} = -\frac{4\sigma^2}{pr^2} + \dot{\varphi}^2 r.$$

Si deduce allora dalla prima formula (56.1)

$$a_r = -\frac{4\sigma^2}{pr^2}. \tag{56.4}$$

Dalle due prime leggi di Keplero deriva quindi che l'accelerazione di un pianeta o di una cometa è inversamente proporzionale al quadrato della sua distanza dal Sole.

3. La terza legge di Keplero permette di dimostrare che il coefficiente di proporzionalità $4\sigma^2/p$ ha lo stesso valore per tutti i pianeti. Dimostriamolo. L'area dell'ellisse è uguale a πab, dove a è la lunghezza del semiasse maggiore e b del semiasse minore. Dato che la velocità arcolare σ è costante, $\sigma = \pi ab/T$, dove T è il periodo di rivoluzione del pianeta lungo la sua orbita. Se utilizziamo ancora la formula della geometria analitica $p = b^2/a$, allora dalla formula (56.4) deriva

$$a_r = -\frac{4\pi^2 a^3}{T^2}\frac{1}{r^2}. \tag{56.5}$$

(Per il moto circolare uniforme questa formula si riduce alla formula conosciuta $a_r = -\frac{4\pi^2 r}{T^2}$). Introducendo la costante di Keplero (55.1), si ottiene

$$a_r = -\frac{4\pi^2 \mathscr{K}}{r^2}. \tag{56.6}$$

Questo risultato coincide con la formula (55.2) ma per stabilirlo sono state utilizzate soltanto le leggi empiriche di Keplero, senza l'intervento di considerazioni speciali. Questo dimostra che la formula (55.2) è esatta. Ciò era prevedibile, poiché sulla base delle concezioni fondamentali della meccanica newtoniana l'accelerazione di un pianeta è determinata soltanto dalla posizione reciproca del Sole e dei pianeti e non può dipendere né dalla forma della traiettoria né dalla velocità del pianeta. Per la stessa ragione la formula (56.6) può servire anche a calcolare l'accelerazione delle comete, sebbene la terza legge di Keplero non sia applicabile nel caso specifico. Il valore numerico della costante $\mathscr{K}$ sarà perciò identico ma non potrà essere espresso mediante i parametri dell'orbita della cometa con formule analoghe alle (55.1).

4. Il moto lungo una parabola può essere considerato come il caso limite del moto lungo un'ellisse quando uno dei due fuochi sia posto all'infinito. Il moto lungo un'iperbole richiede, però, qualche spiegazione supplementare.

L'iperbole si compone di due bracci non collegati tra di loro. Per poter descrivere i due bracci con un'unica equazione (56.3) si deve ammettere che la distanza r possa assumere non soltanto valori positivi, ma anche *negativi*. Sia ϑ l'angolo definito dalla condizione $\cos\vartheta = 1/e$. Esso determina le direzioni degli *asintoti dell'iperbole* (fig. 177). Se $|\varphi| > \vartheta$, r è positivo. A questa condizione risponde il braccio destro dell'iperbole. Se invece $|\varphi| < \vartheta$, r è negativo e si deve cercare il punto della curva non lungo la semiretta che forma l'angolo φ, ma in direzione opposta. Si ottiene così il braccio sinistro dell'iperbole.

Certo un punto mobile non può passare da un braccio dell'iperbole all'altro: se il punto è sottoposto a una forza di attrazione, il lato concavo della traiettoria deve essere rivolto verso il centro di forza. Se il centro di forza (il Sole) è, ad esempio, il fuoco F_1, il moto del punto è possibile soltanto lungo il braccio destro dell'iperbole. Però per descrivere il moto in generale lungo le sezioni coniche e non solo lungo le orbite ellittiche, conviene introdurre in modo puramente formale un punto materiale ausiliario

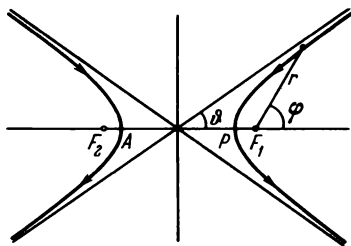



Fig. 177.

in moto lungo il braccio sinistro dell'iperbole sotto l'azione della forza di repulsione emanata dal medesimo centro di forza F_1. L'energia potenziale del punto ausiliario è rappresentata dall'espressione $U = +G\frac{Mm}{|r|}$. Essa è positiva, poiché le forze che agiscono sono di repulsione. Ma dato che per il braccio sinistro dell'iperbole i valori di r sono negativi, questa espressione si può scrivere anche nella forma $U = -G\frac{Mm}{r}$. Questa formula coincide esattamente con la formula che esprime l'energia potenziale di un punto reale in moto lungo il braccio destro dell'iperbole. Perciò se l'energia ed il momento della quantità di moto del punto ausiliario rispetto al fuoco F_1 sono uguali ai corrispondenti valori del punto reale, i moti di questi due punti saranno descritti *dalle stesse equazioni.* Nei calcoli matematici conta non tanto ciò che si muove, quanto le equazioni con cui è descritto il moto. Dal punto di vista matematico tutto procede formalmente, come se ci fosse un solo punto materiale che ha la capacità di passare da un braccio all'altro dell'iperbole. Illustreremo la convenienza di tale approccio artificiale con un esempio nel § 58. Le forze gravitazionali di repulsione non esistono, ma si può introdurle a titolo speculativo. Inoltre le forze di repulsione si manifestano nelle interazioni elettriche di particelle con la stessa carica. Esse come del resto quelle di gravitazione diminuiscono in modo inversamente proporzionale al quadrato della distanza. Perciò il moto sotto l'azione delle forze di repulsione presenta un interesse non soltanto speculativo, ma anche fisico.

§ 57. *Moto ellittico, parabolico e iperbolico*

1. *Quando la traiettoria è ellittica, il moto del pianeta è finito,* il pianeta cioè si muove in una regione limitata dello spazio senza allontanarsi all'infinito. Al contrario, nel *caso di traiettorie iperboliche e paraboliche, il moto è infinito,* cioè il moto di un pianeta non è ristretto ad una determinata regione dello spazio e il pianeta può allontanarsi all'infinito. Il problema, quindi, consiste solo nel determinare in quali condizioni il moto dei pianeti sia da considerarsi finito ed in quali no.

Se E è l'energia totale di un pianeta, allora si ha

$$\frac{mv^2}{2} - G\frac{Mm}{r} = E = \text{cost.} \qquad (57.1)$$

Non prendiamo in considerazione l'energia cinetica del Sole considerandola molto piccola rispetto all'energia cinetica del pianeta. La giustezza di questa approssimazione dipende dal fatto che la massa del pianeta è piccola rispetto alla massa del Sole. Analogamente se L è il momento della quantità di moto del pianeta rispetto al Sole, allora si ha

$$mr^2\dot{\varphi} = L = \text{cost.} \qquad (57.2)$$

Eliminiamo da queste equazioni la velocità angolare $\dot{\varphi}$. A questo scopo scomponiamo la velocità totale v in una componente radiale v_r ed una azimutale $r\dot{\varphi}$. Si ha allora

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2}v_r^2 + \frac{m}{2}r^2\dot{\varphi}^2 = \frac{m}{2}v_r^2 + \frac{L^2}{2mr^2}$$

e l'equazione (57.1) assumerà la forma

$$\frac{m}{2}v_r^2 - G\frac{Mm}{r} + \frac{L^2}{2mr^2} = E = \text{cost.} \qquad (57.3)$$

Questa equazione contiene una sola incognita, cioè la velocità radiale v_r. Formalmente questa equazione può essere considerata l'*equazione dell'energia per un moto unidimensionale radiale del punto materiale.* Il ruolo dell'energia potenziale è assunto dalla funzione

$$V(r) = -G\frac{Mm}{r} + \frac{L^2}{2mr^2}.$$

2. Il problema è così ricondotto alla determinazione delle condizioni per cui un moto unidimensionale di energia potenziale $V(r)$ sia finito o infinito. Questo problema è già stato esaminato nel § 25. Lo si può comodamente risolvere ricorrendo al metodo grafico. Sulla figura 178 le curve punteg-

giate rappresentano rispettivamente le funzioni

$$V_1(r) = -G\frac{Mm}{r}$$

e

$$V_2(r) = \frac{L^2}{2mr^2},$$

supponendo che $L \neq 0$. La curva $V(r)$ che ci interessa si ottiene addizionando le ordinate dei punti delle due curve punteggiate. Per $r \to 0$ la funzione $V_2(r)$ tende all'infinito più velocemente della funzione $V_1(r)$. Perciò, per r piccolo, la funzione $V(r) = V_1(r) + V_2(r)$ è positiva e tende asintoticamente verso $+\infty$, quando $r \to 0$. Al contrario, per $r \to \infty$ la funzione $V_1(r)$ tende verso zero meno velocemente di $V_2(r)$. Perciò per r grande la funzione $V(r)$ è negativa e tende asintoticamente verso zero quando $r \to \infty$. Il grafico di questa funzione è rappresentato nella figura 178 dalla

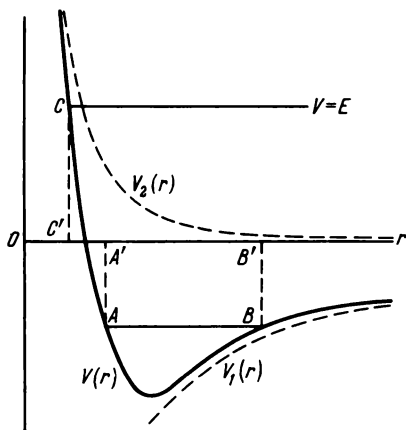



Fig. 178.

curva continua. La curva $V(r)$ ha la forma di una «buca di potenziale». Se $L = 0$, $V(r) \equiv V_1(r)$, il minimo sulla curva si sposta verso l'origine delle coordinate e si allontana a $-\infty$. In questo caso il pianeta si sposta lungo una retta che passa per il centro del Sole.

Dato che la grandezza $1/2\ mv_r^2$ non può essere negativa, dall'equazione (57.3) deriva che la regione in cui può trovarsi il pianeta è determinata dalla condizione $V(r) \leqslant E$. Conduciamo la retta orizzontale $V = E =$ cost. Le parti della curva $V(r)$, che si trovano al di sopra di questa retta corrispondono ai punti dello spazio che un pianeta con energia E non può raggiungere. Se $E < 0$, la retta data intercetterà la curva $V = V(r)$ in due punti A e B. Siano A' e B' le loro proiezioni sull'asse orizzontale. Il pianeta può spostarsi soltanto nella regione compresa tra A' e B', deve essere «localizzato

nella buca di potenziale» $V = V(r)$. In questo caso il moto sarà finito e la traiettoria sarà *ellittica*. Se $E > 0$ la retta intercetterà la curva $V(r)$ in un solo punto C, la cui proiezione sull'asse orizzontale sarà il punto C'. Se il pianeta si sposta da destra a sinistra, arrivato al punto C' esso invertirà il senso del moto e comincerà a spostarsi verso destra, allontanandosi all'infinito. In questo secondo caso, infatti, il moto è infinito e la traiettoria è *iperbolica*. Infine per $E = 0$ il moto è ugualmente infinito. Questo caso intermedio tra i moti ellittici e iperbolici corrisponde al *moto sulla parabola*.

Quindi *per* $E > 0$ *il moto è iperbolico, per* $E < 0$ *ellittico e per* $E = 0$ *parabolico. Nel caso di forze di repulsione l'energia E è sempre positiva e il moto perciò è sempre iperbolico* (*in un caso particolare, rettilineo*). Dato che per $r \to \infty$ la funzione $V(r)$ si annulla, si ha

$$E = \frac{m}{2} v_\infty^2. \tag{57.4}$$

Ne segue che *nel caso di moto iperbolico, il punto materiale arriva all'infinito con una velocità finita* v_∞ *e nel caso di moto parabolico esso arriva all'infinito con una velocità uguale a zero.* La velocità iniziale v_p da comunicare al punto materiale perché esso cominci a muoversi lungo una traiettoria parabolica si chiama *velocità parabolica.* Questa velocità può essere determinata dall'equazione (57.1), ponendo $E = 0$. Se r_0 è il valore iniziale del raggio r, si ha

$$\frac{mv_p^2}{2} - G\frac{Mm}{r_0} = 0,$$

da cui

$$v_p = \sqrt{2G\frac{M}{r_0}}. \tag{57.5}$$

La velocità parabolica è legata da una relazione semplice alla velocità «*circolare*» v_c. Così si chiama infatti la velocità che deve possedere un pianeta per poter descrivere attorno al Sole, sotto l'azione della forza gravitazionale, una traiettoria circolare di raggio r_0. Questa velocità si ottiene uguagliando l'accelerazione centripeta v_c^2/r_0 alla forza gravitazionale $G\frac{M}{r_0^2}$ applicata all'unità di massa, il che dà

$$v_c = \sqrt{G\frac{M}{r_0}}. \tag{57.6}$$

Quindi

$$v_p = v_c\sqrt{2}. \tag{57.7}$$

Problemi

1. Supponiamo che in seguito ad un'esplosione un asteroide, in moto lungo un'orbita circolare attorno al Sole, si scinda in due frammenti di uguale massa. Un frammento, subito dopo l'esplosione, si ferma, mentre l'altro continua la sua corsa. Quale traiettoria seguirà questo secondo frammento: ellittica, iperbolica o parabolica?

Risposta: iperbolica.

2. Supponiamo che nel precedente problema i due frammenti volino con velocità uguali in direzioni ortogonali fra loro. Che tipo di orbite percorreranno?

Risposta: paraboliche.

§ 58. *Calcolo dei parametri dell'orbita*

1. La lunghezza degli assi maggiore e minore di un'orbita ellittica di un pianeta si può calcolare per mezzo delle leggi di conservazione dell'energia e del momento della quantità di moto. Al *perielio* ed all'*afelio* (fig. 179) la

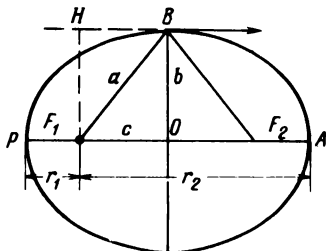



Fig. 179.

velocità radiale del pianeta è uguale a zero. Ponendo nell'equazione (57.3) $v_r = 0$, si ottiene per questi punti

$$r^2 + G\frac{Mm}{E}r - \frac{L^2}{2mE} = 0. \qquad (58.1)$$

Per $E < 0$ questa equazione quadratica ha due radici reali positive r_1 e r_2. Una corrisponde al perielio P, l'altra all'afelio A. La somma delle radici $r_1 + r_2$ è la lunghezza dell'asse maggiore dell'ellisse. Utilizzando l'indicazione standard $2a$ per questa lunghezza, si ottiene

$$2a = r_1 + r_2 = -G\frac{Mm}{E} = -G\frac{M}{\varepsilon}, \qquad (58.2)$$

dove $\varepsilon = E/m$ è l'energia totale per unità di massa del pianeta. Dato che per un moto ellittico $\varepsilon < 0$, l'espressione (58.2) è essenzialmente positiva, come deve essere.

Le traiettorie circolari sono casi matematicamente degeneri di quelle ellittiche. La condizione di moto su di un'orbita circolare si ottiene

dall'equazione (58.2), qualora $r_1 = r_2 = r$. Allora si avrà $2E = -G\frac{Mm}{r}$ ossia $2E = U$. Scrivendo questa espressione nella forma $E = U - E$ ed utilizzando la relazione $E = K + U$, si ottiene

$$E = -K. \tag{58.3}$$

Quindi, *nel caso di moto circolare la somma dell'energia totale e dell'energia cinetica è uguale a zero.* È facile dimostrare che questa condizione permette di ricavare la formula (57.6).

La formula (58.3) è valida anche per il moto ellittico, purché per K si consideri il valore *medio rispetto al tempo* dell'energia cinetica del pianeta. Infatti il moto ellittico è finito e gli si può applicare il teorema del viriale (§ 25, punto 6). In quanto al moto del pianeta, questo teorema dà

$$\overline{K} = -\frac{1}{2}\overline{rF} = \frac{1}{2}\overline{rF} = \frac{GMm}{2}\left(\overline{\frac{1}{r}}\right) = -\frac{1}{2}\overline{U}.$$

Sottraendo $\frac{1}{2}\overline{K}$ dai due membri ed osservando che $E = \overline{K} + \overline{U}$, si ottiene

$$\overline{K} = -E.$$

il che dimostra l'enunciato.

2. Calcoliamo ora la lunghezza b del *semiasse minore* dell'ellisse. Per farlo bisogna conoscere, oltre l'energia, anche il momento della quantità di moto del pianeta o la sua velocità arcolare $\sigma = \dot{S}$. Si può considerare conosciuta la lunghezza dell'asse maggiore poiché questo è univocamente determinato dall'energia del pianeta. Sia B uno dei punti in cui l'asse minore interseca l'ellisse (cfr. fig. 179). Dato che la somma delle distanze di ciascun punto dell'ellisse dai suoi fuochi F_1 ed F_2 è costante ed uguale a $2a$, la velocità arcolare nel punto B è uguale a

$$\sigma = \frac{1}{2}vb, \tag{58.4}$$

poiché b è la perpendicolare F_1H, abbassata dal fuoco F_1 sulla direzione della velocità in questo punto. La velocità v nel punto B si ottiene dall'equazione dell'energia. Ponendo $r = a$, si ottiene

$$\frac{v^2}{2} - G\frac{M}{a} = \varepsilon.$$

Introducendo per ε l'espressione data dall'equazione (58.2), si ottiene v, da cui si arriva alla formula

$$b = 2\sigma\sqrt{\frac{a}{GM}}. \tag{58.5}$$

3. Estendiamo ora i risultati ottenuti al caso del moto iperbolico. Per farlo utilizziamo l'artificio descritto nel § 56, punto 4. Sul braccio destro dell'iperbole (cfr. fig. 177) si muove la cometa, su quello sinistro il punto materiale ausiliario. Questi due moti sono descritti dalla stessa equazione (57.3). Ai vertici P ed A dell'iperbole la velocità radiale v_r è uguale a zero; ci ritroviamo quindi al caso descritto dall'equazione quadratica di secondo grado (58.1), in cui però l'energia E è positiva, così che i segni delle due radici sono contrari. La radice positiva r_1 corrisponde al vertice P e la radice negativa r_2 al vertice A. La somma $r_1 + r_2$ è negativa. In valore assoluto questa somma rappresenta la distanza tra i vertici P ed A. Utilizzando per questa distanza l'indicazione standard $AP = 2a$, ne deriva

$$2a = -(r_1 + r_2) = G\frac{Mm}{E} = G\frac{M}{\varepsilon}. \tag{58.6}$$

Questa formula verrebbe a coincidere esattamente con la (58.2) se si convenisse di considerare negativa la distanza tra i vertici dell'iperbole.

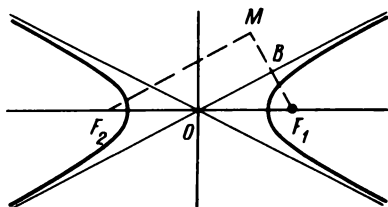



Fig. 180.

4. Stabiliamo ora per il moto iperbolico una formula analoga alla (58.4). Si usa indicare con $2c$ la distanza F_1F_2 tra i fuochi e con b la radice quadrata $b = \sqrt{c^2 - a^2}$. Conduciamo attraverso il fuoco F_2 una retta parallela ad uno degli asintoti dell'iperbole (fig. 180). Dal fuoco F_1 sulla retta F_2M abbassiamo la perpendicolare F_1M. La lunghezza del segmento F_2M può essere considerata come la differenza delle distanze fra i due fuochi F_1 e F_2 e il punto infinitamente lontano in cui si intersecano le rette parallele F_2M e OB. Perciò, in virtù di una nota proprietà dell'iperbole, $F_2M = 2a$. Applicando il teorema di Pitagora, si conclude che la distanza F_1M è uguale a $2b$. La velocità arcolare, che è una grandezza costante, può essere calcolata per un punto che si sposta all'infinito. Il raggio vettore di un tale punto descrive nell'unità di tempo un triangolo di base v_∞ e di altezza $F_1B = b$. La sua area

$$\sigma = \frac{1}{2}bv_\infty \tag{58.7}$$

ci dà la velocità arcolare. La grandezza v_∞ è data dalla formula (57.4) che si può scrivere anche nella forma

$$\frac{v_\infty^2}{2} = \varepsilon. \tag{58.8}$$

L'angolo ϑ tra gli asintoti dell'iperbole si può calcolare mediante la formula

$$\mathrm{tg}\frac{\vartheta}{2} = \frac{b}{a} = \frac{bv_\infty^2}{GM}. \tag{58.9}$$

5. Il parametro p per l'ellisse e per l'iperbole è definito dall'espressione $p = b^2/a$. Portandovi i valori di b e di a si ottiene in ambedue i casi la stessa espressione

$$p = \frac{4\sigma^2}{GM}. \tag{58.10}$$

Questa stessa formula definisce il paramentro p della parabola che è la curva limite in cui si trasformano l'ellisse e l'iperbole. Per la parabola il paramentro p è la sola grandezza a caratterizzarne la forma.

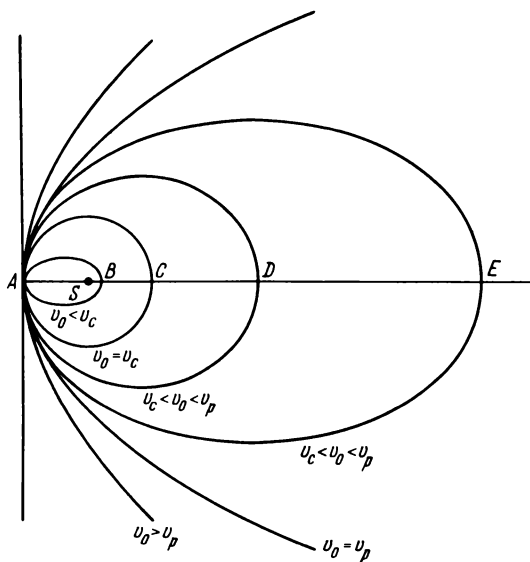



Fig. 181.

6. Il tipo di traiettoria di un pianeta è determinato dalle condizioni iniziali, cioè dalla posizione e dalla velocità in un istante dato, preso come istante iniziale. Consideriamo il seguente esempio. Siano S il Sole ed A la posizione iniziale del pianeta (fig. 181). Indichiamo con r_0 la distanza AS. Comunichiamo al pianeta che si trova in A una velocità v_0 diretta lungo la

perpendicolare ad AS. Vediamo come si modifica la forma della traiettoria col variare della grandezza v_0. Se l'energia totale del pianeta è negativa, cioè v_0 è minore della velocità parabolica v_p, il pianeta avrà una traiettoria ellittica. Per $v_0 = 0$ l'ellisse degenera in una retta che passa attraverso il centro del Sole. Se $v_0 = v_c$ il pianeta ruoterà lungo un'orbita circolare. In questo caso i punti A e C sono equidistanti dal Sole e la distanza tra di loro (asse maggiore) è uguale a $2r_0$. Quando l'energia diminuisce, l'asse maggiore dell'ellisse si accorcia, cioè per $v_0 < v_c$ esso diventa minore di $2r_0$. In questo caso il punto A si trova a una distanza più grande dal Sole S (è, cioè, l'afelio) del punto B (o perielio). Per $v_0 > v_c$, al contrario, l'asse maggiore dell'ellisse è maggiore di $2r_0$, cioè il punto A è il perielio e il punto D (o E) l'afelio. Per $v = v_p = v_c\sqrt{2}$ la traiettoria sarà una parabola. Per $v > v_p$ essa diventa un'iperbole. Tutti questi risultati sono riassunti nella seguente tabella:

Velocità iniziale	Traiettoria del pianeta
$v_0 = 0$	Retta che passa per il Sole
$v_0 < v_c$	Ellisse con perielio in B e afelio in A
$v_0 = v_c$	Cerchio col centro nel punto in cui si trova il Sole
$v_c < v_0 < v_p$	Ellisse con perielio in A e con afelio in D
$v_0 = v_p$	Parabola
$v_0 > v_p$	Iperbole

Problema

Negli esperimenti classici di Rutherford si esaminava la diffusione delle particelle α contro nuclei atomici di differenti elementi chimici. Considerando il nucleo infinitamente pesante ed ammettendo che la diffusione sia dovuta alle forze di repulsione coulombiane, dimostrare che l'angolo di deviazione θ della velocità delle particelle α rispetto alla sua direzione iniziale dipende dal paramentro d'urto b attraverso la relazione

$$\operatorname{cotg}\frac{\theta}{2} = \frac{mbv_\infty^2}{2Ze^2} \qquad (58.11)$$

dove m è la massa della particella α, v_∞ la sua velocità a grande distanza dal nucleo, $2e$ la sua carica elettrica, Ze la carica del nucleo (e è la carica elettrica elementare, Z il numero atomico dell'elemento).

Osservazione. Il *parametro d'urto* è la lunghezza della perpendicolare abbassata dal centro di diffusione (dal nucleo) sulla direzione iniziale della tangente alla traiettoria di una particella che si trova all'infinito.

In fisica atomica per lo studio dell'esperimento di Rutherford utilizziamo la formula (58.11).

§ 59. *Influenza del moto solare*

1. Nello studio del moto dei pianeti non abbiamo tenuto conto del moto solare, perché ne abbiamo considerato la massa infinitamente grande rispetto a quella dei pianeti. Abbiamo definito l'accelerazione del pianeta con la formula

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = m\boldsymbol{a}_{ass} = \boldsymbol{F}, \tag{59.1}$$

dove $\boldsymbol{F} = -G\dfrac{Mm}{r^3}\boldsymbol{r}$ è la forza newtoniana di attrazione gravitazionale esercitata dal Sole sul pianeta. Il simbolo $\boldsymbol{a}_{ass}$ indica l'accelerazione del pianeta rispetto ad un sistema di riferimento inerziale, quello di Copernico ad esempio. Teniamo conto ora anche dello spostamento solare. Per ottenere l'equazione del moto del pianeta rispetto al Sole, si deve sostituire alla massa m del pianeta la massa ridotta $\mu = \dfrac{Mm}{M+m}$ (cfr. § 20). L'equazione del moto relativo assumerà allora la forma

$$\mu\ddot{\boldsymbol{r}} \equiv \mu\boldsymbol{a}_{rel} = \boldsymbol{F}.$$

Introducendo l'equazione per μ, si ottiene

$$m\boldsymbol{a}_{rel} = \left(1 + \frac{m}{M}\right)\boldsymbol{F}. \tag{59.2}$$

Formalmente tutto procede come se il Sole restasse immobile ma la costante gravitazionale è aumentata di $(1 + m/M)$ volte. È per questo che la *prima e la seconda legge di Keplero rimangono valide per il moto relativo*. Invece la terza legge deve essere analizzata con maggiore precisione. Per farlo è sufficiente sostituire nella formula (55.5) la costante G con $G\left(1 + \dfrac{m}{M}\right)$, il che porta alla relazione

$$\frac{a^3}{T^2(M+m)} = \frac{G}{4\pi^2}. \tag{59.3}$$

Questa espressione mostra che il *rapporto* $\dfrac{a^3}{T^2(M+m)}$ *è una costante universale che non dipende né dalla massa dei corpi in interazione, né dalla distanza reciproca*. Quindi la *terza legge di Keplero, applicata ad un moto relativo, non è del tutto corretta*. Il fatto che essa sia verificabile con alta precisione per quanto riguarda i pianeti del sistema solare è dovuto solo al fatto che le masse dei pianeti sono molto piccole rispetto alla massa del Sole.

Notiamo ancora la relazione

$$\frac{a_{rel}}{a_{ass}} = 1 + \frac{m}{M}, \tag{59.4}$$

che deriva direttamente dal confronto delle formule (59.1) e (59.2).

2. Le formule (55.5) e (59.3) sono utilizzate per determinare la massa dei pianeti che hanno satelliti, nonché la massa delle stelle doppie. Se la massa del satellite è trascurabile rispetto a quella del pianeta, allora la terza legge di Keplero (55.5) è valida per la descrizione del moto del satellite.

Misurando le dimensioni dell'orbita ed il tempo di rivoluzione del satellite si può calcolare la costante di Keplero $\mathcal{K}$. Trovato il valore della costante gravitazionale G, per mezzo della formula (55.5) si può calcolare la massa del pianeta M in unità assolute. In astronomia, però, si preferisce prendere per unità di massa la massa della Terra. Per calcolare la massa di un pianeta con tali unità non è necessario sapere il valore numerico della costante gravitazionale, che è definito per questo calcolo solo in modo approssimato.

A titolo di esempio calcoliamo il rapporto tra la massa M del Sole e la massa m_T della Terra. Poniamo che la massa della Terra sia trascurabile in confronto a quella del Sole. Trascuriamo anche la massa della Luna rispetto a quella della Terra. Per l'orbita della Terra $a_T = 1{,}496 \cdot 10^8$ km, $T_T = 365{,}26$ giorni e per l'orbita della Luna $a_L = 3{,}844 \cdot 10^5$ km, $T_L = 27{,}32$ giorni. Applicando la formula (55.5) si ottiene

$$\frac{M_S}{m_T} = \left(\frac{a_T}{a_L}\right)^3 \left(\frac{T_L}{T_T}\right)^2 = 3{,}298 \cdot 10^5.$$

In effetti, come si vede nella formula (59.3) in questo modo si ottiene il rapporto $\frac{M_S + m_T}{m_T + m_L}$. Questo metodo dà il rapporto della massa del corpo centrale attorno a cui ruotano i satelliti, le cui masse sono piccolissime rispetto alla massa del corpo centrale. Questa condizione è perfettamente soddisfatta nel caso di satelliti artificiali. Si può calcolare, ad esempio, il rapporto tra le masse della Luna e della Terra avendo misurato i parametri delle orbite dei satelliti artificiali della Terra e della Luna.

Problemi

1. Calcolare la distanza R tra le componenti di una stella doppia, se la loro massa totale $M_1 + M_2$ è doppia di quella del Sole M_0 ed il loro periodo di rivoluzione su orbite circolari intorno al loro centro di massa è $T = 2T_0$, dove T_0 è la durata dell'anno terrestre. La distanza tra la Terra e il Sole è $R_0 = 1{,}5 \cdot 10^8$ km.

Risposta. $R = \sqrt[3]{\left(\frac{T}{T_0}\right)^2 \frac{M_1 + M_2}{M_0}} = 2R_0 = 3 \cdot 10^8$ km.

2. La distanza minima tra le componenti di una stella doppia in rotazione l'una attorno all'altra è uguale a r_1. In questa posizione la loro velocità relativa è v_1. La somma delle loro masse è M. Si calcoli la distanza tra le componenti r_2 e la loro velocità relativa v_2, nel momento in cui la reciproca distanza di allontanamento sia massima. Per quale valore minimo delle loro velocità relative v_1 la stella doppia si disintegrerà?

Risposta. $r_2 = \left(\frac{2GM}{2GM - r_1 v_1^2} - 1\right) r_1; \quad v_2 = \frac{r_1}{r_2} v_1.$

La stella doppia si disintegrerà se $v_1 \geqslant \sqrt{\frac{2GM}{r_1}}$.

§ 60. *Applicazione della legge di gravitazione universale alla gravità terrestre*

Secondo Newton il peso dei corpi sulla Terra è una manifestazione della forza gravitazionale che si esercita tra il corpo considerato e la Terra. [1] Per provare la validità di questo enunciato, Newton paragonò l'accelerazione dovuta alla caduta libera di un corpo in prossimità della Terra, all'accelerazione della Luna lungo l'orbita che descrive attorno alla Terra.

Supponiamo che all'interno del globo terrestre la distribuzione della massa abbia simmetria sferica, che, cioè, la sua densità dipenda soltanto dalla distanza dal centro della Terra. In questo caso, come è già stato dimostrato nel § 55, la Terra crea nello spazio esterno lo stesso campo di gravità di un punto materiale di massa uguale e posto al centro della Terra. Se l'ipotesi di Newton è giusta, l'accelerazione g_{ass} della forza di gravità ad una distanza r dal centro della Terra deve essere definita dalla formula

$$g_{ass} = G\frac{M}{r^2}, \tag{60.1}$$

dove M è la massa della Terra. Con la medesima formula si determina l'accelerazione della Luna a_L sulla sua orbita:

$$a_L = G\frac{M}{R^2}, \tag{60.2}$$

dove R è il raggio dell'orbita lunare. Quindi

$$g_{ass} = a_L\left(\frac{R}{r}\right)^2. \tag{60.3}$$

---

[1] La forza di gravità cui ci riferiamo a rigore di termini coincide con la forza di attrazione gravitazionale solo qualora si usi una bilancia a riposo o priva di accelerazione rispetto ad un sistema di riferimento inerziale (cfr. § 66).

Se a_L è conosciuta, per mezzo di questa formula si può calcolare il valore dell'accelerazione g_{ass} della caduta libera sulla superficie della Terra ed è quanto Newton ha fatto.

Si può calcolare l'accelerazione della Luna a_L conoscendo R ed il periodo di rivoluzione T della Luna lungo la sua orbite (rispetto alle stelle). Queste grandezze sono rispettivamente uguali a $R = 3{,}844 \cdot 10^5$ km, $T =$ $= 27{,}32$ giorni. Utilizzandole, si ottiene

$$a_L = \frac{4\pi^2}{T^2} R = 0{,}2723 \text{ cm/s}^2. \tag{60.4}$$

Il raggio medio r del globo terrestre, calcolato dalla formula $\frac{4\pi}{3} r^3$ per ipotesi uguale al volume della Terra, è $r = 6371$ km. Introducendo questi dati nella formula (60.3), risulta $g_{ass} = 991{,}4$ cm/s^2. Questa grandezza è vicina ai valori sperimentali: $g_{ass} = 983{,}2$ cm/s^2 al polo, e $g_{ass} = 981{,}4$ cm/s^2 all'equatore. Una tale coincidenza di valori può essere presa a conferma dell'ipotesi di Newton. La differenza esistente è giustificabile, prima di tutto, dal fatto che non abbiamo preso in considerazione il moto della Terra stessa. La formula (60.4) dà l'accelerazione della Luna rispetto alla Terra $(a_L)_{rel}$, mentre nella formula (60.3) deve figurare l'accelerazione della Luna rispetto ad un sistema di riferimento inerziale $(a_L)_{ass}$. Secondo la formula (59.4) queste due accelerazioni sono legate tra di loro dalla relazione

$$(a_L)_{rel} = \left(1 + \frac{m}{M}\right) (a_L)_{ass},$$

dove m è la massa della Luna. Quindi, il valore g_{ass} calcolato sopra, diminuisce di $\left(1 + \frac{m}{M}\right)$ volte. Il rapporto tra la massa della Luna e la massa della Terra è $m/M = 1/81$. Apportando questa correzione si ottiene $g_{ass} = 979{,}3$ cm/s^2, il che dimostra che il valore ottenuto è più vicino a quello dell'esperimento. La lieve divergenza rimasta può essere attribuita al fatto che la Terra non è perfettamente sferica.

Si noterà che per mezzo della formula (60.1), conoscendo il valore numerico della costante gravitazionale G, è possibile calcolare la massa della Terra.

Problemi

1. Si dimostri che, se ci si trova ad un'altezza sul livello del mare trascurabile rispetto al raggio terrestre R, la variazione dell'accelerazione di gravità con l'altezza viene determinata dalla formula approssimata

$$g \approx g_0\left(1 - 2\frac{h}{R}\right) \approx g_0(1 - 0{,}00314h),$$

dove g_0 è il valore di g sulla superficie della Terra. L'altezza h viene data in chilometri.

2. Per calcolare la densità media δ della Terra Airy (1801—1892) ha proposto e realizzato il seguente esperimento. Si misurano le accelerazioni di gravità g_0 sulla superficie della Terra e g in fondo ad una miniera ad una profondità h. Si ammette che in uno strato superficiale di spessore h la densità della Terra sia omogenea e uguale a $\delta_0 = 2{,}5$ g/cm^3. (Questa ipotesi mal corrisponde alla realtà). Nei suoi esperimenti Airy ha ottenuto: $g - g_0 = 0{,}000052\, g_0$, $R/h = 16000$ (R è il raggio della Terra). Partendo da questi dati si calcoli la densità media della Terra. (Si noti che in prossimità della superficie terrestre g aumenta con la profondità! Come si spiega questo fenomeno?)

Risposta. $\delta \approx \dfrac{3\delta_0}{2 - \dfrac{g - g_0}{g_0}\dfrac{R}{h}} \approx 6{,}5$ g/cm^3.

3. Supponiamo di aver scavato un canale lungo l'asse di rotazione della Terra da un polo all'altro. Come si muoverà un punto materiale posto all'interno del canale e privo di velocità iniziale? Si consideri omogenea la densità ρ della Terra.

Risposta. Il punto materiale eseguirà oscillazioni armoniche di frequenza circolare $\omega^2 = \dfrac{4\pi}{3}\rho G = \dfrac{g}{R}$, dove R è il raggio della Terra, g l'accelerazione di gravità sulla superficie della Terra. Il periodo di queste oscillazioni $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{R}{g}} \approx 84$ min. È interessante notare che il *periodo delle oscillazioni dipende soltanto dalla densità della sfera e non dalle sue dimensioni.*

4. Si determini la velocità iniziale v_∞ delle meteoriti, qualora il valore massimo del parametro d'urto con cui cadono sulla Terra sia uguale a l ($l > R$, dove R è il raggio della Terra). Si calcoli un valore numerico per $l = 2R$. (Si veda l'osservazione fatta al problema del § 58).

Risposta. $v_\infty = R\sqrt{\dfrac{2gR}{l^2 - R^2}}$. Per $l = 2R$ $v_\infty = \sqrt{\dfrac{2}{3}gR} \approx 6{,}5$ km/s.

5. Si calcoli la massa della Terra utilizzando i parametri dell'orbita del satellite sovietico «Cosmos-380». Il periodo di rivoluzione del satellite (rispetto alle stelle) è $T = 102{,}2$ min, la distanza dalla superficie della Terra è di 210 km al perigeo e di 1548 km all'apogeo. Si consideri la Terra una sfera di raggio uguale a 6371 km.

Risposta. $M = \dfrac{4\pi^2}{G}\dfrac{a^3}{T^2} \approx 6\cdot 10^{27}$ g, dove a è il raggio dell'orbita circolare del satellite.

§ 61. *Velocità cosmiche*

1. La teoria del moto finito o infinito dei pianeti, esposta nel § 57, è pienamente applicabile al moto dei satelliti artificiali della Terra e delle navi spaziali (è chiaro che i loro motori devono essere spenti). Si trascuri la resistenza dell'aria supponendo che il moto si effettui in una atmosfera sufficientemente rarefatta e non si tenga conto nello studio del moto in prossimità alla Terra delle forze di attrazione gravitazionale esercitate dal Sole, dalla Luna e dai pianeti. Si indichino con M la massa della Terra e con m la massa del satellite artificiale.

L'energia totale del satellite o della nave spaziale nel campo della gravitazione terrestre è uguale a

$$E = \frac{mv^2}{2} - G\frac{Mm}{r},$$

che, in virtù della relazione (60.1), si scriverà

$$E = \frac{mv^2}{2} - mrg_{ass}. \qquad (61.1)$$

(D'ora in poi scriveremo semplicemente g invece di g_{ass}). Se l'energia E è negativa, il moto sarà finito ed il corpo descriverà una traiettoria ellittica. Per un moto circolare

$$v_c = \sqrt{G\frac{M}{r}} = \sqrt{gr}. \qquad (61.2)$$

Se r è il raggio del globo terrestre, il valore della velocità ottenuto mediante questa formula si chiama *prima velocità cosmica* uguale approssmativamente a 8 km/s.

Il valore minimo di E, a partire dal quale il moto diventa infinito, è uguale a zero. In questo caso il moto è parabolico e ha una velocità

$$v_p = \sqrt{2gr} = v_c\sqrt{2} \approx 11{,}2 \text{ km/s}, \qquad (61.3)$$

detta velocità *parabolica* o *seconda velocità cosmica,* ossia la velocità minima che deve possedere un corpo per non tornare mai sulla Terra (a condizione che il corpo non sia sottoposto a forze gravitazionali originate da altri corpi celesti).

Se infine l'energia totale E è positiva, cioè se la velocità iniziale del corpo supera la seconda velocità cosmica, il suo moto sarà iperbolico.

2. Calcoli analoghi si possono fare anche per studiare il moto nel campo gravitazionale del Sole. La distanza media tra la Terra e il Sole è di 150 milioni di chilometri circa. A questa distanza la velocità della Terra sull'orbita circolare è di 29,8 km/s circa. Perché un corpo lanciato da questa distanza dal Sole possa abbandonare per sempre il sistema solare, esso deve possedere rispetto al Sole una velocità superiore a $29{,}8\sqrt{2} \approx 42{,}1$ km/s. Trovandosi sulla Terra , il corpo si sposta insieme alla Terra attorno al Sole ad una velocità di 29,8 km/s. Se il corpo non fosse soggetto alla gravitazione terrestre, sarebbe sufficiente comunicargli una velocità supplementare $42{,}1 - 29{,}8 = 12{,}3$ km/s rispetto a quella della Terra nella direzione di moto perché il corpo si muova rispetto al Sole a velocità parabolica abbandonando per sempre il sistema solare. In realtà bisogna comunicare al corpo una velocità maggiore, affinché riesca a superare l'attrazione terrestre. La velocità da comunicare al corpo rispetto a quella della Terra perché esso possa abbandonare il sistema solare si chiama *terza velocità cosmica.* Il valore della terza velocità cosmica dipende dalla direzione lungo la quale il corpo si allontana dalla zona d'azione dell'attrazione terrestre. Questo valore è minimo se questa direzione coincide con quella del moto orbitale della Terra attorno al Sole ed è massimo se le direzioni sono opposte.

Il calcolo esatto della terza velocità cosmica è assai laborioso, poiché si deve tener conto delle interazioni gravitazionali di tre corpi: del Sole, della

Terra e della nave spaziale. Il calcolo si semplifica notevolmente, se si trascura l'influenza che esercita il campo di gravitazione solare sul moto della nave spaziale durante tutto il tempo che essa impiega per uscire dalla zona d'azione dell'attrazione terrestre. [1] Indichiamo con le minuscole (v, v_c, v_p) le velocità della nave rispetto alla Terra, e con le maiuscole (V, V_c, V_p) le stesse velocità rispetto al Sole. Finché la nave si sposta nel campo terrestre, è comodo rapportare il suo moto ad un sistema di riferimento rispetto al quale la Terra è immobile. Considerando la massa M della Terra infinitamente grande rispetto alla massa m della nave, si può scrivere l'equazione dell'energia nella seguente forma:

$$\frac{mv^2}{2} - G\frac{Mm}{r} = \frac{mv_\infty^2}{2},$$

dove v_∞ rappresenta la velocità della nave nell'istante in cui essa praticamente lascia la zona d'azione dell'attrazione terrestre. Introducendo la velocità angolare $v_c^2 = GM/r$, si ottiene $v_\infty^2 = v^2 - 2v_c^2$. Dopo che la nave sarà uscita dalla zona di attrazione terrestre, rapporteremo il suo moto a un sistema di riferimento, in cui il Sole sia fisso. Nell'istante in cui la nave esce dalla zona di attrazione terrestre, la sua velocità V, in questo sistema di riferimento, è uguale alla somma vettoriale della velocità v_∞ e di quella del moto circolare della Terra . Se la nave esce dalla zona di attrazione terrestre con un angolo ϑ, le velocità v_∞ e V formano tra di loro lo stesso angolo. Quindi

$$V^2 = V_c^2 + v_\infty^2 + 2V_c v_\infty \cos\vartheta.$$

La terza velocità cosmica v_3 si deduce dalla condizione $V = V_p \equiv \sqrt{2}\,V_c$. Portando questo valore di V nella relazione precedente, si ottiene un'equazione di secondo grado per v_∞, da cui si ottiene

$$v_\infty = (\sqrt{1 + \cos^2\vartheta} - \cos\vartheta)\,V_c.$$

(Il segno positivo davanti al radicale deriva dal fatto che la velocità v_∞ è essenzialmente positiva). Dopo di che si ottiene

$$v_3^2 = (\sqrt{1 + \cos^2\vartheta} - \cos\vartheta)^2\,V_c^2 + 2v_c^2. \qquad (61.4)$$

Il valore della terza velocità cosmica è minimo quando $\vartheta = 0$ (quando, cioè, il lancio avviene nella direzione del moto orbitale della Terra) e massimo quando $\vartheta = \pi$ (quando, cioè, il lancio va nella direzione opposta al

[1] Un'analisi più dettagliata di questo problema (cfr. § 65) dimostra che ciò che in realtà si trascura non è il campo gravitazionale solare, ma la sua *non omogeneità* nella regione dello spazio dove predomina il campo di gravitazione della Terra. La componente omogenea del campo di gravitazione del Sole è compensata dalle forze d'inerzia che sorgono per il fatto della caduta libera della Terra sul Sole. Perciò l'errore da noi commesso in questo calcolo della terza velocità cosmica è trascurabile.

moto orbitale della Terra). Per questi valori la formula (61.4) dà

$$v_3^{\min} \approx \sqrt{0{,}171\ V_c^2 + 2v_c^2} \approx 16{,}7 \text{ km/s},$$
$$v_3^{\text{mass}} \approx \sqrt{5{,}828\ V_c^2 + 2v_c^2} \approx 72{,}7 \text{ km/s}. \qquad (61.5)$$

Calcoliamo ora approssimativamente la *quarta velocità cosmica* v_4: si chiama così la velocità minima da comunicare ad un razzo, perché possa andare a cadere sul Sole in un punto prestabilito. Il valore di questa velocità dipende dalla posizione del punto sulla superficie del Sole. All'inizio il razzo ruota insieme alla Terra attorno al Sole ad una velocità V_c. Perché il razzo possa cadere sul Sole bisogna frenarne il moto. Notiamo come del resto abbiamo già visto prima, che nell'istante in cui il razzo lascia la zona di attrazione terrestre la sua velocità sarà uguale a $V = V_c + v_\infty$ (rispetto al Sole). Avremo l'energia minima necessaria al frenaggio quando le velocità

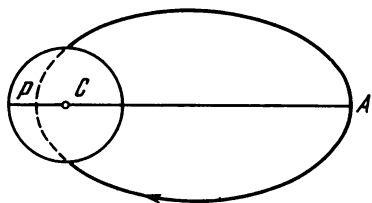



Fig. 181,*a*

V_c e v_∞ saranno opposte. In questo caso $V = V_c - v_\infty$ (tutte le velocità sono positive) e l'energia consumata per unità di massa del razzo è uguale a

$$\varepsilon = 1/2(V_c - v_\infty)^2 - GM/R = 1/2(V_c^2 + 2V_c v_\infty - v_\infty^2),$$

dove $R = CA$ è la distanza del razzo dal centro del Sole nel momento di allontanamento massimo (fig. 181, *a*). Se $\varepsilon < 0$, la traiettoria del razzo avrà la forma di un'ellisse con asse maggiore

$$2a = -\frac{GM}{\varepsilon} = \frac{2RV_c^2}{V_c^2 + 2V_c v_\infty - v_\infty^2}.$$

Uno dei fuochi di quest'ellisse si trova al centro del Sole. Indichiamo con $x = CP$ la distanza tra il centro del Sole ed il vertice più vicino dell'ellisse. Questa distanza x definisce univocamente la forma dell'ellisse e la linea tracciata sul Sole passante per il punto di impatto del razzo sulla superficie solare. L'asse maggiore dell'ellisse $2a = R + x$. Portando questo valore nell'equazione precedente, si ottiene un'equazione di secondo grado per v_∞. La radice più piccola di questa equazione è uguale a

$$v_\infty = V_c\left(1 - \sqrt{\frac{2x}{R + x}}\right).$$

La quarta velocità cosmica v_4 del razzo si ottiene dalla relazione $v_4^2 = v_\infty^2 + 2v_c^2$,

$$v_4^2 = V_c^2 \left(1 - \sqrt{\frac{2x}{R + x}}\right)^2 + 2v_c^2.$$

Essa dipende dal parametro x che definisce il punto d'impatto. Per $x = 0$ (moto rettilineo verso il centro del Sole) la velocità v_4 è massima ed è uguale a

$$v_4^{\text{mass}} = (V_c^2 + 2v_c^2)^{1/2} \approx 31{,}8 \text{ km/s}.$$

Il razzo cade sulla faccia anteriore del Sole. Per $x = r$ (r è il raggio del Sole) il razzo cade sulla faccia posteriore del Sole, seguendo la tangente alla sua superficie. In questo caso la velocità è minima ed uguale a

$$v_4^{\text{min}} \approx \left[V_c^2\left(1 - \sqrt{\frac{2r}{R + r}}\right)^2 + 2v_c^2\right]^{1/2} \approx$$

$$\approx [V_c^2(1 - \sqrt{2\alpha})^2 + 2v_c^2]^{1/2} \approx 29{,}2 \text{ km/s},$$

dove $\alpha = 4{,}65 \cdot 10^{-3}$ rad è il raggio angolare medio del Sole.

Problemi

1. Un satellite artificiale della Terra ruota su un'orbita circolare di raggio R con un periodo T_1. In un certo istante per breve tempo è stato messo in azione il motore a reazione che ha fatto aumentare la velocità del satellite di α volte, portando il satellite a ruotare su un'orbita ellittica. Visto che il motore ha aumentato la velocità del satellite sempre nella direzione del moto, si calcoli la distanza massima dal centro della Terra raggiunta dal satellite dopo che il motore è stato spento. Si calcoli anche il periodo di rivoluzione T_2 del satellite sulla nuova orbita (ellittica).

Soluzione. Indichiamo con E_c l'energia totale del satellite sulla sua orbita circolare. Secondo la (58.3), $E_c = -K$, $U = -2K$. Dopo aver spento il motore, la velocità del satellite sarà aumentata di α volte e l'energia cinetica K di α^2 volte. L'energia potenziale non è cambiata, poiché durante il funzionamento del motore il satellite si sarà spostato in misura trascurabile. Quindi l'energia totale del satellite sull'orbita ellittica è uguale a

$$E_{\text{el}} = \alpha^2 K + U = (\alpha^2 - 2)K = (2 - \alpha^2)E_c.$$

Dato che l'asse maggiore delle orbite ellittiche è inversamente proporzionale all'energia totale (cfr. formula 58.2), si ha

$$\frac{a}{R} = \frac{1}{2 - \alpha^2}, \quad a = \frac{R}{2 - \alpha^2}.$$

L'orbita sarà ellittica, se $\alpha^2 \leqslant 2$. La distanza massima del satellite dal centro della Terra (all'apogeo) è

$$R_{\text{mass}} = 2a - R = \frac{\alpha^2 R}{2 - \alpha^2}.$$

Il periodo di rivoluzione T_2 si ottiene tramite la terza legge di Keplero ed è uguale a

$$T_2 = \frac{T_1}{(2 - \alpha^2)^{3/2}}.$$

2. Si calcoli il raggio R dell'orbita circolare di un satellite che rimanendo sempre immobile rispetto alla Terra (tale satellite si chiama *stazionario*) si sposta nel senso di rotazione della Terra sul piano equatoriale.

Risposta. $R = \left(\frac{g}{\omega^2 R_0}\right)^{1/3} R_0 \approx 6{,}60 R_0$, dove R_0 è il raggio equatoriale della Terra, $\omega^2 R_0$ l'accelerazione centripeta all'equatore, dovuta alla rotazione assiale della Terra, g è l'accelerazione in caduta libera. All'equatore $\omega^2 R_0/g = 1/288$.

3. Le forze di attrito dovute alle maree causate dall'attrazione lunare rallentano la rotazione assiale della Terra. Questo processo continuerà finché non si uguaglino le velocità angolari di rotazione assiale terrestre e del moto orbitale della Luna attorno alla Terra. Si calcoli la velocità angolare totale ω di ambedue le rotazioni, la durata T del giorno terrestre e il raggio a dell'orbita lunare non appena le velocità angolari siano uguali. Attualmente la velocità angolare di rotazione assiale della Terra è $\omega_T = 7{,}29 \cdot 10^{-5}$ rad/s, il momento della quantità di moto della Terra rispetto al suo asse di rotazione è $L_T = 5{,}91 \cdot 10^{40}$ g·cm²/s, il momento d'inerzia della Terra rispetto allo stesso asse è $I_T = 8{,}11 \cdot 10^{44}$ g·cm², il raggio dell'orbita lunare è $a_0 = 3{,}84 \cdot 10^{10}$ cm, il periodo di rotazione della Luna attorno alla Terra (rispetto alle stelle) è $T_L = 27{,}3$ giorni, la massa lunare è $m = 7{,}35 \cdot 10^{25}$ g. Per semplificare i calcoli si consideri l'asse terrestre perpendicolare al piano dell'orbita lunare.

Soluzione. Dai dati su riportati risulta che il momento d'inerzia lunare rispetto all'asse di rivoluzione terrestre è $I_L = ma_0^2 = 1{,}08 \cdot 10^{47}$ g·cm² (si trascuri il momento d'inerzia lunare rispetto al proprio asse); la velocità angolare del moto orbitale della Luna attorno alla Terra $\omega_L = 2{,}67 \cdot 10^{-6}$ rad/s; il momento della quantità di moto lunare rispetto alla Terra $L_L = I_L\omega_L = 28{,}9 \cdot 10^{40}$ g·cm²/s; il momento della quantità di moto totale del sistema Terra-Luna $L = L_T + L_L = 34{,}8 \cdot 10^{40}$ g·cm²/s. In virtù della legge di conservazione del momento della quantità di moto $(I_T + ma^2)\omega = L$, o ignorando I_T, $ma^2\omega = L$. Secondo la terza legge di Keplero $a^3\omega^2 = a_0^3\omega_L^2$. Da queste due equazioni si ottengono le incognite a e ω. Nell'approssimazione adottata

$$a = \frac{L^2}{m^2 a_0^4 \omega_L^2} a_0 = \left(\frac{L}{L_L}\right)^2 a_0 = 1{,}45 a_0 = 5{,}58 \cdot 10^{10} \text{ cm},$$

$$\omega/\omega_L = (a_0/a)^{3/2} = 0{,}573, \quad T = 27{,}3/0{,}573 = 47{,}7 \text{ giorni}.$$

4. Una nave cosmica si avvicina alla Luna lungo una traiettoria parabolica che quasi tocca la superficie lunare. Per passare su una orbita circumlunare, si mette in azione nell'istante di massimo avvicinamento il motore che rallenta la nave espellendo gas ad una velocità $v = 4$ km/s nella direzione di moto della navicella. Quale massa rappresenterà il carburante consumato per il frenaggio rispetto alla massa della nave? Il raggio medio della Luna $R = 1738$ km, l'accelerazione di gravità sulla superficie lunare $g = 162$ cm/s².

Risposta. $\frac{m_0 - m}{m_0} = (\sqrt{2} - 1)\frac{\sqrt{gR}}{v} \approx 0{,}17.$

5. Un satellite artificiale ruota attorno alla Terra in un'atmosfera rarefatta su un'orbita circolare o quasi. Qual'è l'influenza esercitata dalla resistenza del mezzo sulla velocità e sul momento della quantità di moto rispetto al centro della Terra?

Soluzione. Secondo la (58.3) per un moto circolare $E = -K$. Dato che l'attrito diminuisce l'energia totale E, l'energia cinetica K aumenta (il satellite si avvicina alla Terra).

6. Una nave cosmica priva di velocità iniziale inizia un moto di caduta libera verso la Terra da un punto lontano. In quale punto si deve far ruotare di 90° la direzione della velocità (sen-

za modificarne la grandezza), affinché essa cominci a muoversi attorno alla Terra su un'orbita circolare?

Risposta. A metà della distanza tra il centro della Terra e la posizione iniziale della nave.

7. Una nave cosmica ruota attorno alla Terra su un'orbita ellittica. In quale punto dell'orbita si deve cambiare la direzione della velocità della nave (senza modificarne la grandezza), perché la nave cominci a muoversi su di un'orbita circolare?

Soluzione. Dato che l'energia della nave dipende soltanto dalla lunghezza $2a$ dell'asse maggiore della sua orbita, il passaggio ad un'orbita circolare avverrà alla distanza a, cioè nel punto di intersezione dell'ellisse con l'asse minore. Si deve ruotare la direzione della velocità di un angolo tale che la direzione risulti perpendicolare alla retta che unisce la nave al centro della Terra.

8. Una nave cosmica ruota attorno alla Terra su un'orbita ellittica. Nel punto di intersezione dell'ellisse con il suo asse minore, si mette in azione il motore a propulsione. Di quanto va modificata la velocità della nave in questo punto, perché essa passi ad un'orbita parabolica?

Risposta. Bisogna aumentare la velocità di $\sqrt{2}$ volte.

9. Quale sovraccarico prova il cosmonauta nella nave cosmica durante la prima tappa del volo subito dopo il lancio, quando la nave con il suo razzo-vettore sale lungo la verticale con un'accelerazione costante tale che al tempo $\tau = 4$ s la sua velocità risulta uguale a $v = \alpha v_c$, dove v_c è la prima velocità cosmica ed $\alpha = 0{,}03$? (Per sovraccarico si intende il rapporto $n = (P - P_0)/P_0$, dove P_0 è il peso del cosmonauta sulla Terra e P il «peso» indicato da una bilancia a molla a bordo della nave in volo).

Soluzione. Prendiamo per senso positivo quello della verticale ascendente. Il «peso» del cosmonauta a bordo della nave sarà

$$P = P_0 + m\frac{dv}{dt}.$$

Considerando la grandezza P costante durante il percorso iniziale, di ottiene la velocità della nave al tempo τ:

$$v = \alpha v_c = \frac{P - P_0}{m}\tau,$$

quindi

$$\frac{P - P_0}{P_0} = \frac{\alpha v_c}{g\tau} = \frac{\alpha}{\tau}\sqrt{\frac{R}{g}} = 6.$$

§ 62. *Deduzione delle leggi di moto dei pianeti dalla legge di gravitazione universale di Newton*

Nei paragrafi precedenti abbiamo preso come leggi base dei nostri ragionamenti le tre leggi di Keplero. Applicandole siamo giunti alla legge di gravitazione universale di Newon. Ora facciamo l'inverso. Supponiamo che il Sole eserciti su un pianeta una forza gravitazionale determinata dalla legge di Newton. Determiniamo il moto del pianeta sottoposto all'azione di tale forza. Consideriamo la massa del Sole infinitamente grande rispetto alla massa del pianeta. Abbiamo dimostrato nel § 59 che noi ricadiamo in

questo stesso caso anche se questa condizione non è rispettata. Prendiamo un sistema di coordinate polari (r, φ), il cui polo si trovi nel centro del Sole. La velocità del pianeta v si può scomporre in una velocità radiale $v_r = \dot{r}$ ed in una velocità azimutale $v_\varphi = r\dot{\varphi}$ perpendicolare alla prima. Evidentemente $v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2$. Le leggi di conservazione dell'energia e del momento della quntità di moto del pianeta si possono scrivere nella forma

$$\frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - G\frac{M}{r} = \varepsilon, \tag{62.1}$$

$$\frac{1}{2}r^2\dot{\varphi} = \sigma, \tag{62.2}$$

dove M è la massa del Sole, ε l'energia totale per unità di massa del pianeta, σ la velocità arcolare, che rimane costante durante il moto. Per ottenere l'equazione della traiettoria del pianeta eliminiamo il tempo. Considerando r una funzione di φ, abbiamo $\dot{r} = \dfrac{dr}{d\varphi}\dot{\varphi}$. Portando questo valore nell'equazione (62.1) ed eliminando $\dot{\varphi}$ per mezzo dell'equazione (62.2) si ottiene

$$\left(\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + \frac{1}{r^2} = \frac{1}{2\sigma^2}\left(\varepsilon + \frac{GM}{r}\right). \tag{62.3}$$

Introduciamo una nuova variabile $\rho = -\dfrac{1}{r} + \dfrac{1}{p}$, dove p è una costante il cui valore definiremo più tardi. Allora l'equazione (62.3) si trasformerà in

$$\left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2 + \left(\rho - \frac{1}{p}\right)^2 = \frac{\varepsilon}{2\sigma^2} + \frac{GM}{2\sigma^2}\left(-\rho + \frac{1}{p}\right).$$

Scegliamo la costante p in modo che da questa equazione scompaiano i termini di primo grado rispetto a ρ. Per questo si pone

$$p = \frac{4\sigma^2}{GM}. \tag{62.4}$$

Con la costante p così scelta si ottiene

$$\left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2 = \frac{\varepsilon}{2\sigma^2} + \frac{1}{p^2} - \rho^2.$$

Dato che la grandezza che figura al primo membro è non negativa anche la costante $\dfrac{1}{p^2} + \dfrac{\varepsilon}{2\sigma^2}$ è non negativa e si può indicarla con A^2:

$$A^2 = \frac{1}{p^2} + \frac{\varepsilon}{2\sigma^2}. \tag{62.5}$$

Ne deriva

$$\left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2 = A^2 - \rho^2. \tag{62.6}$$

È evidente che $A^2 \geqslant \rho^2$ e si può dunque porre $\rho/A = \cos\Theta$, dove Θ è una nuova incognita. Allora si ha

$$A^2 - \rho^2 = A^2 \sin^2\Theta, \qquad \frac{d\rho}{d\varphi} = -A\sin\Theta\,\frac{d\Theta}{d\varphi}.$$

Portando questa espressione nell'equazione (62.6) e dividendo per $A\sin\Theta$, si ottiene $\frac{d\Theta}{d\varphi} = \pm 1$, da cui $\Theta = \pm\varphi + \varphi_0$. Quindi $\rho = A\cos(\pm\varphi + \varphi_0) = A\cos(\varphi \pm \varphi_0)$. Nell'ultima espressione il doppio segno $\pm$ davanti a φ_0 è inutile poiché φ_0 è una costante d'integrazione. Riprendendo le indicazioni già usate otteniamo

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p}\,[1 - e\cos(\varphi + \varphi_0)], \tag{62.7}$$

dove

$$e = pA = \sqrt{1 + \frac{\varepsilon p^2}{2\sigma^2}} = \sqrt{1 + \frac{8\varepsilon\sigma^2}{G^2M^2}}. \tag{62.8}$$

Senza limitare la generalità si può porre $\varphi_0 = 0$. Questo significa semplicemente che il calcolo degli angoli φ è fatto dalla posizione del raggio vettore del pianeta, quando la sua lunghezza è uguale a $p/(1 - e)$. Con questo calcolo l'equazione (62.7) assume la forma

$$r = \frac{p}{1 - e\cos\varphi}. \tag{62.9}$$

È l'equazione di una conica di eccentricità e e di parametro p. Se $\varepsilon < 0$, $e < 1$ (ellisse); se $\varepsilon = 0$, $e = 1$ (parabola); se $\varepsilon > 0$, $e > 1$ (iperbole). Siamo giunti ai risultati già ottenuti con procedimenti diversi nel § 57. Ed ora è facile calcolare gli altri parametri dell'orbita e nel caso di moto ellittico ottenere la terza legge di Keplero. Poiché abbiamo già eseguito questi calcoli, non è il caso di presentarli una seconda volta.

IX. STUDIO DEL MOTO IN SISTEMI DI RIFERIMENTO NON INERZIALI

§ 63. *Forze di inerzia nei sistemi di riferimento in moto rettilineo accelerato*

1. Finora abbiamo riferito i moti ad uno dei numerosi sistemi di *riferimento inerziali.* In questi sistemi di riferimento l'equazione fondamentale del moto di un punto materiale è l'equazione che traduce in simboli matematici la *seconda legge di Newton.* Esprimiamo quest'equazione nella forma

$$m\boldsymbol{a}_{\text{ass}} = \boldsymbol{F}, \tag{63.1}$$

attribuendo all'accelerazione $\boldsymbol{a}$ l'indice «ass» il cui significato verrà chiarito più tardi. Fissiamoci ora l'obbiettivo di scrivere le equazioni del moto in *sistemi di riferimento non inerziali,* cioè in sistemi che sono in moto accelerato rispetto ai sistemi di riferimento inerziali. Si tratta quindi di stabilire le *leggi di trasformazione delle forze e delle accelerazioni che* occorre applicare per poter passare da un sistema di riferimento inerziale ad un qualunque sistema di riferimento non inerziale. La fisica prerelativistica considerava questo problema puramente cinematico e lo risolveva partendo dalle seguenti due ipotesi: 1) il tempo è assoluto, cioè gli intervalli di tempo tra due avvenimenti qualsiasi sono uguali in tutti i sistemi di riferimento; 2) lo spazio è assoluto, cioè la distanza tra due punti (due corpi materiali) qualsiasi è uguale in tutti i sistemi di riferimento. Nella fisica prerelativistica si ammetteva quindi che la *distanza e gli intervalli di tempo sono invarianti rispetto al passaggio da un sistema di riferimento ad un qualsiasi altro sistema in moto arbitrario.* Ambedue le asserzioni parevano talmente ovvie da non avere neanche bisogno di essere citate esplicitamente. Soltanto in seguito, un'analisi profonda eseguita alla luce della teoria della relatività aveva rivelato il *carattere di postulato* di queste due ipotesi. Ne risultava che ambedue le ipotesi *sono approssimativamente corrette soltanto per moti lenti e non sono valide per moti veloci.* Ci limitiamo per ora al caso non relativistico, cioè *supporremo che tutte le velocità, ivi comprese le velocità relative degli stessi sistemi di riferimento siano piccole rispetto alla velocità della luce nel vuoto.*

2. Conveniamo di chiamare *fisso* un qualunque sistema di riferimento inerziale ed *assoluto* il moto rispetto a questo sistema. Nella formula (63.1) si tratta proprio dell'accelerazione di un tale moto *assoluto.* Non si deve at-

tribuire ai concetti «sistema di riferimento fisso» e «moto assoluto» un significato diverso da quello già indicato. I due concetti esprimono pure convenzioni e non contraddicono l'enunciato secondo cui ogni moto è *relativo.* Un corpo a riposo in un sistema di riferimento mobile è trainato da quest'ultimo nel suo moto rispetto al sistema di riferimento fisso. Un tale moto del corpo si chiama di *trascinamento.* Il moto assoluto di un corpo si compone dei suoi moti relativo e di trascinamento.

Questo capitolo si occupa dello studio del *moto relativo*. A questo scopo bisogna prima di tutto trovare le equazioni del moto relativo. *Intendiamo per equazioni del moto le relazioni con le quali vengono definite le accelerazioni di tutti i punti materiali di un sistema meccanico nel sistema di riferimento rispetto al quale si considera il moto.* Quando il sistema di riferimento preso in esame è in moto rettilineo ed uniforme rispetto al sistema di riferimento fisso, esso è inerziale. In questo caso le equazioni del moto relativo coincidono con le equazioni del *moto assoluto,* verificano quindi le leggi di Newton. Perciò è sufficiente considerare soltanto i casi in cui il sistema di riferimento in esame si muove di moto accelerato rispetto al sistema fisso.

3. Prendiamo due sistemi di riferimento: un sistema fisso S_1 con l'origine delle coordinate nel punto O_1, e un sistema mobile S con l'origine delle coordinate nel punto O (fig. 182). Indichiamo con $\boldsymbol{R}_0$ il raggio vettore O_1O

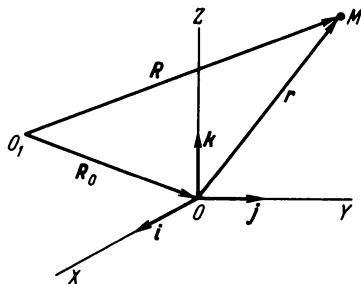



Fig. 182.

condotto dall'origine fissa O_1 all'origine mobile O. Sia M un punto materiale qualunque. La sua posizione nel sistema di riferimento fisso è definita dal raggio vettore $\boldsymbol{R}$, e in quello mobile dal raggio vettore $\boldsymbol{R} = OM$. I vettori $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{R}_0$ e $\boldsymbol{r}$ in ogni istante sono collegati tra di loro mediante la relazione

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}_0 + \boldsymbol{r}. \tag{63.2}$$

Derivando due volte di seguito questa relazione rispetto al tempo, si ottiene

$$\dot{\boldsymbol{R}} = \dot{\boldsymbol{R}}_0 + \dot{\boldsymbol{r}}, \tag{63.3}$$

$$\ddot{\boldsymbol{R}} = \ddot{\boldsymbol{R}}_0 + \ddot{\boldsymbol{r}}. \tag{63.4}$$

Per chiarire meglio e più a fondo il problema, consideriamo dapprima il caso particolare in cui il sistema di riferimento S è in moto *traslatorio* rispetto al sistema di riferimento S_1. È evidente che il vettore $\dot{\boldsymbol{R}}$ esprime sempre la velocità assoluta $\boldsymbol{v}_{ass}$ e il vettore $\ddot{\boldsymbol{R}}$ l'accelerazione assoluta $\boldsymbol{a}_{ass}$ del punto mobile M. Il vettore $\boldsymbol{v}_0 \equiv \dot{\boldsymbol{R}}_0$ è la velocità assoluta, ed $\boldsymbol{a}_0 \equiv \ddot{\boldsymbol{R}}_0$ l'accelerazione assoluta dell'origine O delle coordinate del sistema di riferimento S. In caso di moto traslatorio queste grandezze coincidono rispettivamente con la velocità e l'accelerazione di un qualsiasi punto del sistema di riferimento S. Quindi $\boldsymbol{v}_0$ e $\boldsymbol{a}_0$ devono essere interpretate come *velocità* e *accelerazione di trascinamento*. Esattamente come nel moto traslatorio, i vettori $\dot{\boldsymbol{r}}$ e $\ddot{\boldsymbol{r}}$ rappresentano rispettivamente la *velocità* e l'*accelerazione relative*, cioè i valori di queste grandezze nel sistema di riferimento mobile S. Dunque, nel moto traslatorio

$$\boldsymbol{v}_{ass} = \boldsymbol{v}_{rel} + \boldsymbol{v}_{tra}, \tag{63.5}$$

$$\boldsymbol{a}_{ass} = \boldsymbol{a}_{rel} + \boldsymbol{a}_{tra}, \tag{63.6}$$

con $\boldsymbol{a}_{tra} = \boldsymbol{a}_0$, $\boldsymbol{v}_{tra} = \boldsymbol{v}_0$.

4. Portiamo ora l'espressione (63.6) nell'equazione (63.1) e trasportiamo il termine contenente $\boldsymbol{a}_{tra}$ al secondo membro, ottenendo

$$m\boldsymbol{a}_{rel} = \boldsymbol{F} - m\boldsymbol{a}_0. \tag{63.7}$$

È questa l'equazione del moto relativo di un punto materiale. Si può considerare formalmente il secondo termine di questa equazione come una sorta di «forza» che agisce sul punto materiale nel sistema di riferimento mobile. Quindi in ogni sistema di riferimento la forza viene definita come un vettore uguale al prodotto della massa del punto materiale per la sua accelerazione nel sistema di riferimento in esame. Non è necessario che questa «forza» sia il risultato dell'interazione dei corpi. Però bisogna disporre di qualche procedimento indipendente che permetta di esprimere la «forza» attraverso le coordinate e le velocità del punto mobile. Soltanto a questa condizione saremo in grado di scrivere un'equazione del moto tipo (63.7) ed è a questo che viene ricondotto il contenuto reale delle leggi della meccanica.

La «forza» $\boldsymbol{F} - m\boldsymbol{a}_0$ possiede due componenti sostanzialmente differenti. La prima componente $\boldsymbol{F}$ è una «forza reale» nel senso che è il risultato dell'interazione dei corpi. Essa dipende soltanto dalle differenze delle coordinate di posizione e dalle velocità dei punti materiali in interazione. Nella cinematica non relativistica tutte queste differenze non variano quando si passa da un sistema di riferimento ad un altro sistema di riferimento in moto arbitrario. Quindi non varia neanche la forza $\boldsymbol{F}$; ciò significa che è *invariante rispetto ad un tale passaggio.*

Un carattere del tutto diverso ha la componente — $m\boldsymbol{a}_0$, che nasce non per interazione dei corpi, ma per il *moto accelerato del sistema di riferimento.* Essa si chiama *forza d'inerzia,* più esattamente *forza d'inerzia di*

traslazione, poiché ci limitiamo qui allo studio dei moti traslatori del sistema di riferimento mobile. Passando ad un altro sistema di riferimento in moto accelerato, le forze d'inerzia cambiano: *non sono invarianti* rispetto a questo passaggio ed in ciò si distinguono dalle «forze reali» che sorgono per interazione dei corpi. Un'altra differenza consiste nel fatto che le *forze d'inerzia non ubbidiscono al principio di azione* e *reazione*. Se un corpo è sottoposto all'azione della forza d'inerzia, non esiste una forza di reazione applicata ad un altro corpo. Quindi il moto dei corpi sottoposto all'azione di una forza d'inerzia è analogo al moto in campi di forza esterni. La *forza d'inerzia è sempre una forza esterna rispetto a qualsiasi sistema mobile di corpi materiali.*

5. Sono reali o fittizie le forze d'inerzia? La risposta a questa questione dipende dal significato che si vuole dare alle parole «reale» e «fittizio». Se ci si attiene alla meccanica newtoniana secondo la quale tutte le forze devono essere risultato dell'interazione dei corpi, allora le forze d'inerzia vanno considerate forze fittizie che scompaiono nei sistemi di riferimento inerziali. Ma un tale punto di vista non è l'unico poiché tutte le interazioni si effettuano attraverso campi di forza e sono trasmesse con velocità finita. Le forze d'inerzia possono essere considerate anche come azioni che i corpi subiscono da parte di campi di forza reali. È vero che questi campi si trasformano in modo determinato quando si passa da un sistema di riferimento in esame ad un altro sistema in moto accelerato rispetto al primo, ma non è questo un motivo sufficiente per considerare queste forze illusorie. Infatti, anche le forze elettriche e magnetiche si trasformano quando si passa da un sistema di riferimento ad un altro (anche se i due sistemi sono inerziali). Ciò nonostante nessuno dubita dell'esistenza reale dei campi elettromagnetici.

Qualunque sia il punto di vista adottato, esistono molti fenomeni che possono essere interpretati come manifestazioni di forze d'inerzia. Quando un treno accelera il suo moto, i passeggeri sono sottoposti all'azione di una forza diretta in senso opposto alla direzione del treno. Chi è seduto nel senso della direzione del treno, viene schiacciato da questa forza contro la spalliera del sedile. È questa la forza d'inerzia. Quando il treno rallenta, la forza d'inerzia cambia direzione e tende ad allontanare il corpo del passeggero dalla spalliera. Se nella vettura in moto accelerato è sospeso un pendolo la forza d'inerzia tende a farlo deviare in senso opposto a quello dell'accelerazione. In stato di equilibrio la forza d'inerzia viene equilibrata dalla forza di gravità e dalla tensione del filo di sospensione del pendolo. Le forze d'inerzia si manifestano in modo evidente al momento di una brusca frenata del treno. Le forze d'inerzia sottopongono il pilota ed il cosmonauta a sovraccarichi in caso di grandi accelerazioni dell'aereo o al momento di un lancio o di una frenata delle navi spaziali.

Certo, tutti questi fenomeni possono essere interpretati senza ricorrere alla nozione di forza d'inerzia attraverso lo studio del moto rispetto ad un

sistema di riferimento inerziale. Nel caso del pendolo, ad esempio, il pendolo è in moto accelerato rispetto al sistema di riferimento inerziale adottato.

Il pendolo deve deviare all'indietro per far apparire una forza di tensione con una componente orizzontale diretta in avanti. Questa componente comunica al pendolo l'accelerazione. Però in molti casi è più semplice studiare i fenomeni direttamente nel sistema di riferimento mobile senza passare ad un sistema di riferimento inerziale. Inoltre è difficile talvolta suddividere la forza totale che agisce nel sistema di riferimento non inerziale, in forza «reale» che sorge dall'interazione dei corpi, e in forza d'inerzia «fittizia» determinata dal moto accelerato del sistema di riferimento.

§ 64. *Forze d'inerzia in un sistema di riferimento in moto accelerato arbitrario*

1. Supponiamo ora che il sistema di riferimento S (cfr. fig. 182) si sposti rispetto al sistema di riferimento fisso S_1 *in modo totalmente arbitrario.* Questo moto può essere scomposto in due parti: *un moto traslatorio* alla velocità v_0 uguale alla velocità di spostamento dell'origine O delle coordinate ed un *moto di rotazione* intorno ad un asse istantaneo che passa attraverso l'origine O. Indichiamo la velocità angolare di questa rotazione con ω; essa può variare sia di modulo che di senso. Siano $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ i vettori unitari degli assi di coordinate del sistema di riferimento S che supporremo ortogonali. Poiché i vettori sono unitari, le loro lunghezze rimangono invariabili, ma la loro direzione e il loro senso possono variare col passar del tempo; in altre parole sono vettori variabili. Ciascuno di loro ruota alla velocità angolare ω. Le loro derivate rispetto al tempo sono determinate dalle formule (46.11). Scriviamo di nuovo queste formule:

$$\frac{d\boldsymbol{i}}{dt} = [\boldsymbol{\omega i}], \qquad \frac{d\boldsymbol{j}}{dt} = [\boldsymbol{\omega j}], \qquad \frac{d\boldsymbol{k}}{dt} = [\boldsymbol{\omega k}]. \tag{64.1}$$

Il ragionamento rimane esattamente lo stesso fatto nel paragrafo precedente. Soltanto i calcoli diventano più complicati. Le formule (63.2), (63.3) e (63.4), s'intende, restano invariate. Rimane invariata del resto anche l'interpretazione dei termini $\dot{\boldsymbol{R}}_0$ e $\ddot{\boldsymbol{R}}_0$ di cui il primo è la velocità assoluta v_0 ed il secondo l'accelerazione assoluta $\boldsymbol{a}_0$ dell'origine delle coordinate O. Cambiano i termini $\dot{\boldsymbol{r}}$ e $\ddot{\boldsymbol{r}}$ e sono questi che devono essere calcolati.

2. Siano x, y, z le coordinate di un punto mobile M nel sistema di riferimento mobile S. Si ha allora

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}. \tag{64.2}$$

Derivando questa espressione, si ottiene

$$\dot{r} = (\dot{x}i + \dot{y}j + \dot{z}k) + \left(x\frac{di}{dt} + y\frac{dj}{dt} + z\frac{dk}{dt}\right).$$

Nella prima parentesi si derivano soltanto le coordinate x, y, z come se i vettori unitari i, j, k e con questi il sistema di riferimento S fossero immobili. Tale derivazione viene eseguita da un osservatore che trovandosi nel sistema di riferimento S si proponesse di determinare la velocità del punto M in questo sistema, cioè secondo la nostra terminologia avrebbe determinato la velocità relativa v_{rel}. Quindi

$$v_{rel} = \dot{x}i + \dot{y}j + \dot{z}k. \tag{64.3}$$

Utilizzando in seguito le formule (64.1) si ottiene

$$x\frac{di}{dt} + y\frac{dj}{dt} + z\frac{dk}{dt} = x[\omega i] + y[\omega j] + z[\omega k] =$$

$$= [\omega(xi + yj + zk)] = [\omega r].$$

Quindi

$$\dot{r} = v_{rel} + [\omega r]. \tag{64.4}$$

Infine per la velocità assoluta si può scrivere

$$v_{ass} = v_{rel} + v_{tra}, \tag{64.5}$$

espressione che coincide con (63.5), con la differenza che la velocità di trascinamento è data dall'espressione

$$v_{tra} = v_0 + [\omega r]. \tag{64.6}$$

Questa grandezza rappresenta la velocità assoluta che avrebbe il punto M se fosse a riposo nel sistema di riferimento mobile S. È per questa ragione che essa si chiama velocità di trascinamento. La velocità di trascinamento è composta da due parti: la velocità v_0 alla quale si muove l'origine delle coordinate O e la velocità $[\omega r]$ dovuta alla rotazione del sistema di riferimento S intorno alla sua origine O.

3. Il problema dell'accelerazione assoluta è più complesso. Per calcolare l'accelerazione assoluta deriviamo l'espressione (64.5) rispetto al tempo. Tenendo conto della relazione (64.6) si ottiene

$$a_{ass} \equiv \dot{v}_{ass} = \dot{v}_{rel} + \dot{v}_0 + [\omega\dot{r}] + [\dot{\omega}r].$$

La derivata $\dot{v}_{rel}$ si ottiene derivando l'espressione (64.3). Si devono evidentemente derivare non soltanto le componenti della velocità relativa $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$, ma anche i vettori unitari i, j, k. Si procede esattamene come nel caso della derivazione dell'espressione (64.2). Si può scrivere, dunque, per analogia con la formula (64.4)

$$\dot{v}_{rel} = a_{rel} + [\omega v_{rel}], \tag{64.7}$$

in cui

$$a_{rel} = \ddot{x}i + \ddot{y}j + \ddot{z}k. \qquad (64.8)$$

L'ultima espressione ci dà l'accelerazione relativa. Per ottenerla bisogna derivare due volte di seguito le coordinate x, y, z considerando i vettori unitari i, j, k fissi. Questo sarebbe il procedimento usato da chi si occupasse dello studio del punto M rispetto al sistema di riferimento S senza essere a conoscenza del fatto che questo sistema è in moto. Per questo motivo la grandezza (64.8) si chiama accelerazione relativa.

Trasformiamo il termine $[\omega\dot{r}]$, portandovi l'espressione (64.6) al posto di $\dot{r}$:

$$[\omega\dot{r}] = [\omega v_{rel}] + [\omega[\omega r]].$$

Per l'accelerazione assoluta si ottiene infine

$$a_{ass} = a_{rel} + 2[\omega v_{rel}] + \dot{v}_0 + [\omega[\omega r]] + [\dot{\omega} r]. \qquad (64.9)$$

Questo risultato si può scrivere nella forma

$$a_{ass} = a_{rel} + a_{cor} + a_{tra}, \qquad (64.10)$$

in cui

$$a_{cor} = 2[\omega v_{rel}], \qquad (64.11)$$

$$a_{tra} = \dot{v}_0 + [\omega[\omega r]] + [\dot{\omega} r]. \qquad (64.12)$$

Il vettore a_{tra} dipende soltanto dal moto del sistema di riferimento S rispetto al sistema di riferimento fisso S_1. Questa è la sola accelerazione che subirebbe un punto che si trovasse a riposo nel sistema di riferimento S. Per questo il vettore a_{tra} si chiama *accelerazione di trascinamento*. Infine, la componente $a_{cor} = 2[\omega v_{rel}]$ dipende sia dal moto relativo che dal moto di trascinamento e si chiama *accelerazione di Coriolis* secondo il nome dello studioso francese Coriolis (1792-1843) che ha introdotto questa nozione in meccanica. L'equazione (64.10) in cui figurano le espressioni per differenti componenti dell'accelerazione assoluta esprime il *teorema* detto *di Coriolis*. Secondo questo teorema l'*accelerazione assoluta è la somma vettoriale dell'accelerazione relativa, dell'accelerazione di Coriolis e dell'accelerazione di trascinamento.*

Vediamo che cosa rappresenta l'accelerazione di trascinamento. Utilizziamo a questo scopo la formula (64.12). Il termine $\dot{v}_0$ è l'accelerazione di trascinamento dovuta al moto traslatorio accelerato del sistema di riferimento S, identico al moto dell'origine O delle coordinate del sistema di riferimento. Gli altri due termini della somma sono dovuti alla rotazione del sistema di riferimento S, di cui il termine $[\dot{\omega} r]$ è la parte di accelerazione di trascinamento dovuta alla non uniformità della rotazione. Quando la rotazione è uniforme (ω = cost) questo termine si annulla. L'altro termine $[\omega[\omega r]]$ indicato con a_{cp} è l'accelerazione centripeta diretta verso l'asse

istantaneo di rotazione. Infatti, scriviamo il raggio vettore $\boldsymbol{r}$ nella forma $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_\perp + \boldsymbol{r}_\parallel$, dove $\boldsymbol{r}_\parallel$ e $\boldsymbol{r}_\perp$ sono rispettivamente le componenti di questo raggio vettore, dirette lungo l'asse di rotazione e lungo la perpendicolare a quest'asse. Dato che $[\boldsymbol{\omega r}_\parallel] = 0$, si ha

$$\boldsymbol{a}_{\text{cp}} \equiv [\boldsymbol{\omega}[\boldsymbol{\omega r}]] = [\boldsymbol{\omega}[\boldsymbol{\omega r}_\perp]].$$

Sviluppando secondo la formula conosciuta il doppio prodotto vettoriale e considerando che $(\boldsymbol{\omega r}_\perp) = 0$, si ottiene

$$\boldsymbol{a}_{\text{cp}} = -\,\omega^2 \boldsymbol{r}_\perp. \tag{64.13}$$

Questa formula dimostra la nostra asserzione.

4. Si potrebbe ora scrivere l'equazione del moto relativo di un punto materiale; preferiamo però dare ancora una dimostrazione del teorema di Coriolis partendo da un caso particolare e chiarire meglio l'origine dell'accelerazione di Coriolis nonché degli altri termini di cui si compone l'accelerazione assoluta.

Prendiamo una pallina M (fig. 183) in moto lungo un'asta rigida che ruota intorno ad un asse fisso alla velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ perpendicolare al

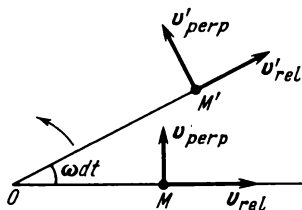



Fig. 183.

piano del disegno. La velocità assoluta $\boldsymbol{v}_{\text{ass}}$ della pallina si compone di due velocità reciprocamente perpendicolari: la velocità di spostamento lungo l'asta e la velocità perpendicolare rispetto all'asta. La prima è la velocità relativa al sistema di riferimento rispetto al quale l'asta è in stato di quiete. La seconda nasce a causa della rotazione dell'asta ed è perciò la velocità di trascinamento. Quindi $\boldsymbol{v}_{\text{ass}} = \boldsymbol{v}_{\text{rel}} + \boldsymbol{v}_{\text{tra}}$ e quindi $\boldsymbol{a}_{\text{ass}} = \dot{\boldsymbol{v}}_{\text{rel}} + \dot{\boldsymbol{v}}_{\text{tra}}$. Supponiamo che durante il tempo dt l'asta ruoti di un angolo $d\varphi = \omega dt$. Durante lo stesso intervallo di tempo dt la pallina si è spostata dalla posizione M alla posizione M'. Calcoliamo l'incremento che subisce durante lo stesso periodo di tempo il vettore $\boldsymbol{v}_{\text{rel}}$. Se non ci fosse la rotazione dell'asta, questo incremento si avrebbe soltanto a causa della non uniformità del moto della pallina lungo l'asta e sarebbe uguale ad $\boldsymbol{a}_{\text{rel}} dt$. Ma dato che l'asta ruota, il vettore $\boldsymbol{v}_{\text{rel}}$ avrà un incremento supplementare uguale a $[d\boldsymbol{\varphi}\, \boldsymbol{v}_{\text{rel}}]$. L'incremento totale del vettore $\boldsymbol{v}_{\text{rel}}$ sarà allora

$$d\boldsymbol{v}_{\text{rel}} = \boldsymbol{a}_{\text{rel}} dt + [\boldsymbol{\omega v}_{\text{rel}}] dt.$$

Vediamo ora l'incremento del vettore $v_{tra} = [\omega r]$. È evidente che $dv_{tra} = [d\omega r] + [\omega dr]$. Il primo termine compare a causa della rotazione non uniforme dell'asta ed è uguale a $[\dot{\omega} r]dt$. Il secondo termine è determinato dallo spostamento del punto M nello spazio (assoluto) e si esprime con $[\omega v_{ass}]dt = [\omega v_{rel}]dt + [\omega v_{tra}]dt$. Quindi

$$dv_{tra} = [\dot{\omega} r]dt + [\omega v_{rel}]dt + [\omega v_{tra}]dt.$$

Addizionando gli incrementi dei due vettori, v_{rel} e v_{tra}, si ottiene

$$a_{ass} = a_{rel} + 2[\omega v_{rel}] + [\omega[\omega r]] + [\dot{\omega} r].$$

Come risulta chiaramente dalla dimostrazione precedente, l'accelerazione di Coriolis è composta di due termini uguali. Il primo è dovuto alla rotazione del vettore v_{rel} insieme all'asta; il secondo all'incremento della velocità di trascinamento v_{tra}, che compare in seguito all'avvicinamento della pallina all'asse di rotazione o al suo allontanamento da esso. Evidentemente la dimostrazione precedente è valida anche nel caso in cui la direzione dell'asse di rotazione varia con il passare del tempo.

L'accelerazione di Coriolis $2[\omega v_{rel}]$ è diretta perpendicolarmente all'asta in rotazione. Perché la pallina M acquisti questa accelerazione, l'asta deve esercitare sulla pallina una pressione laterale. La forza di pressione laterale è uguale a $2m[\omega v_{rel}]$, dove m è la massa del corpo M. A sua volta il corpo M agisce sull'asta con una forza uguale e opposta $\boldsymbol{F} = 2m[v_{rel}\omega]$. Se il corpo si allontana dall'asse di rotazione (fig. 184, *a*), la forza $\boldsymbol{F}$ è diretta in senso opposto a quello della rotazione e la rallenta.

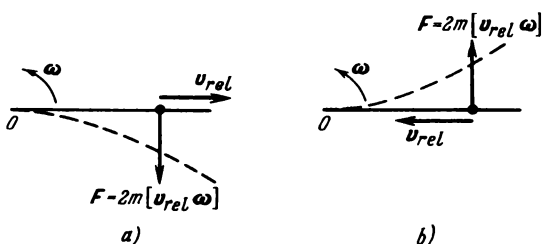



Fig. 184.

L'asta si incurva in modo tale che la sua parte convessa è rivolta nel senso della rotazione come indicato dalla linea tratteggiata. Al contrario, se il corpo si avvicina all'asse di rotazione (fig. 184, *b*), la forza $\boldsymbol{F}$ è diretta nel senso della rotazione dell'asta. In questo caso la velocità angolare di rotazione dell'asta aumenta e l'asta si incurva in modo che la sua concavità è rivolta nel senso della rotazione. Nell'esperimento con lo sgabello di Žukovsky descritto nel paragrafo 34 (fig. 60), sono queste stesse forze di pressione laterali che attraverso i manubri agiscono sullo sperimentatore quando li avvicina all'asse di rotazione oppure li allontana. Sono queste le forze che

fanno variare la velocità angolare di rotazione dello sgabello insieme allo sperimentatore che vi è seduto. In generale tutti i fenomeni dovuti ad una variazione della velocità angolare di rotazione di un corpo isolato ed alla variazione del suo momento d'inerzia possono essere spiegati con l'azione di queste forze di pressione laterale.

5. Ed ora cerchiamo di stabilire le equazioni del moto relativo. Procediamo esattamente come nel paragrafo precedente. Portiamo l'espressione (64.10) nell'equazione (63.1) e riportiamo tutti i termini nel secondo membro, ad eccezione del termine contenente l'accelerazione relativa. Così si ottiene l'equazione

$$m\boldsymbol{a}_{\mathrm{rel}} = \boldsymbol{F} - m\boldsymbol{a}_{\mathrm{cor}} - m\boldsymbol{a}_{\mathrm{tra}} \tag{64.14}$$

ossia sviluppando

$$m\boldsymbol{a}_{\mathrm{rel}} = \boldsymbol{F} + 2m[\boldsymbol{v}_{\mathrm{rel}}\boldsymbol{\omega}] - m\dot{\boldsymbol{v}}_0 + m\omega^2\boldsymbol{r}_{\perp} - m[\dot{\boldsymbol{\omega}}\boldsymbol{r}]. \tag{64.15}$$

Alla forza «reale» $\boldsymbol{F}$ si sono aggiunte due forze d'inerzia: la *forza* detta *di Coriolis*

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{cor}} = -m\boldsymbol{a}_{\mathrm{cor}} = 2m[\boldsymbol{v}_{\mathrm{rel}}\boldsymbol{\omega}] \tag{64.16}$$

e la *forza d'inerzia di trascinamento*

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{tra}} = -m\boldsymbol{a}_{\mathrm{tra}} = -m\dot{\boldsymbol{v}}_0 + m\omega^2\boldsymbol{r}_{\perp} - m[\dot{\boldsymbol{\omega}}\boldsymbol{r}]. \tag{64.17}$$

Tutte le osservazioni generali esposte nel paragrafo precedente valgono anche per queste forze d'inerzia in quanto riguardavano forze d'inerzia che compaiono nel moto traslatorio accelerato di un sistema di riferimento.

6. In generale, la *forza d'inerzia di trascinamento* è composta da tre termini. Del primo termine $-m\dot{\boldsymbol{v}}_0$ si è già parlato nel precedente paragrafo. È la forza d'inerzia di traslazione dovuta al moto accelerato dell'origine O delle coordinate del sistema di riferimento. L'ultimo termine $-m[\dot{\boldsymbol{\omega}}\boldsymbol{r}]$ è determinato *dalla nonuniformità della rotazione* del sistema di riferimento. Non possiede una denominazione particolare. Il secondo termine

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{cf}} = m\omega^2\boldsymbol{r}_{\perp} \tag{64.18}$$

si chiama *forza d'inerzia centrifuga* o semplicemente *forza centrifuga*. All'azione della forza centrifuga è sottoposto, ad esempio, un passeggero di un autobus in moto che effettua una curva. I sovraccarichi che subisce il pilota di un aereo che esegue delle acrobazie aeree a grande velocità sono pure dovuti in sostanza alle forze centrifughe. Se si attaccano ad una centrifuga delle palline sospese a dei fili e poi si mette la centrifuga in rotazione rapida le forze centrifughe allontanano le palline dall'asse di rotazione. L'angolo di deviazione è tanto più grande quanto più grande è la distanza della pallina dall'asse di rotazione. Le forze centrifughe vengono adoperate nelle essiccatrici centrifughe per torcere la biancheria e nelle scrematrici per separare la panna dal latte.

7. Le forze centrifughe, come del resto tutte le forze d'inerzia, si manifestano soltanto nei sistemi in moto accelerato (rotazione) e scompaiono

quando si passa a sistemi inerziali. Questa particolarità non va dimenticata se non si vuole incorrere in paradossi che mettono in imbarazzo gli studenti. Facciamo un esempio di un paradosso del genere. Prendiamo un corpo in moto circolare. Esso è sottoposto a due forze: la forza centripeta $\boldsymbol{F}_1$ orientata verso il centro del cerchio e la forza centrifuga $\boldsymbol{F}_2$ orientata in senso opposto. Queste forze sono uguali e si equilibrano reciprocamente: $\boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 = 0$. Secondo la legge d'inerzia il corpo si muoverà in modo rettilineo e uniforme. La contraddizione sta nel fatto che il moto è riferito ad un sistema di riferimento fisso (inerziale), in cui non si hanno forze centrifughe. Esiste solo la forza centripeta $\boldsymbol{F}_1$ che comunica al corpo un'accelerazione. Questa può essere, ad esempio, la tensione del filo al quale è attaccato il corpo. Si deve introdurre la forza centrifuga soltanto nel caso in cui il moto è riferito ad un sistema di riferimento in rotazione. In un tale sistema il corpo è sottoposto ad una forza centrifuga equilibrata da una forza centripeta. Ora non sorge nessuna contraddizione poiché nel sistema di riferimento in rotazione il corpo è a riposo.

Spesso la confusione nasce dal fatto che in meccanica tecnica si utilizza la locuzione «forza centrifuga» con un significato completamente differente. Si intende per forza centrifuga la *forza di reazione* con la quale il corpo A in moto circolare agisce sul corpo B che lo mette in rotazione. La forza che il corpo B esercita sul corpo A, che è uguale e opposta alla forza di reazione, è detta forza centripeta. Supponiamo, ad esempio, che una pallina sia attaccata a un filo. Prendiamo in mano l'estremità libera del filo e facciamo ruotare la pallina. La forza centripeta è qui la tensione del filo che attira la pallina verso il centro del cerchio. La forza centrifuga proviene anch'essa dalla tensione del filo, ma è applicata alla mano. Le forze centripeta e centrifuga così concepite sono sempre applicate a *corpi differenti* e sono ambedue delle «forze reali» nel senso della meccanica newtoniana, cioè nascono dall'interazione dei corpi. Per quanto riguarda la terminologia in sé, non c'è niente da obiettare. Si può invece discutere sull'opportunità di adottarla. La prima obiezione può essere sollevata quando si afferma che la forza centrifuga, concepita nei termini sopra riportati, tenda ad allontanare il corpo dall'asse di rotazione. Una tale affermazione è errata poiché non essendo la forza centrifuga applicata al corpo in rotazione, non può esercitare su esso nessuna azione. Infatti, quando si dice che la forza centrifuga tende a deviare il corpo dall'asse di rotazione, questa affermazione va riferita alla forza centrifuga intesa come *forza d'inerzia*. E perciò ci riserviamo di usare il termine forza centrifuga nei casi in cui essa è una *forza d'inerzia* che si manifesta soltanto nei sistemi di riferimento in rotazione e scompare nei sistemi di riferimento inerziali.

8. Esaminiamo ora la forza d'inerzia di Coriolis (64.16). Essa compare solo quando il sistema di riferimento *S è in rotazione* ed il punto materiale *è in moto rispetto a questo sistema.* La forza di Coriolis si distingue dalle altre forze d'inerzia per il fatto che essa dipende dalla velocità relativa v_{rel}.

Quando la velocità relativa si annulla, anche la forza di Coriolis si annulla. Se un passeggero è in piedi in un autobus in moto, subisce l'azione della forza centrifuga durante le curve. Ma se durante la curva il passeggero si sposta nell'autobus, egli in più è sottoposto alla forza di Coriolis. Ecco perché nelle curve si conserva l'equilibrio più facilmente stando immobili che muovendosi. Dato che la forza di Coriolis è sempre perpendicolare rispetto alla velocità relativa, essa non effettua nessun lavoro durante il moto relativo. La forza di Coriolis è quindi una forza *giroscopica* (cfr. § 24, punto 6).

Problemi

1. In che consiste l'errore nel seguente ragionamento: siano A e B due punti materali immobili la distanza tra i quali è uguale a r. Lo stato di quiete del punto B si può considerare come risultato dell'addizione delle due rotazioni di velocità angolari uguali e costanti ma di senso opposto $+\omega$ e $-\omega$. Durante la prima rotazione compare un'accelerazione centripeta $\boldsymbol{a}_1 = \omega^2\boldsymbol{r}$ e durante la seconda un'accelerazione centripeta $\boldsymbol{a}_2 = (-\omega)^2\boldsymbol{r} = \omega^2\boldsymbol{r} = \boldsymbol{a}_1$. L'accelerazione risultante del punto B è uguale a $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 = 2\omega^2\boldsymbol{r}$. Quindi il punto A esercita sul punto B una forza di attrazione $\boldsymbol{F} = 2m\omega^2\boldsymbol{r}$, dove m è la massa del punto B. Dato che ω è una grandezza arbitraria, si arriva ad un risultato assurdo: i punti A e B si attirano l'uno l'altro con una forza arbitraria nota in anticipo.

Soluzione. Nel ragionamento non viene presa in considerazione la forza di Coriolis. Introduciamo un sistema di riferimento S in rotazione uniforme intorno al punto A alla velocità angolare $+\omega$. Supponiamo che il punto B sia in rotazione rispetto a questo sistema di riferimento alla velocità angolare $-\omega$. Indicando il vettore AB con $\boldsymbol{r}$ possiamo scrivere per le velocità e le accelerazioni del punto B:

$$\boldsymbol{v}_{rel} = -[\omega \boldsymbol{r}], \quad \boldsymbol{a}_{rel} = \boldsymbol{a}_{tra} = -\omega^2\boldsymbol{r}, \quad \boldsymbol{a}_{cor} = 2[\omega \boldsymbol{v}_{rel}] = 2\omega^2\boldsymbol{r}.$$

Quindi, $\boldsymbol{a}_{ass} = \boldsymbol{a}_{rel} + \boldsymbol{a}_{cor} + \boldsymbol{a}_{tra} = 0$.

2. Un tiratore ed un bersaglio si trovano in due punti diametralmente opposti di una giostra di cavalli di legno di raggio $R = 5$ m in rotazione uniforme intorno ad un asse verticale. Il periodo di rotazione della giostra è $T = 10$ s, la velocità della pallottola da fucile è $v = 300$ m/s. Trascurando la velocità lineare massima ωR del maneggio rispetto alla velocità della pallottola, si determini, approssimativamente, sotto quale angolo α rispetto al diametro della giostra deve mirare il tiratore per colpire il bersaglio. Si esamini il problema dal punto di vista di un sistema in rotazione e da quello d'un sistema fisso e si confrontino i risultati.

Risposta. $\alpha = \dfrac{4\pi R}{vT} = 0{,}0209 \text{ rad} = 1{,}2°.$

3. Un'asta sottile di lunghezza l ruota intorno ad una delle sue estremità descrivendo un cono di rivoluzione (pendolo fisico conico). Si calcoli il periodo T del moto in funzione dell'angolo al vertice del cono 2φ.

Suggerimento. In un sistema di riferimento che ruota insieme all'asta intorno ad un'asse verticale l'asta è a riposo. Il problema consiste nel determinare la condizione di equilibrio di un'asta sospesa in questo sistema di riferimento e sottoposta all'azione della gravità e della forza centrifuga.

Risposta. $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{2l\cos\varphi}{3g}}.$

4. Un pendolo fisico costituito da una pallina fissata all'estremità di un'asta rigida sottile oscilla liberamente intorno ad un asse orizzontale A che passa per l'estremità superiore dell'asta. L'asse A è fissata sull'asse geometrico di un disco orizzontale ruotante intorno a

quest'asse geometrico verticale alla velocità angolare ω. Quindi il piano di oscillazione del pendolo ruota insieme con il disco alla stessa velocità angolare ω. Si calcoli il periodo delle piccole oscillazioni del pendolo sapendo che la massa dell'asta è trascurabile rispetto a quella della pallina. In quale condizione la posizione verticale inferiore dell'asta diventerà una posizione di equilibrio instabile?

Risposta. $T = 2\pi \sqrt{\dfrac{l}{g - l\omega^2}}$, se $l\omega^2 < g$. Per $l\omega^2 > g$ la posizione di equilibrio è instabile.

5. Immaginiamo che sia stato scavato nel globo terrestre un canale lungo un diametro nel piano equatoriale. Si calcoli la forza di pressiorne F che esercita sulla parete del canale un corpo in caduta libera dalla superficie terrestre nell'istante in cui esso arriverà al centro della Terra. Si supponga che non ci sia attrito e che la densità della Terra sia omogenea.

Risposta. $F = \dfrac{4\pi}{T}\sqrt{\dfrac{R}{g}}P \approx 0{,}12P$, dove P è il peso del corpo alla superficie terrestre, T la durata del giorno siderale, R il raggio della Terra.

6. (Problema di Newton). Quale forza centrale bisognerebbe aggiungere alla forza d'attrazione esercitata dal Sole perché l'orbita d'un pianeta, senza cambiare la sua forma, si metta a ruotare attorno al Sole?

Soluzione. Indichiamo con $\boldsymbol{F}_1$ la forza d'attrazione newtoniana che esercita il Sole sul pianeta, con $\boldsymbol{F}_2$ la forza centrale supplementare cercata, con $\boldsymbol{\omega}$ la velocità angolare di rotazione dell'orbita. Il vettore $\boldsymbol{\omega}$ è perpendicolare al piano dell'orbita. Il momento della quantità di moto totale $\boldsymbol{L}$ del pianeta rispetto al Sole si compone del momento della quantità di moto relativo $\boldsymbol{L}_1 = m[\boldsymbol{r}\boldsymbol{v}_{rel}]$ e del momento della quantità di moto della rotazione supplementare $\boldsymbol{L}_2 = mr^2\boldsymbol{\omega}$. Il momento $\boldsymbol{L}$ evidentemente si conserva poiché la forza attiva totale $\boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2$ è centrale. Anche il momento $\boldsymbol{L}_1$ si conserva, poiché è il momento che avrebbe avuto il pianeta se l'orbita non ruotasse e se il suo moto fosse determinato dall'azione della sola forza centrale $\boldsymbol{F}_1$. Perciò si deve conservare anche il momento $\boldsymbol{L}_2$ e il pianeta deve ruotare alla velocità angolare

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{\boldsymbol{L}_2}{mr^2} = \frac{\text{cost}}{r^2}. \tag{64.19}$$

La rotazione dell'orbita è irregolare a meno che essa non sia circolare. In un sistema di riferimento che ruota insieme con l'orbita alla velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ l'equazione del moto del pianeta, da una parte, si può scrivere nella forma

$$m\boldsymbol{a}_{rel} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + m\omega^2\boldsymbol{r} - m[\dot{\boldsymbol{\omega}}\boldsymbol{r}] + 2m[\boldsymbol{v}_{rel}\boldsymbol{\omega}].$$

D'altra parte, secondo l'enunciato del problema, in questo sistema di riferimento il pianeta deve descrivere un'ellisse di Keplero normale, perciò $m\boldsymbol{a}_{rel} = \boldsymbol{F}_1$, ciò che dà

$$\boldsymbol{F}_2 = -m\omega^2\boldsymbol{r} + m[\dot{\boldsymbol{\omega}}\boldsymbol{r}] - 2m[\boldsymbol{v}_{rel}\boldsymbol{\omega}]. \tag{64.20}$$

Derivando (64.19) rispetto al tempo e osservando che $\boldsymbol{L}_2 = \text{cost}$, si ottiene

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = 2\frac{\dot{r}}{r}\frac{\boldsymbol{L}_2}{mr^2} = -2\frac{\dot{r}}{r}\boldsymbol{\omega}.$$

Si può scomporre la velocità $\boldsymbol{v}_{rel}$ in una componente lungo il raggio $\dfrac{\dot{r}}{r}\boldsymbol{r}$ ed in una componente perpendicolare al raggio. Quest'ultima compare in seguito alla rotazione del pianeta sulla traiettoria ellittica alla velocità angolare $\boldsymbol{\omega}_{rel} = \dfrac{\boldsymbol{L}_1}{mr^2}$. Quindi

$$\boldsymbol{v}_{rel} = \frac{\dot{r}}{r}\boldsymbol{r} + [\boldsymbol{\omega}_{rel}\boldsymbol{r}].$$

Portando quest'ultima espressione nell'equazione (64.20) si ottiene dopo semplici trasformazioni

$$F_2 = -m\{\omega^2 + 2(\omega\omega_{rel})\}r, \tag{64.21}$$

ossia

$$F_2 = -[L_2^2 + 2(L_1L_2)]\frac{r}{mr^4} = \frac{\text{cost}}{r^4}r. \tag{64.22}$$

Da tutto ciò risulta che la forza supplementare F_2 deve essere inversamente proporzionale al cubo della distanza del pianeta dal Sole.

7. Si adotti il teorema di Coriolis per risolvere il *problema inverso* del moto di un giroscopio simmetrico. Il problema diretto della meccanica consiste nel determinare il moto conoscendo le forze applicate al sistema meccanico. Il problema inverso consiste nel determinare le forze conoscendo il moto del sistema. Sia dato un giroscopio che effettua una precessione regolare stimolata. Quale sono le forze che devono essere applicate a esso perché questa precessione abbia luogo?

Soluzione. Il giroscopio sia in rotazione uniforme intorno al suo asse di rivoluzione alla velocità angolare ω ed anche il suo asse di rivoluzione sia in rotazione uniforme alla velocità angolare Ω (precessione stimolata). Adottiamo un sistema di riferimento in rotazione alla velocità angolare Ω. In questo sistema di riferimento l'asse di rivoluzione del giroscopio è immobile, quindi

$$v_{rel} = [\omega r], \quad v_{tra} = [\Omega r], \quad a_{tra} = [\Omega[\Omega r]]. \tag{64.23}$$

Delimitiamo col pensiero, nel corpo del giroscopio, un elemento di massa dm e di raggio vettore r (fig. 185). Indichiamo con df la forza (reale) che agisce su questo elemento di massa.

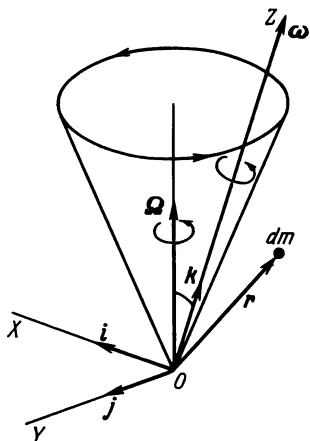



Fig. 185.

Utilizzando la formula (64.9) bisogna tenere presente che in questo caso la velocità angolare di rotazione del sistema di riferimento è indicato con Ω (e non con ω come nella formula (64.9)). Applicando all'elemento di massa delimitato la seconda legge di Newton e utilizzando le formule (64.9) e (64.23) si può scrivere

$$df = dm[\omega[\omega r]] + 2dm[\Omega[\omega r]] + dm[\Omega[\Omega r]]. \tag{64.24}$$

Dato che si suppone che il giroscopio sia un corpo perfettamente rigido, la sua equazione del moto è completamente definita dalla somma geometrica f delle forze esterne e dai loro mo-

menti rispetto al punto di sostegno O. Per ottenere f integriamo l'espressione (64.24). Dato che i vettori ω e Ω sono costanti si può portarli fuori dal segno d'integrazione. Si osservi inoltre che $\int r\, dm = mr_C$, in cui r_C è il raggio vettore del centro di massa C del giroscopio. Ne segue

$$f = m\{[\omega[\omega r_C]] + 2[\Omega[\omega r_C]] + [\Omega[\Omega r_C]]\}.$$

I primi due termini del secondo membro della relazione sono uguali a zero, poiché, trovandosi il centro di massa C sull'asse di rivoluzione del giroscopio, i vettori r_C e ω sono collineari. Quindi in definitiva si ha

$$f = m[\Omega[\Omega r_C]]. \tag{64.25}$$

Questo risultato si sarebbe potuto scrivere direttamente partendo dall'applicazione del teorema del moto del centro di massa poiché la sua accelerazione è dovuta soltanto alla rotazione di precessione ed è uguale a $[\Omega[\Omega r_C]]$ (accelerazione centripeta). La forza f compare automaticamente essendo la reazione del punto di sostegno sul giroscopio in precessione.

Si calcoli ora il momento M delle forze. Per questo si deve trovare il prodotto vettoriale del raggio vettore r per l'espressione (64.24), poi integrare il risultato ottenuto rispetto a m. Ma è evidente anche senza calcolo che con tale integrazione il termine $dm\,[\omega[\omega r]]$ non contribuirà in nessun modo al momento M. Infatti, il risultato dell'integrazione di questo termine non dipende dall'esistenza o meno di altri termini della somma (64.24). Il termine in esame corrisponde a una rotazione uniforme intorno all'asse di rivoluzione del giroscopio, e dato che l'asse di rivoluzione è uno degli assi di rotazione liberi, nessuna forza esterna è necessaria per assicurare una rotazione uniforme intorno ad un asse libero. Per la stessa ragione il valore del momento M non verrà influenzato neanche dall'ultimo termine di (64.24), se la precessione avverrà intorno ad un asse perpendicolare all'asse di rivoluzione del giroscopio e se il suo centro di massa C coinciderà con il punto di sostegno O. In tutti gli altri casi, però, non sarà così. Nondimeno nel calcolare il momento M ignoriamo l'ultimo termine di (64.24) per la seguente ragione. Supporremo che la velocità di rotazione della precessione Ω sia molto lenta rispetto alla velocità di rotazione propria ω del giroscopio, questo ci permette di trascurare i quadrati della piccola grandezza Ω. E l'ultimo termine di (64.24) è appunto di secondo grado rispetto a Ω. Quindi il momento M è dovuto soltanto al secondo termine della somma (64.24). Sviluppato il doppio prodotto vettoriale, moltiplicandolo vettorialmente per r e integrandolo si ottiene

$$M = 2\int(\Omega r)\,[r\omega]\,dm.$$

Per calcolare l'integrale, introduciamo un sistema di coordinate ortogonali, facendo coincidere l'asse Z con l'asse di rivoluzione del giroscopio e disponendo l'asse X nel piano in cui si trovano i vettori ω e Ω (cfr. fig. 185). In questo sistema di coordinate

$$M = -2j\omega\Omega_x\int x^2 dm - 2j\omega\Omega_z\int zx\,dm + 2i\omega\Omega_x\int xy\,dm + 2i\omega\Omega_z\int yz\,dm.$$

Tutti gli integrali ad eccezione del primo si annullano perché la distribuzione delle masse è a simmetria assiale. Invece il primo termine può essere scritto nella forma

$$M = -j\omega\Omega_x\int(x^2 + y^2)dm = -JI_\perp\omega\Omega\sin\vartheta,$$

dove ϑ è l'angolo tra i vettori ω e Ω, e $I_\perp$ il momento d'inerzia corrispondente del giroscopio. Scritta in forma vettoriale diventa

$$M = I_\perp[\Omega\omega]. \tag{64.26}$$

Il prodotto vettoriale $[\Omega\omega]$ è il vettore velocità con cui nel corso di una precessione regolare, si sposta l'estremità del vettore ω, che è indissolubilmente legato all'asse di rivoluzione del giroscopio. Quindi, il vertice del giroscopio si sposta non in direzione della forza applicata, ma lungo una direzione che è perpendicolare ad essa, cioè in direzione del momento M. Questo ri-

sultato è probabilmente la cosa più sorprendente nel moto del giroscopio. Se si passa ora ad un sistema di riferimento in rotazione alla velocità angolare Ω della precessione, si può dire che in questo sistema di riferimento il momento delle forze esterne deve compensare il momento delle forze d'inerzia di Coriolis.

§ 65. *Equazione del moto relativo di un punto materiale nel campo di gravità terrestre, tenendo conto della rotazione della Terra*

1. Applichiamo l'equazione del moto relativo (64.15) al moto dei corpi rispetto alla Terra. Colleghiamo il sistema di riferimento S alla Terra in rotazione. Si tratta della rotazione della Terra rispetto ad un sistema di riferimento inerziale, il sistema di Copernico, ad esempio. Collochiamo l'origine delle coordinate O al centro della Terra. In questo caso $\boldsymbol{v}_0$ rappresenterà la velocità e $\dot{\boldsymbol{v}}_0$ l'accelerazione del centro della Terra. Poiché la rotazione è praticamente uniforme, l'ultimo termine dell'equazione (64.15) si elimina. Dato che inoltre si tratta soltanto di moto relativo, conveniamo di tralasciare d'ora innanzi l'indice «rel» nell'equazione (64.15), cioè presupporremo che $\boldsymbol{v} \equiv \boldsymbol{v}_{rel}$, $\boldsymbol{a} \equiv \boldsymbol{a}_{rel}$. La forza esterna sarà la somma di tre forze $\boldsymbol{F}_T + \boldsymbol{F}_0 + \boldsymbol{F}$, dove $\boldsymbol{F}_T$ è la forza di attrazione gravitazionale della Terra, $\boldsymbol{F}_0$ la risultante delle forze di attrazione gravitazionale del Sole, della Luna, dei pianeti, delle stelle e di altri corpi celesti, e $\boldsymbol{F}$ la somma geometrica di tutte le altre forze che agiscono sul punto materiale. La forza $\boldsymbol{F}$ si compone, ad esempio, della forza di resistenza dell'aria, della forza d'attrito, della forza di tensione di un filo, ecc. Con queste indicazioni l'equazione (64.15) avrà la forma seguente:

$$m\boldsymbol{a} = (\boldsymbol{F}_T + m\omega^2\boldsymbol{r}_\perp) + 2m[\boldsymbol{v}\boldsymbol{\omega}] + \boldsymbol{F} + (\boldsymbol{F}_0 - m\dot{\boldsymbol{v}}_0). \qquad (65.1)$$

2. Utilizzeremo inoltre la fondamentale legge fisica secondo cui *tutti i corpi in un medesimo campo gravitazionale cadono con una medesima accelerazione*. Questa legge si chiama *legge di Galilei generalizzata*, poiché Galilei fu il primo a dimostrare la sua validità per i corpi in libera caduta nel campo di gravità terrestre. Da questa legge deriva che la *forza alla quale è sottoposto un corpo in un campo gravitazionale non dipende dalla composizione del corpo stesso, ma soltanto dalla sua massa, essa è cioè rigorosamente proporzionale alla massa del corpo.* Da questo punto di vista le forze di gravitazione si comportano come forze d'inerzia, essendo anche queste ultime rigorosamente proporzionali alla massa del corpo.

3. Il principale contributo alla forza $\boldsymbol{F}_0$ è dato dai campi di gravitazione del Sole e della Luna. Questi campi, in particolare quello della Luna, non sono uniformi. Essi diminuiscono in modo inversamente proporzionale al quadrato della distanza, dal Sole o dalla Luna. Le dimensioni della Terra sono però molto piccole rispetto a queste distanze e, in prima approssima-

zione, nello studio dei moti in prossimità della superficie terrestre, possono essere trascurate le variazioni dei campi di gravitazione del Sole, della Luna e di altri campi gravitazionali esterni ad una distanza dell'ordine del diametro del globo terrestre, il che equivale a considerare uniforme il campo gravitazionale esterno attorno alla Terra. Un campo gravitazionale uniforme comunica la stessa accelerazione a tutti i corpi quali che siano i punti del campo in cui si trovano questi corpi. Ciò significa che in questa approssimazione il campo di gravitazione esterno comunica al punto materiale considerato la stessa accelerazione che comunica al centro della Terra, cioè $\dot{\boldsymbol{v}}_0$. Ne segue $\boldsymbol{F}_0 - m\dot{\boldsymbol{v}}_0 = 0$. Quindi le forze di attrazione del Sole, della Luna e di tutti gli altri corpi celesti vengono eliminate nelle equazioni del moto relativo (65.1). Queste forze sono pienamente compensate dalle forze d'inerzia di traslazione che risultano a causa dell'accelerazione comunicata da questi campi alla Terra. Questo risultato così importante, come vediamo, è un corollario della legge di Galilei generalizzata.

4. Secondo la stessa legge di Galilei, la forza $\boldsymbol{F}_T$ dell'attrazione terrestre, e quindi la somma vettoriale $\boldsymbol{F}_T + m\omega^2\boldsymbol{r}_\perp$ sono proporzionali alla massa m del punto materiale. Questa somma non dipende dal moto relativo del punto materiale e caratterizza soltanto il campo gravitazionale della Terra e la sua rotazione. Conviene considerare questa somma come una quantità unica. Introduciamo la notazione

$$\boldsymbol{F}_T + m\omega^2\boldsymbol{r}_\perp = m\boldsymbol{g}. \tag{65.2}$$

Allora l'equazione del moto relativo avrà la forza

$$m\boldsymbol{a} = m\boldsymbol{g} + 2m[\boldsymbol{v}\boldsymbol{\omega}] + \boldsymbol{F}. \tag{65.3}$$

La grandezza $\boldsymbol{g}$ è la stessa per tutti i corpi e può variare soltanto passando da un punto dello spazio ad un altro.

Per stabilire il significato fisico del vettore $\boldsymbol{g}$, ammettiamo che non ci siano forze esterne ($\boldsymbol{F} = 0$) e che la velocità $\boldsymbol{v}$ del punto materiale sia uguale a zero. Allora dalla formula (65.3) deriva che $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{g}$. Quindi, il *vettore* $\boldsymbol{g}$ *rappresenta l'accelerazione del corpo in caduta libera rispetto alla Terra, a condizione che la sua velocità sia uguale a zero nell'istante considerato.* È necessario precisare che la velocità del corpo deve essere uguale a zero, poiché se possiede una velocità $\boldsymbol{v}$, compare un'accelerazione supplementare dovuta alla forza di Coriolis. Osserviamo che l'accelerazione in caduta libera si compone di due termini

$$\boldsymbol{g} = \boldsymbol{g}_{ass} + \omega^2\boldsymbol{r}_\perp. \tag{65.4}$$

Il primo termine $\boldsymbol{g}_{ass} = \frac{1}{m}\boldsymbol{F}_T$ è l'accelerazione dovuta alla forza di attrazione gravitazionale della Terra. Una tale accelerazione si otterrebbe misurando l'accelerazione in caduta libera rispetto ad un sistema di riferimento fis-

so a condizione che, oltre al campo gravitazionale terrestre, non esista nessun altro campo. Il secondo termine $\omega^2 \boldsymbol{r}_\perp$ è l'accelerazione comunicata dalla forza centrifuga d'inerzia e collegata alla rotazione della Terra.

§ 66. *Peso e sua misura*

1. *Si chiama peso d'un corpo la forza* ***P*** *che gli viene applicata e che è uguale alla forza con la quale il corpo agisce sul supporto su cui si trova, o alla forza di tensione del filo al quale il corpo è sospeso. Si suppone inoltre che il corpo, il supporto e la sospensione siano a riposo rispetto al sistema di riferimento in cui si effettua la pesata. Quando si parla del peso di un corpo, si presuppone di solito che il corpo, il supporto e la sospensione siano a riposo rispetto alla Terra.* Per maggiore concretezza immaginiamo che il corpo si appoggi su un supporto. Esso agisce sul supporto con la forza $\boldsymbol{P}$ e il supporto agisce sul corpo con una forza $\boldsymbol{F}$ uguale e contraria a $\boldsymbol{P}$. Le forze $\boldsymbol{P}$ e $\boldsymbol{F}$ sono quindi le forze di interazione del corpo e del supporto e verificano la terza legge di Newton $\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{P}$. Ammettendo che il corpo sia a riposo sul supporto, portiamo nella formula (65.3) $\boldsymbol{v} = 0$, $\boldsymbol{a} = 0$, $\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{P}$. Si ottiene allora per $\boldsymbol{P}$

$$\boldsymbol{P} = m\boldsymbol{g}. \tag{66.1}$$

Tenendo conto della (65.4), vediamo che $\boldsymbol{P}$ si compone di due termini:

$$\boldsymbol{P} = m\boldsymbol{g}_{\text{ass}} + m\omega^2 \boldsymbol{r}_\perp = \boldsymbol{F}_{\text{T}} + m\omega^2 \boldsymbol{r}_\perp. \tag{66.2}$$

Ciò significa che il *peso è la somma geometrica della forza di attrazione gravitazionale della Terra* $\boldsymbol{F}_{\text{T}}$ *e della forza d'inerzia centrifuga* $m\omega^2 \boldsymbol{r}_\perp$.

Anche se il corpo è sospeso ad un filo, il ragionamento non cambia. In questo caso la direzione del filo determina la direzione della forza $\boldsymbol{P}$, e quindi quella dell'accelerazione in caduta libera $\boldsymbol{g}$. Questa direzione è detta *linea del filo a piombo.*

2. Il vettore $\boldsymbol{g}_{\text{ass}}$ caratterizza il campo gravitazionale della Terra. In ogni punto dello spazio esso è determinato soltanto dalle dimensioni e dalla forma della Terra, nonché dalla distribuzione della sua materia. Se la Terra fosse una sfera perfetta e la distribuzione della sua materia fosse a simmetria sferica il vettore $\boldsymbol{g}_{\text{ass}}$ sarebbe diretto esattamente verso il centro della Terra. La linea del filo a piombo è determinata dal vettore $\boldsymbol{g}$, cioè dalla diagonale del parallelogramma costruito con i vettori $\boldsymbol{g}_{\text{ass}}$ e $\omega^2 \boldsymbol{r}_\perp$ (fig. 186). Quindi, anche se la Terra fosse di forma perfettamente sferica, la direzione verso il suo centro non coinciderebbe con la linea del filo a piombo. In questo caso la differenza tra queste due direzioni sarebbe determinata dalla forza centrifuga. In realtà la Terra è appiattita lungo il suo asse di rotazione (ai poli), il che è un'altra causa della differenza indicata tra le due direzioni. Ma in fin dei conti, dato che la rotazione della Terra è lenta e il suo

appiattimento è di lieve entità, le due direzioni differiscono di poco l'una dall'altra. Per una Terra a forma sferica perfetta, l'angolo α tra queste direzioni è determinato dalla formula

$$\sin\alpha = \frac{\omega^2 r_\perp}{g}\sin\vartheta = \frac{1}{2}\frac{\omega^2 r}{g}\sin 2\vartheta, \qquad (66.3)$$

dove ϑ è la latitudine geografica del luogo considerato (cfr. fig. 186). Ai poli e all'equatore l'angolo α si annulla. Per la Terra come è in realtà, la

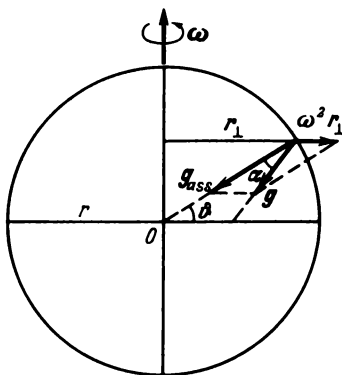



Fig. 186.

formula (66.3) sebbene approssimata è sufficientemente esatta. Proiettando i vettori $\boldsymbol{g}_{ass}$ e $\omega^2 \boldsymbol{r}_\perp$ nella direzione del vettore $\boldsymbol{g}$ e supponendo $\cos\alpha \approx 1$, è facile ottenere una formula approssimata

$$g = g_{ass} - \omega^2 r_\perp \cos\vartheta = g_{ass} - \omega^2 r \cos^2\vartheta. \qquad (66.4)$$

L'errore in questo calcolo è dell'ordine di α^2.

Il modulo di g può essere determinato tramite misura o per mezzo di esperimenti di caduta libera di un corpo. In maniera più precisa può essere calcolata con la misura del periodo di oscillazione di un pendolo reversibile (cfr. § 41). Gli esperimenti eseguiti dimostrano che g dipende dalla latitudine geografica. Al polo $g = 983{,}2$ cm/s², all'equatore $g = 978{,}0$ cm/s². Conosciuto il valore di g si può, attraverso la formula (66.4), calcolare anche g_{ass}. Al polo $g_{ass} = g = 983{,}2$ cm/s². All'equatore

$$g_{ass} = g + \omega^2 r = 978{,}0 + \frac{4\pi^2}{86\ 164^2}\cdot 6{,}378\cdot 10^8 = 981{,}4 \text{ cm/s}^2.$$

Se la Terra fosse una sfera perfetta con una distribuzione a simmetria sferica della sua materia, il valore di g_{ass} sarebbe lo stesso al polo e all'equatore.

In realtà g_{ass} è più piccolo all'equatore che al polo, il che si spiega con l'appiattimento della Terra, determinato dall'azione delle forze centrifughe. All'equatore i punti della superficie terrestre sono più distanti dal centro della Terra che ai poli, quindi vengono attirati al centro della Terra più debolmente che i medesimi punti ai poli. È chiaro che non si può registrare la variazione dell'accelerazione in caduta libera g sulla superficie terrestre per mezzo di una bilancia a leva, ma lo si può fare con una bilancia a molla.

3. Supponiamo ora che una bilancia a molla sia installata a bordo di una nave spaziale o di un satellite artificiale. Che cosa indicherà la bilancia quando il corpo sottoposto alla pesata è a riposo rispetto alla nave? I nostri precedenti ragionamenti non cambieranno se alla Terra si sostituisce una nave spaziale. In particolare, colleghiamo ora il sistema di riferimento mobile S alla nave. La Terra invece si deve considerare un corpo esterno che, insieme con il Sole, la Luna ed altri corpi celesti crea all'interno della nave un campo di gravitazione esterno. Essendo piccole le dimensioni della nave, il campo all'interno della nave si può considerare uniforme. Esso è esattamente compensato dalle forze d'inerzia traslatorie che si manifestano nel sistema di riferimento S a causa dell'accelerazione, che gli viene comunicata da questo campo di gravitazione. Quindi se i motori della nave sono spenti ed essa è in caduta libera nel campo di gravitazione, allora il moto relativo all'interno della nave sarà sempre descritto dalla stessa equazione (65.3). Vista la piccolezza del campo di gravitazione creato dalla nave stessa, il termine $m\mathbf{g}$ sarà determinato ora esclusivamente dalla rotazione della nave e sarà uguale a $m\omega^2\mathbf{r}_\perp$ (forza centrifuga). Se la nave non ruota intorno al suo asse ed il corpo da pesare è a riposo rispetto alla nave, allora dall'equazione (65.3) si ottiene $\mathbf{F} = 0$. La grandezza $\mathbf{F}$ è la forza con la quale agisce sul corpo la molla allungata della bilancia. Vediamo, poiché $\mathbf{F} = 0$, che la molla non è allungata, cioè la bilancia indica un peso zero. La bilancia non reagisce all'azione dei campi di gravitazione esterni, questi ultimi sono pienamente compensati dalle forze d'inerzia traslatorie. Un tale stato di «*imponderabilità*» è proprio di tutti i corpi che si trovano all'interno della nave. Lo stato di «imponderabilità» si manifesta a causa dell'assenza nei corpi delle tensioni elastiche interne, che generalmente compaiono sotto l'azione della forza di gravità.

Se la nave ruota, compare la forza centrifuga che non è compensata dai campi gravitazionali esterni. Questa forza crea sulla nave una «*gravità artificiale*».

Infine, quando i motori sono in funzione e comunicano alla nave un'accelerazione di traslazione supplementare ω, nel secondo membro dell'equazione (65.3) si aggiunge il termine $-m\mathbf{w}$. La bilancia indicherà allora il peso $\mathbf{P} = -m\mathbf{w}$. Tutti i corpi all'interno della nave diventano di nuovo «pesanti». È la presenza di questo «peso» che determina i sovraccarichi ai quali sono sottoposti i cosmonauti durante il lancio o la frenata delle navi spaziali.

1. Si pesa un corpo all'equatore su una bilancia a molla, a mezzogiorno, quando le forze di gravitazione della Terra e del Sole agiscono sul corpo in direzioni opposte. Un corpo identico viene pesato simultaneamente in un punto diametralmente opposto del globo terrestre, cioè a mezzanotte, ora locale, quando le due forze sono dirette nel medesimo senso. Quale di questi corpi avrà il peso maggiore?

Soluzione. Se si trascura la disuniformità del campo gravitazionale del Sole intorno alla Terra, allora in ambedue i casi si avrà lo stesso peso. Teniamo conto ora del fatto che il campo di gravitazione del Sole non è uniforme, ignorando invece l'influenza della Luna. In due punti diametralmente opposti del globo terrestre 1 (giorno) e 2 (notte) (fig. 187) il peso del corpo sarà rispettivamente

$$P_1 = F_T - F_S(R - r) - m\omega^2 r + mw, \qquad P_2 = F_T + F_S(R + r) - m\omega^2 r - mw,$$

dove F_T e F_S sono le forze di attrazione gravitazionali rispettivamente della Terra e del Sole, R è la distanza tra i loro centri, r il raggio terrestre, w l'accelerazione del centro della Terra sotto

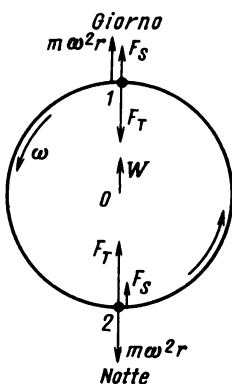



Fig. 187.

l'azione dell'attrazione gravitazionale del Sole. Evidentemente $mw = F(R)$. Sottraendo, si ottiene

$$P_2 - P_1 = [F_S(R + r) - F_S(R)] + [F_S(R - r) - F_S(R)].$$

Scomponendo le due differenze tra parentesi quadrate secondo la formula di Taylor e limitandoci ai termini quadratici rispetto a r, otteniamo

$$P_2 - P_1 = r^2 \frac{d^2 F_S}{dR^2}.$$

Trasformiamo questa espressione, utilizzando le relazioni

$$F_S = G\frac{Mm}{R^2} = \frac{4\pi^2 R}{T^2}m; \qquad P = mg$$

(M è la massa del Sole, T il periodo di rivoluzione della Terra attorno al Sole, P il peso del corpo). Dopo trasformazioni semplici si ottiene

$$\frac{P_2 - P_1}{P} = \frac{24\pi^2}{gT^2}\frac{r^2}{R} = \frac{12\pi^2 r^2}{sR}.$$

Qui $s = 1/2\, gT^2$ è la distanza che percorrerebbe la Terra nel corso di un anno se il suo moto fosse uniformemente accelerato con accelerazione g. Calcolando questa distanza si ottiene $s \approx 5 \cdot 10^{12}$ km; si ottiene in seguito

$$\frac{P_2 - P_1}{P} \approx 6{,}5 \cdot 10^{-12}.$$

2. Determinare la differenza di peso di corpi identici in punti diametralmente opposti del globo terrestre, dovuta alla non uniformità del campo di gravitazione della Luna. Si consideri che i centri della Luna, della Terra e di ambedue i punti considerati 1 e 2 si trovino su una stessa retta (si veda il precedente problema).

Risposta. $\frac{P_2 - P_1}{P} = \frac{M_L}{M_T}\,\frac{24\pi^2 r^2}{RgT^2} \approx 8 \cdot 10^{-10}$, dove M_T e M_L sono le masse della Terra e della Luna, R è la distanza tra i centri della Terra e della Luna, T il periodo di rivoluzione della Luna attorno alla Terra, r il raggio terrestre.

3. Una nave si dirige verso est lungo il parallelo con latitudine geografica $\vartheta = 60°$. La velocità della nave è $v = 10$ m/s. Si calcoli il peso P di un corpo a bordo della nave se la pesata viene eseguita con una bilancia a molla. Il peso di questo stesso corpo immobile rispetto alla Terra nello stesso punto della superficie terrestre è P_0.

Risposta. $P = P_0 \left[1 - \frac{2\omega v \cos\vartheta + v^2/R}{g} \right] \approx P_0 (1 - 2\frac{\omega v}{g} \cos\vartheta) \approx P_0 (1 - 7{,}5 \cdot 10^{-5})$ (R è il raggio terrestre).

4. Un aereo vola a velocità costante descrivendo un cerchio ad altezza costante. Quale sarà la direzione di un filo a piombo sospeso nell'interno dell'aereo? Si calcoli il periodo delle piccole oscillazioni di un pendolo matematico all'interno dell'aereo se la lunghezza del pendolo è l ed il corpo dell'aereo è inclinato in direzione dell'orizzonte di un angolo α.

Risposta. Il filo a piombo si stabilizzerà perpendicolarmente al pavimento dell'aereo.

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l \cos\alpha}{g}}$$

5. Un aereo vola ad altitudine costante lungo un cerchio di raggio $R = 25$ km ad una velocità costante $v = 250$ m/s. Nella cabina dell'aereo sono installati un orologio a molla ed un orologio a pendolo. Quale sarà la durata del volo t' indicata dall'orologio a pendolo se la durata del volo indicata dall'orologio a molla è uguale a $t = 1$ h? Si suppongano gli orologi siano perfetti. Si ignori la forza di Coriolis per la sua piccolezza.

Risposta. $t' = t\left(1 + \frac{v^4}{4R^2g^2}\right) = 1$ h 56 s.

§ 67. *Deviazione del moto dei corpi in caduta libera rispetto al filo a piombo*

1. Prendiamo un corpo in caduta libera nel campo di gravità terrestre. In questo caso $F = 0$ e l'equazone (65.3) si trasforma in

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{g} + 2[\boldsymbol{v\omega}]. \qquad (67.1)$$

Questa equazione descrive la *caduta libera del corpo prendendo in considerazione la rotazione della Terra.* L'influenza della rotazione terrestre si ri-

duce all'azione della forza centrifuga e della forza di Coriolis. La forza centrifuga è automaticamente inclusa come parte integrante nel peso del corpo $m\boldsymbol{g}$ e la presenza di questa forza non modifica la forma dell'equazione e non fa comparire fenomeni qualitativamente nuovi. Soltanto alla direzione verso il centro della Terra viene sostituita la direzione della linea a piombo. È più sostanziale invece l'influenza della forza di Coriolis sul carattere del moto. *Nel caso di un corpo in caduta libera senza velocità iniziale, la forza di Coriolis si manifesta con una deviazione della direzione dei corpi in caduta libera verso est e verso l'equatore rispetto alla linea del filo a piombo.* La teoria di questi fenomeni si riduce alla soluzione dell'equazione differenziale (67.1). Se il vettore $\boldsymbol{g}$ è costante, l'equazione vettoriale (67.1) è equivalente ad un sistema di tre equazioni differenziali lineari del secondo ordine a coefficienti costanti. Non è difficile ottenere una soluzione precisa di un tale sistema attraverso metodi conosciuti della teoria delle equazioni differenziali. Noi non seguiremo però questa via così laboriosa, perché non è giustificato calcolare queste soluzioni precise quando si ignora nell'equazione (67.1) la dipendenza del vettore $\boldsymbol{g}$ dalle coordinate. È possibile fare questa approssimazione solo quando il moto è considerato in una regione sufficientemente piccola di spazio in tutti i punti del quale il vettore $\boldsymbol{g}$ è sensibilmente costante. In questi casi funziona perfettamente il *metodo approssimato* detto *delle approssimazioni successive* la cui precisione è più che sufficiente. I calcoli su cui è basato questo metodo sono semplici e mettono meglio in rilievo la natura degli effetti. Sarà quindi questo il metodo che adotteremo.

2. Nell'equazione (67.1) il termine $2[\boldsymbol{v}\boldsymbol{\omega}]$ è piccolo rispetto a $\boldsymbol{g}$. Lo si può considerare come una piccola correzione e ignorarlo in *un'approssimazione di ordine zero.* Allora si avranno le leggi della caduta libera in cui non si tiene conto della rotazione della Terra

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{g}, \qquad \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{g}t, \tag{67.2}$$

dove $\boldsymbol{v}_0$ è la velocità iniziale del corpo.

Utilizzando l'approssimazione zero si può anche prendere in considerazione la forza di Coriolis. A questo scopo portiamo nell'equazione (67.1) il valore $\boldsymbol{v}$ ottenuto con l'approssimazione zero, e questo ci fornirà l'accelerazione $\boldsymbol{a}$ in *prima approssimazione:*

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{g} + 2[\boldsymbol{v}_0\boldsymbol{\omega}] + 2t[\boldsymbol{g}\boldsymbol{\omega}]. \tag{67.3}$$

L'integrazione di questa equazione dà la velocità $\boldsymbol{v}$ in prima approssimazione:

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{g}t + 2t[\boldsymbol{v}_0\boldsymbol{\omega}] + t^2[\boldsymbol{g}\boldsymbol{\omega}]. \tag{67.4}$$

Per mezzo di questa espressione si corregge nuovamente l'espressione per la forza di Coriolis. Appunto, portandola nell'equazione (67.1) si ottiene l'espressione per l'accelerazione $\boldsymbol{a}$ in *seconda approssimazione:*

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{g} + 2[\boldsymbol{v}_0\boldsymbol{\omega}] + 2t[\boldsymbol{g}\boldsymbol{\omega}] + 4t[[\boldsymbol{v}_0\boldsymbol{\omega}]\boldsymbol{\omega}] + 2t^2[[\boldsymbol{g}\boldsymbol{\omega}]\boldsymbol{\omega}], \tag{67.5}$$

e dopo l'integrazione rispetto a t si ottiene l'espressione per la velocità $\boldsymbol{v}$ nella stessa approssimazione:

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{g}t + 2t[\boldsymbol{v}_0\boldsymbol{\omega}] + t^2[\boldsymbol{g}\boldsymbol{\omega}] + 2t^2[[\boldsymbol{v}_0\boldsymbol{\omega}]\boldsymbol{\omega}] + \frac{2}{3}t^3[[\boldsymbol{g}\boldsymbol{\omega}]\boldsymbol{\omega}]. \quad (67.6)$$

Si potrebbe continuare all'infinito questo processo di approssimazioni successive, ma limitiamoci alla seconda approssimazione. Integrando (67.6) rispetto a t si ottiene il raggio vettore del punto materiale in qualunque istante in seconda approssimazione:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{v}_0 t + \frac{1}{2}\boldsymbol{g}t^2 + t^2[\boldsymbol{v}_0\boldsymbol{\omega}] + \frac{t^3}{3}[\boldsymbol{g}\boldsymbol{\omega}] + \frac{2}{3}t^3[[\boldsymbol{v}_0\boldsymbol{\omega}]\boldsymbol{\omega}] + \frac{t^4}{6}[[\boldsymbol{g}\boldsymbol{\omega}]\boldsymbol{\omega}]. \quad (67.7)$$

In particolare, quando il corpo comincia la caduta libera senza velocità iniziale si ottiene per il suo spostamento $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0$ dalla posizione d'origine

$$\boldsymbol{s} = \frac{1}{2}\boldsymbol{g}t^2 + \frac{t^3}{3}[\boldsymbol{g}\boldsymbol{\omega}] + \frac{t^4}{6}[[\boldsymbol{g}\boldsymbol{\omega}]\boldsymbol{\omega}]. \quad (67.8)$$

3. Al fine di analizzare i risultati ottenuti, introduciamo un sistema di coordinate ortogonali la cui origine si trova nel punto A da dove comincia a cadere il corpo considerato (fig. 188). Orientiamo l'asse X verso est lungo

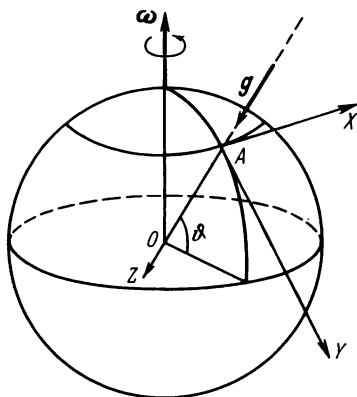



Fig. 188.

un parallelo, l'asse Y verso l'equatore lungo il meridiano e l'asse Z lungo la direzione discendente del filo a piombo, cioè lungo il vettore $\boldsymbol{g}$. Ora proiettiamo l'espressone (67.8) sugli assi coordinati. Il prodotto vettoriale $[\boldsymbol{g}\boldsymbol{\omega}]$ è orientato verso est; il doppio prodotto vettoriale $[[\boldsymbol{g}\boldsymbol{\omega}]\boldsymbol{\omega}]$ è un vettore perpendicolare all'asse di rotazione della Terra. Quindi passando alle proiezioni, si ottiene

$$z = \frac{1}{2}gt^2 - \frac{1}{6}\omega^2 t^4 g \cos^2\vartheta, \quad (67.9)$$

$$x \equiv s_{est} = \frac{1}{3}\,\omega t^3 g \cos\vartheta, \tag{67.10}$$

$$y \equiv s_{eq} = \frac{1}{12}\,\omega^2 t^4 g \sin 2\vartheta, \tag{67.11}$$

dove ϑ è l'angolo della latitudine geografica del luogo considerato. Il secondo termine nella formula (67.9) è soltanto una piccola correzione all'approssimazione zero e non modifica qualitativamente la natura dell'effetto. Si può ignorare questo termine correttivo e calcolare la durata della caduta libera mediante la formula di approssimazione zero

$$t = \sqrt{\frac{2z}{g}}. \tag{67.12}$$

Il discorso è diverso quando si tratta delle formule (67.10) e (67.11). Qui, nell'approssimazione d'ordine zero, $x = y = 0$. La rotazione della Terra provoca la comparsa di due nuovi effetti: uno spostamento del corpo in caduta libera verso est e verso l'equatore rispetto alla direzione di un filo a piombo e non rispetto alla direzione del centro della Terra (come talvolta si afferma erroneamente). L'espressione per la deviazione verso est può essere scritta nella forma seguente

$$s_{est} = \frac{2}{3}\,\omega t h \cos\vartheta = \frac{4\pi}{3}\frac{t}{T} h \cos\vartheta, \tag{67.13}$$

dove h è l'altezza di caduta e $T = 2\pi/\omega$ è il periodo di rotazione giornaliera della Terra.

La deviazione s_{est} è molto piccola poiché nella formula (67.13) compare il fattore molto piccolo t/T. Così, per $h = 100$ m, $t = 4{,}5$ s, e per la latitudine di Mosca ($\vartheta = 56°$) si ottiene $s_{est} = 1{,}2$ cm. Per un'altezza di caduta di 500 m, si avrebbe $s_{est} = 13{,}8$ cm. Malgrado il fenomeno sia notevolmente piccolo si era riusciti ad osservarlo con certezza già alla metà del XIX° secolo durante gli esperimenti sulla caduta di un corpo in un pozzo di miniera.

La deviazione equatoriale è collegata alla deviazione verso oriente dalla relazione

$$s_{eq} = \frac{\omega t \sin\vartheta}{2}\, s_{est}. \tag{67.14}$$

A causa della presenza del piccolo fattore $\omega t = 2\pi t/T$ la deviazione verso l'equatore è talmente piccola che non è rilevabile.

Problemi

1. Si tira un colpo di fucile lungo la verticale ascendente (cioè, parallelamente alla linea del filo a piombo). La velocità iniziale della pallottola è $v_0 = 100$ m/s, la latitudine geografica del luogo è $\vartheta = 60°$. Tenendo conto della rotazione assiale della Terra, si calcoli approssima-

tivamente di quanto cadrà più ad est o ad ovest la pallottola rispetto al punto da cui è stato effettuato il tiro. Si trascuri la resistenza dell'aria.

Risposta. La pallottola devierà verso ovest di una distanza uguale a

$$x_{occ} = \frac{4}{3} \frac{v_0^3 \omega}{g^2} \cos\vartheta \approx 51 \text{ cm}.$$

Il risultato può sembrare sorprendente. Quando un corpo è diretto verso l'alto, la forza di Coriolis lo fa deviare ad ovest rispetto alla linea del filo a piombo e ad est quando è diretto verso il basso. A prima vista sembra che lo spostamento verso ovest debba essere compensato da una deviazione successiva verso est, ma in realtà non è così. Quando il corpo sale, la sua velocità iniziale laterale è uguale a zero. Però il corpo raggiunge l'altezza massima con una componente occidentale della velocità che esso acquista sotto l'azione della forza di Coriolis. Per questo esso comincia a cadere con una velocità iniziale orientata verso ovest e durante la sua caduta il corpo non soltanto si sposta verso est sotto l'azione della forza di Coriolis col senso cambiato, ma continua per inerzia a spostarsi verso ovest. Ne risulta che la deviazione verso overst è più grande di quella verso est.

2. Con quale angolo α rispetto alla verticale si deve sparare un colpo di fucile perché la pallottola ricada nello stesso punto da cui è partito il colpo. Si utilizzino i dati del problema precedente.

Risposta. La canna del fucile deve essere puntata verso est con un angolo

$$\alpha = \frac{2}{3} \frac{v_0 \omega}{g} \cos\vartheta \approx 2{,}45 \cdot 10^{-4} \text{ rad} \approx 0{,}85' \approx 51''.$$

3. Da un cannone, installato in un punto della superficie terrestre di latitudine geografica $\vartheta = 30°$, si spara un colpo verso est. La velocità iniziale del proiettile è $v_0 = 500$ m/s, l'angolo di tiro (cioè, l'angolo di inclinazione della tangente nel punto d'origine della traiettoria rispetto al piano orizzontale) è $\alpha = 60°$. Trascurando la resistenza dell'aria e prendendo in considerazione la rotazione della Terra, si calcoli approssimativamente la deviazione y del punto di caduta del proiettile rispetto al piano di tiro. Quale spostamento si avrà: a sud o a nord? (Il piano di tiro è quel piano che contiene la tangente nel punto d'origine della traiettoria e la direzione di un filo a piombo nello stesso punto).

Risposta. A sud, $y = \dfrac{4\omega v_0^3 \sin\vartheta \cos\alpha \sin^2\alpha}{g^2} \approx 71$ m.

§ 68. *Pendolo di Foucault*

1. In teoria le esperienze sullo spostamento verso est dei corpi in caduta libera potrebbero servire da prove sperimentali che il sistema di riferimento terrestre non è inerziale e che il sistema di riferimento copernicano è approssimativamente inerziale. Però tali esperimenti sono di difficile realizzazione e non hanno grande precisione. A questo scopo è preferibile impiegare il *pendolo di Foucault*. Così si chiama una sfera massiccia sospesa ad un filo molto lungo, che effettua piccole oscillazioni intorno alla sua posizione di equilibrio. Deviamo il pendolo dalla posizione di equilibrio e poi abbandoniamolo a se stesso. Se la Terra fosse un sistema di riferimento inerziale, il pendolo sarebbe sottoposto soltanto a forze «reali»: la forza di gravità $m\boldsymbol{g}$ e la forza di tensione del filo $\boldsymbol{F}$ (si ignorino le forze d'attrito e la resistenza dell'aria). Dato che le due forze si trovano in un piano verticale, il

pendolo dovrebbe oscillare nello stesso piano verticale immobile rispetto alla Terra a meno che non gli si comunichi una spinta laterale. Gli esperimenti dimostrano che non è così: il piano delle oscillazioni del pendolo nel sistema di riferimento terrestre ruota lentamente intorno alla verticale del luogo considerato ed inoltre nello stesso senso della rotazione diurna del Sole e delle stelle sulla sfera celeste. Ciò dimostra che il sistema di riferimento terrestre non è inerziale.

Per spiegare la rotazione del piano di oscillazioni del pendolo, si suppone che la Terra ruoti uniformemente a velocità angolare ω rispetto ad un sistema di riferimento inerziale sconosciuto. Nel sistema di riferimento terrestre alle forze «reali» che agiscono sul pendolo, si aggiungeranno anche le forze d'inerzia: la forza centrifuga e la forza di Coriolis. Il moto del pendolo verrà descritto dall'equazione (65.3). La forza di Coriolis $2m[v\omega]$ è perpendicolare al piano di oscillazione del pendolo. È questa forza che provoca la rotazione di questo piano.

2. Supponiamo dapprima che l'esperimento sia eseguito al polo terrestre. Allora nell'equazione (65.3) il vettore ω sarà diretto lungo la verticale. Ma il risultato è facile da prevedere se si considerano le oscillazioni del pendolo in un sistema di riferimento inerziale. Dato che in questo sistema non ci sono forze d'inerzia, sul pendolo agiscono soltanto la forza di gravità $m\boldsymbol{g}$ e la forza di tensione del filo $\boldsymbol{F}$. Quindi nel sistema di riferimento inerziale il piano di oscillazione del pendolo conserverà una posizione immutabile. La Terra invece ruoterà alla velocità angolare ω rispetto a questo piano fisso. In altre parole, il piano di oscillazione del pendolo ruoterà rispetto alla Terra alla stessa velocità angolare ω ma nel senso opposto. È evidente che il risultato della previsione non può dipendere dal modo in cui si applica la teoria, se quest'ultima è corretta. Perciò a questo stesso risultato saremmo giunti anche se avessimo cominciato sin dall'inizio a considerare il problema nel sistema di riferimento terrestre per mezzo dell'equazione del moto relativo (65.3). Questa osservazione permette di comprendere anche il comportamento del piano di oscillazione del pendolo se l'esperimento viene effettuato in qualsiasi altro luogo della superficie terrestre che non sia il polo.

3. Ripetiamo l'esperimento in punto della superficie terrestre di latitudine geografica ϑ. Decomponiamo il vettore velocità angolare ω in due componenti: una verticale ω_v e l'altra orizzontale ω_{or}: $\omega = \omega_v + \omega_{or}$. Decomponiamo a sua volta la componente orizzontale in due componenti: $\omega_\parallel$ e $\omega_\perp$, di cui $\omega_\parallel$ si trova nel piano di oscillazioni del pendolo e $\omega_\perp$ è perpendicolare a questo piano (fig. 189). Allora l'equazione (65.3) si scriverà nella forma

$$m\boldsymbol{a} = m\boldsymbol{g} + 2m[v\omega_v] + 2m[v\omega_\perp] + 2m[v\omega_\parallel] + \boldsymbol{F}.$$

La componente $2m[v\omega_\perp]$ della forza di Coriolis è diretta lungo il filo del pendolo. Essa modifica leggermente sia la tensione del filo che il periodo di oscillazioni del pendolo. Dato che questa componente non influisce sulla

posizione del piano di oscillazioni del pendolo, si può ignorarla nel problema concernente la rotazione di questo piano. La seconda componente della forza di Coriolis $2m[v\omega_v]$ è più importante nel caso in esame. Essa è perpendicolare al piano di oscillazione del pendolo e determina la rotazione di questo piano. La terza componete $2m[v\omega_\parallel]$ è perpendicolare anch'essa al piano di oscillazione del pendolo e influisce ugualmente su questo piano. Però nel caso di piccole oscillazioni del pendolo, essendo piccolo l'angolo α, anche questa componente è piccola. Inoltre, essa cambia periodicamente di senso durante le oscillazioni del pendolo. Quando il pendolo si sposta a destra o a sinistra dal centro O, la componente $2m[v\omega_\parallel]$ è diretta verso il dietro del piano del disegno (fig. 189). Quando il pendolo ritorna dalle sue

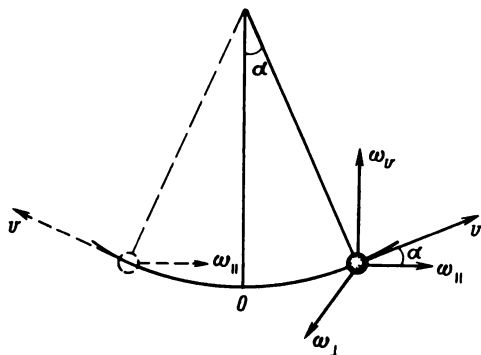



Fig. 189.

posizioni estreme verso il centro O, essa è diretta in senso opposto, cioè è orientata verso il lettore. Perciò la forza $2m[v\omega_\parallel]$ non dà luogo ad una rotazione sistematica del piano di oscillazione del pendolo, ma determina le piccole oscillazioni di questo piano rispetto alla sua posizione media. Questa forza può anche essere ignorata. In definitiva l'equazione del moto relativo si scriverà

$$ma = mg + 2m[v\omega_v] + F. \tag{68.1}$$

Essa non contiene più la componente orizzontale della velocità angolare ω e presenta la stessa forma che al polo. La differenza consiste nel fatto che invece della velocità angolare totale nell'equazione figura la sua componente verticale ω_v. Ciò significa che il pendolo si comporterà come al polo, solo che il suo piano di oscillazioni ruoterà con velocità angolare più piccola

$$\omega_v = \omega \sin\vartheta. \tag{68.2}$$

Il piano di oscillazioni effettuerà un giro completo durante il tempo

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega \sin\vartheta} = \frac{T}{\sin\vartheta}, \tag{68.3}$$

dove T è il periodo di rivoluzione della Terra rispetto ad un sistema di riferimento inerziale.

Il primo esperimento reale fu effettuato da Foucault nell'osservattorio di Parigi nel 1850 e ripetuto nel 1851 nel Pantheon. Il pendolo aveva una lunghezza di 67 metri ed una sfera metallica di massa $m = 28$ kg. L'esperimento dimostra che rispetto alla Terra il piano di oscillazione del pendolo ruota intorno alla verticale del luogo considerato in conformità alle formule (68.2) e (68.3) a condizione che la rotazione della Terra stessa venga rapportata al sistema di riferimento copernicano. Ciò dimostra che il sistema di riferimento terrestre non è inerziale, mentre il sistema copernicano lo è. È evidente che quest'ultima affermazione non può essere così categorica come la prima; è meglio dire che l'esperimento di Foucault non contraddice l'ipotesi del carattere inerziale del sistema di riferimento copernicano.

4. Studiamo più minuziosamente la forma della traiettoria del pendolo di Foucault durante le sue oscillazioni rispetto al sistema di riferimento terrestre. Come già dimostrato, la componente orizzontale della velocità angolare ω si può trascurare ritenendo che la Terra ruoti intorno alla verticale alla velocità angolare ω_v. In altre parole, si può ragionare come se l'esperimento di Foucault fosse realizzato al polo e nel frattempo la Terra ruotasse ad una velocità angolare più piccola ω_v. Supponiamo che il vettore velocità angolare ω_v sia orientato perpendicolarmente al piano del disegno

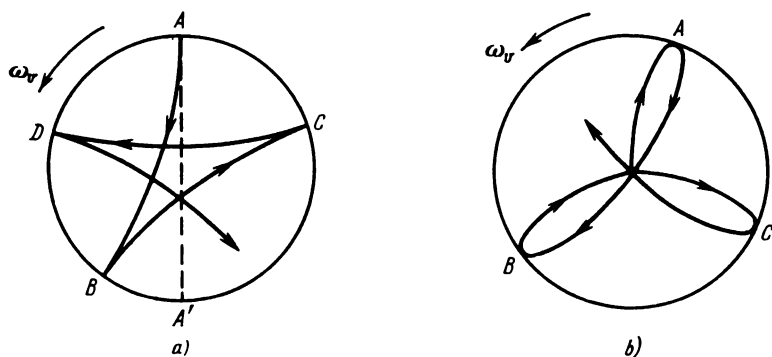



Fig. 190.

verso il lettore (fig. 190). La forza di Coriolis $2m[v\omega_v]$ che agisce sul pendolo durante le sue oscillazioni è perpendicolare alla sua traiettoria ed è diretta a destra lungo il moto del pendolo. Questa forza incurva la traiettoria del pendolo. Ammettiamo prima che il pendolo si trovi nella posizione estrema A e venga abbandonato a se stesso senza velocità iniziale. Se non ci fosse la forza di Coriolis, il pendolo si sposterebbe nel punto A' diametralmente opposto ad A. La forza di Coriolis fa subire al pendolo una devia-

zione e il pendolo arriverà al punto B situato più a destra rispetto al punto A'. Nel punto B la velocità del pendolo si annullerà e poi cambierà di direzione. Cambierà direzione anche la forza di Coriolis e come prima incurverà a destra la traiettoria del pendolo (l'osservatore dovrà girarsi per poter guardare sempre nella direzione del moto del pendolo). Poi il pendolo toccherà successivamente nuovi punti della curva C, D, ... Infine si otterrà una curva complicata con numerosi punti angolosi, rappresentata schematicamente nella figura 190, *a*.

Un altro tipo di traiettoria si ottiene nel caso in cui al pendolo in posizione di equilibrio è comunicata una spinta. La traiettoria come prima si incurverà verso destra in direzione del pendolo. Però ai punti estremi A, B, C, ... (fig. 190, *b*) il pendolo arriverà con velocità azimutale differente da zero dovuta all'azione della forza di Coriolis che agisce sul pendolo quando si sposta dal centro ai punti esterni. Quindi i punti di ritorno della curva saranno non punti angolosi ma segmenti arrotondati, come illustrato nella figura 190, *b*. Dato che la rotazione della Terra è lenta, l'osservatore non si accorge delle incurvature del piano di oscillazioni del pendolo. In ambedue i casi gli pare che il piano di oscillazioni del pendolo ruoti intorno alla verticale alla velocità angolare $\omega_v = \omega \sin\vartheta$.

Problema

Uno dei pendoli di Foucault è installato nella cattedrale Sant'Isacco a Leningrado. La lunghezza del pendolo è di 98 m, l'ampiezza lineare di oscillazione della sfera del pendolo (cioè, la deviazione massima rispetto alla sua posizione di equilibrio) è $x_0 = 5$ m. Il pendolo è stato abbandonato a sè stesso senza spinte dalla posizione estrema. Si calcoli la deviazione laterale della sfera del pendolo dalla posizione di equilibrio nell'istante in cui essa passa per la sua posizione di equilibrio. La latitudine di Leningrado è $\vartheta = 60°$.

Soluzione. Questo problema si risolve più facilmente se si considera il moto in un sistema di riferimento immobile (più esattamente, in un sistema di riferimento in rotazione rispetto alla Terra intorno alla verticale del luogo considerato alla velocità angolare $-\omega_v$). In questo sistema di riferimento l'equazione delle piccole oscillazioni di un pendolo matematico è $\ddot{r} + \Omega^2 r = 0$, dove $\Omega^2 = g/l$ e r è la deviazione del pendolo. Nell'istante iniziale il pendolo, ruotando insieme con la Terra, possiede una velocità laterale $\omega_v x_0$. Poniamo l'origine delle coordinate O nella posizione di equilibrio del pendolo e orientiamo l'asse X dal punto O al punto $(x = x_0, y = 0)$, in cui il pendolo si trovava nell'istante iniziale. Per il moto lungo l'asse Y si ha $\ddot{y} + \Omega^2 y = 0$. Risolvendo questa equazione per le condizioni iniziali $y_{t=0} = 0$, $\dot{y}_{t=0} = \omega_v x_0$, si ottiene

$$y = \frac{\omega_v x_0}{\Omega} \sin\Omega t.$$

In posizione media $\Omega t = \pi/2$ e per la deviazione laterale in questo punto la nostra formula dà

$$y = \frac{\omega_v x_0}{\Omega} = \frac{\omega x_0}{\Omega} \sin\vartheta \approx 1 \text{ mm}.$$

Si raccomanda al lettore di ripetere il calcolo (ottenendo lo stesso risultato) considerando il moto nel sistema di riferimento terrestre.

§ 69. *Le maree*

1. Sulle rive dei mari e degli oceani si osserva due volte al giorno un innalzamento dell'acqua del mare (*flusso*) fino ad un livello massimo (*alta marea*). Subito dopo comincia l'abbassamento dell'acqua (*riflusso*) fino ad un livello minimo (*bassa marea*). La differenza tra i livelli della bassa e alta marea si chiama *ampiezza della marea*. Il tempo che intercorre tra le posizioni successive dell'alta (o bassa) marea è uguale a 12 h 25 min. Questo periodo coincide con la metà del tempo impiegato dalla Luna, *nel suo moto visibile per effettuare una rivoluzione completa attorno alla Terra*. Perciò già da moltissimo tempo la causa delle maree veniva attribuita alla posizione della Luna sulla sfera celeste. Però una spiegazione scientifica del fenomeno fu data per la prima volta da Newton.

Il flusso e il riflusso si spiegano con la non uniformità *del campo di gravitazione della Luna e in parte del campo di gravitazione del Sole*. Se il campo gravitazionale esterno fosse uniforme sarebbe compensato totalmente, nel sistema di riferimento terrestre, dalla forza d'inerzia di traslazione dovuta al moto accelerato del centro di massa della Terra (in cui poniamo l'origine delle coordinate del sistema di riferimento). In realtà il campo gravitazionale non è uniforme e la compensazione totale ha luogo soltanto nel centro di massa della Terra, in tutti gli altri punti la compensazione è parziale e le forze che rimangono non compensate provocano le maree. L'influenza della Luna è più importante di quella del Sole, perché il suo campo di gravitazione, nonostante sia più debole di quello solare, è *meno uniforme* essendo la Luna circa 400 volte più vicina alla Terra del Sole. Vediamo prima quale sarebbero le maree se non ci fosse il Sole e la Terra fosse sottoposta soltanto all'influenza del campo di gravitazione della Luna.

2. Ammettiamo per semplificare che la Terra sia una sfera solida indeformabile coperta da un oceano di profondità costante. Supponiamo anche che la Luna si sposti lungo il piano equatoriale della Terra. Consideriamo i punti dell'oceano situati lungo l'equatore. La Terra e la Luna ruotano intorno al loro centro di massa comune come se esse cadessero continuamente verso questo centro. Il punto A (fig. 191), rispetto al quale la Luna è allo *zenit*, è più vicino alla Luna che il centro O della Terra; quest'ultimo a sua volta è più vicino alla Luna che il punto B diametralmente opposto, rispetto al quale la Luna è al *nadir*. Quindi il campo gravitazionale della Luna è più forte nel punto A e più debole nel punto B che nel centro della Terra. Sotto l'azione dell'attrazione gravitazionale della Luna le particelle d'acqua nel punto A si avvicineranno alla Luna con una maggiore accelerazione che il centro O della Terra e le particelle d'acqua nel punto B con minore accelerazione. Partendo da questa considerazione, la maggior parte degli autori cade in errore perché segue Newton. Le conclusioni relative alle accelerazioni delle particelle d'acqua vengono estese alle loro velocità e spostamenti. Si afferma che le particelle d'acqua nel punto A si dovevano avvi-

cinare alla Luna più rapidamente che il centro O della Terra, e quindi dovevano allontanarsi da quest'ultimo. Al contrario, le particelle d'acqua in prossimità del punto B dovevano allontanarsi, ritardando rispetto al centro O della Terra. Per questa ragione compaiono sulla superficie oceanica due

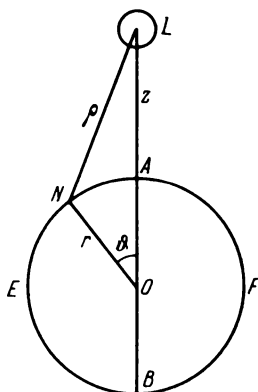



Fig. 191.

gobbe diametralmente opposte, o aggetti, con i centri nei punti A e B (fig. 192, *a*). I centri di queste gobbe si trovano sempre sulla retta che li congiunge alla Luna. A causa della rotazione assiale della Terra esse si spostano sulla superficie dell'oceano seguendo incessantemente il moto della Luna. Ecco perché l'intervallo di tempo che separa due flussi successivi (o due

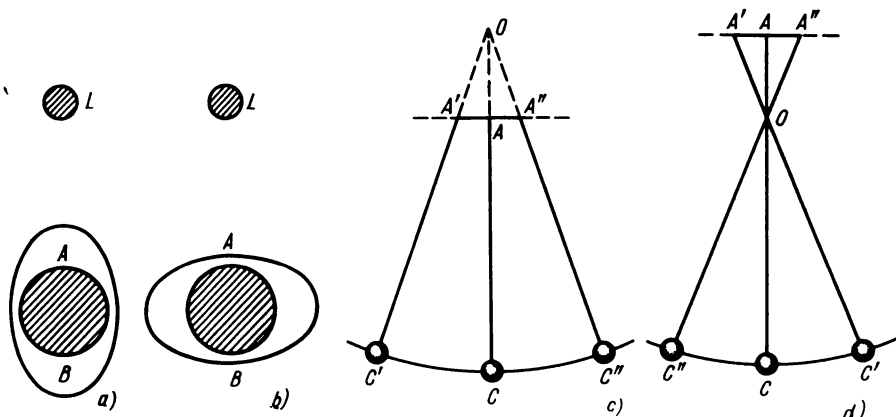



Fig. 192.

riflussi) è di 12 h. 25 min. Secondo la spiegazione riportata l'alta marea si dovrebbe avere quando la Luna si trova al *culmine superiore* o *inferiore* (allo zenit o al nadir) e la bassa marea quando la Luna è in quadratura. Ma questa conclusione non trova conferma nella pratica. È piuttosto vero il contrario: l'*alta marea si osserva quando la Luna è in quadratura* e la *bassa marea quando la Luna si trova nelle sue culminazioni* (fig. 192, *b*). In ogni

caso tra un passaggio della Luna allo zenit (nadir) e la corrispondente alta marea passa un notevole intervallo di tempo, dell'ordine di alcune ore. Nei servizi portuali il valore medio di questo intervallo si chiama *ora applicata*. Una tale discrepanza tra teoria e osservazioni pratiche è dovuta agli errori di ragionamento sopra accennati. Lo spostamento e la velocità delle particelle d'acqua vengono determinati non soltanto dalle accelerazioni ma anche dai loro *valori iniziali*. Se in un medesimo istante qualunque (che si potrebbe considerare come istante iniziale) le particelle d'acqua si trovassero tutte in stato di quiete, ad esempio, il ragionamento sarebbe esatto. Ma questa condizione non si realizza sulla Terra. Ci soffermeremo su questo problema in seguito.

3. Il problema dell'elaborazione di una teoria delle maree si può suddividere in due parti. Una, più semplice, consiste nel definire le *forze generatrici delle maree* che agiscono sull'acqua dell'oceano in diversi punti del globo terrestre. L'altra parte, incomparabilmente più ardua, consiste nel determinare il *moto forzato* dell'acqua provocato dall'azione di queste forze. Soffermiamoci per ora sulla prima parte del problema.

Nel sistema di riferimento terrestre le forze che agiscono sulle particelle d'acqua sono le forze di gravitazione e le forze d'inerzia. Le forze di attrazione terrestre e le forze centrifughe che compaiono per la rotazione della Terra intorno al suo centro di massa non hanno nessun ruolo nella formazione delle maree. Indichiamo la loro intensità risultante con $\boldsymbol{g}$ (accelerazione di caduta libera). *Il vettore* $\boldsymbol{g}$ *in ogni punto della superficie terrestre resta costante. Esso definisce la forma della superficie libera degli oceani nello stato di equilibrio.* Questa superficie è ovunque perpendicolare al vettore $\boldsymbol{g}$. Ciò che importa nella teoria delle maree sono *le deviazioni rispetto a questa forma di equilibrio,* dovute all'azione delle forze variabili che provocano le maree. Nel calcolare queste deviazioni si può assimilare la forma di equilibrio della superficie degli oceani ad una sfera. Non consideriamo la forza d'inerzia di Coriolis poiché, in assenza delle forze che provocano le maree, consideriamo l'acqua oceanica in stato di riposo. Le forze di Coriolis, che appaiono a causa del movimento delle acque, provocato dai flussi e riflussi, sono trascurabili. Quindi, nel calcolare le forze generatrici delle maree bisogna considerare soltanto le forze di gravitazione dei corpi esterni (Luna) nonché le forze d'inerzia dovute al moto accelerato del centro della Terra: le chiameremo *forze d'inerzia traslatorie* (cfr. § 64).

4. Vogliamo riferire la forza generatrice delle maree all'unità di massa sulla quale essa agisce e indichiamola con $\boldsymbol{f}$. È più semplice calcolare prima non il vettore $\boldsymbol{f}$, ma il potenziale φ_{m} corrispondente al vettore $\boldsymbol{f}$, ma il potenziale dell'unità di massa sottoposta all'azione della forza $\boldsymbol{f}$. Questo potenziale si compone del potenziale della forza gravitazionale della Luna (φ_{L}) e del potenziale delle forze d'inerzia traslatorie (φ_{in}). Tralasciando i calcoli, che verranno eseguiti nel problema alla fine di questo paragrafo, riportiamo il risultato definitivo. Il potenziale generatore delle maree è dato

dall'espressione

$$\varphi_m = -\frac{3}{4}\frac{GM_L}{R_{TL}^3}r^2\cos 2\vartheta, \tag{69.1}$$

dove M_L è la massa della Luna, R_{TL} la distanza tra i centri della Terra e della Luna, ϑ la distanza della Luna dallo zenit nell'istante considerato, r la distanza tra il centro della Terra e il punto di osservazone N (fig. 191). Le grandezze r e ϑ sono le coordinate polari del punto di osservazione. La forza generatrice delle maree si otterrà derivando il potenziale φ_m. Essa comporta una componente verticale (f_v) e una componente orizzontale (f_{or})

$$f_v = -\frac{\partial\varphi_m}{\partial r}, \quad f_{or} = -\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi_m}{\partial\vartheta}. \tag{69.2}$$

(I sensi positivi sono quelli che corrispondono alla crescita delle grandezze r e ϑ). Derivando e introducendo l'accelerazione di caduta libera $g = G\frac{M_T}{r^2}$, si ottiene

$$f_v = \frac{3}{2}\frac{M_L}{M_T}\left(\frac{r}{R_{TL}}\right)^2 g\cos 2\vartheta, \tag{69.3}$$

$$f_{or} = \frac{3}{2}\frac{M_L}{M_T}\left(\frac{r}{R_{TL}}\right)^2 g\sin 2\vartheta. \tag{69.4}$$

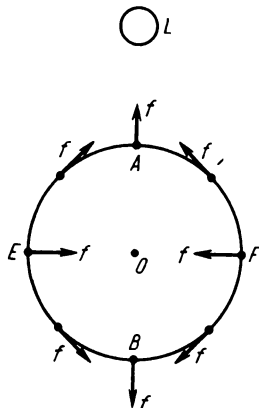



Fig. 193.

La distribuzione delle forze generatrici delle maree lungo l'equatore è indicato dalle frecce sulla figura 193. La forza di marea totale sarà

$$f = \sqrt{f_v^2 + f_{or}^2} = \frac{3}{2}\frac{M_L}{M_T}\left(\frac{r}{R_{TL}}\right)^3 g. \tag{69.5}$$

Sostituendo i valori $M_L/M_T = 1/81$, $r/R_{TL} = 1/60$, si ottiene $f/g = 8{,}57 \cdot 10^{-8}$. Bisogna osservare che la Luna ruota attorno alla Terra su un'orbita ellittica. Al perigeo essa si trova ad una distanza uguale a 57 raggi terrestri e nell'apogeo ad una distanza uguale a 63,7 raggi terrestri. Questo influisce sulla forza generatrice delle maree dovuta alla Luna. Per la Luna il rapporto f/g varia tra $7{,}2 \cdot 10^{-8}$ (all'apogeo) e 10^{-7} (al perigeo). È chiaro che le formule riportate sono valide anche per le forze generatrici delle maree dovute al Sole. In questo caso $f/g = 3{,}8 \cdot 10^{-8}$, cioè 2,25 volte più piccole che per la Luna ad una distanza media dalla Terra. Il modulo della forza generatrice delle maree dovuta al Sole varia di circa il 10 per cento nel corso di un anno.

5. I risultati riportati dimostrano quanto le forze generatrici delle maree sono piccole in confronto alla forza di gravità terrestre. Se queste forze provocano fenomeni grandiosi come le maree, ciò dipende dal fatto che esse non sono costanti e *variano periodicamente nel tempo*. Se variassero da un punto all'altro sulla superficie terrestre, ma rimanessero costanti nel tempo, modificherebbero solo di poco la forma di equilibrio della superficie libera dell'acqua oceanica. Ma questa forma rimarrebbe invariata nel tempo, cioè non si avrebbero né flussi né riflussi. In realta, come dimostrano le formule (69.3), (69.4) e (69.5) in ogni punto del globo terrestre rimane invariabile soltanto il modulo della forza generatrice delle maree e non la sua direzione. In ogni punto del globo terrestre le due componenti f_v e f_{or} della forza generatrice delle maree variano periodicamente nel tempo in seguito alle variazioni giornaliere della distanza dallo zenit ϑ della Luna. Ignorando i fattori secondari, si può porre $\vartheta = \omega t$, dove ω è la velocità angolare della rotazione assiale della Terra (rispetto alla retta Terra-Luna). Quindi $f_v \sim \cos 2\omega t$, $f_{or} \sim \sin 2\omega t$. Quando la forza f_v raggiunge il suo valore massimo, la forza f_{or} si annulla e viceversa. Questo provoca delle *variazioni periodiche della direzione di un filo a piombo* in ogni punto del globo terrestre, il che è causa diretta di flussi e riflussi.

6. Ed ora affrontiamo la seconda parte del problema delle maree, cioè determiniamo l'azione delle forze generatrici delle maree sull'acqua oceanica. La prima teoria delle maree, la teoria detta *statica*, è stata elaborata da Newton. Questa teoria permette di determinare la forma istantanea della superficie libera dell'oceano, come se le forze generatrici delle maree fossero costanti, cioè invariabili nel tempo. Secondo le leggi dell'idrostatica, la superficie libera di un liquido nello stato di equilibrio è in tutti i punti perpendicolare alle forze (costanti) alle quali essa è sottoposta. Ne segue che lungo la superficie libera di un liquido il potenziale φ di tutte le forze non deve variare. È evidente che $\varphi = \varphi_0 + \varphi_m$, dove φ_0 è il potenziale di tutte le forze che determinano l'accelerazione g della caduta libera in assenza delle forze generatrici delle maree. Quindi, secondo la teoria statica delle maree, l'equazione della superficie libera dell'acqua oceanica deve essere della forma $\varphi_0 + \varphi_m = \text{cost}$ o, sviluppando

$$\varphi_0 - \frac{3}{4}\frac{GM_L}{R^3_{TL}} r^2 \cos 2\vartheta \doteq \text{cost.} \tag{69.6}$$

Applichiamo questa equazione ai punti A ed E della superficie dell'oceano (cfr. fig. 193). Ponendo prima $\vartheta = 0$, poi $\vartheta = \pi/2$, si ottiene

$$\varphi_0(A) - \frac{3}{4}\frac{GM_L}{R^3_{TL}} r^2_A = \varphi_0(E) + \frac{3}{4}\frac{GM_L}{R^3_{TL}} r^2_E.$$

Ma $\varphi_0(A) - \varphi_0(E) = gH$, dove $H = r_A - r_E$ è l'ampiezza della marea. Si possono omettere gli indici A ed E degli altri due termini, ponendo $r_A = r_E = r$. Osservando ancora che $g = G\frac{M_T}{r^2}$ e utilizzando la formula (69.5), si avrà

$$H = \frac{f}{g} r. \tag{69.7}$$

Da questa formula si ottiene per l'ampiezza delle maree lunari $H = 0{,}55$ m e per l'ampiezza delle maree solari $H = 0{,}24$ m. Quindi, secondo la teoria statica la configurazione dei flussi e riflussi deve corrispondere alla figura 192, *a* e non alla figura 192, *b*. È questa l'imperfezione maggiore della teoria statica delle maree.

7. Una teoria corretta e completa delle maree deve essere una *teoria dinamica*. Si deve calcolare il *moto forzato* delle acque oceaniche sotto l'azione di forze *variabili* generatrici delle maree. La questione di principio che la teoria deve prendere in considerazione consiste nel fatto che le acque oceaniche costituiscono un sistema meccanico caratterizzato, come un pendolo, dalle *frequenze proprie delle oscillazioni libere*. Per illustrare in modo più semplice la sostanza della questione immaginiamo, seguendo un'idea di Airy, che lungo l'equatore terrestre sia scavato un canale di profondità uniforme riempito di acqua e che circondi la Terra come un nastro. Se in qualche punto del canale sorge una perturbazione, essa si propagherà lungo il canale ad una certa velocità. Trascuriamo le forze d'attrito che agiscono nei liquidi. In questo caso, come si dimostra in idrodinamica, la velocità di propagazione delle perturbazioni di grandi lunghezze d'onda (cioè delle perturbazioni le cui lunghezze d'onda sono molto grandi rispetto alla profondità h del canale) è determinata dalla formula $u = \sqrt{gh}$. Se h è la profondità media dell'oceano ($h = 3{,}5$ km), non è difficile calcolare che la perturbazione farà un cerchio completo intorno alla Terra in 60 ore. Nel caso delle maree il tempo in questione è due volte più piccolo, perché in questo caso la perturbazione si compone di due gobbe indentiche A e B, situate in punti diametralmente opposti del globo terrestre (fig. 192, *a, b*). Passate 30 ore la gobba A sarà spostata nella posizione B e la gobba B in quella A e quindi la forma iniziale della superficie dell'acqua nel canale sarà ristabilita. Ciò significa che l'acqua del canale ha un *proprio periodo di*

oscillazioni uguale a $T_0 = 30$ h, che è più grande del periodo di oscillazione della forza generatrice delle maree $T = 12$ h 25 min. Come è noto per la teoria elementare delle oscillazioni, nel caso considerato (in assenza di forze d'attrito) ***la forza esterna e le oscillazioni forzate provocate da questa forza sono in opposizione di fase.*** Invece per $T_0 < T$ le oscillazioni che si esercitano sono ***in fase.*** Così se si mette in stato di oscillazione il punto A del filo di sospensione di un pendolo matematico, anche la pallina C del pendolo si mette a oscillare (fig. 192 *c, d*). Nel caso in cui la frequenza delle oscillazioni del punto A della sospensione sia piccola, questo punto e la pallina C si sposteranno in ogni istante nel medesimo senso, se la frequenza invece è grande il punto A e la pallina C si sposteranno in senso opposto. Poiché nel caso in esame $T_0 > T$, la configurazione delle maree deve corrispondere a quella figura 192 *c, d, b* e non a quella della figura 192, ***a***. La teoria statica delle maree sarebbe qualitativamente corretta se fosse $T_0 < T$. Ma allora occorre che la profondità h superi ~ 20 km.

8. I flussi solari si sovrappongono ai flussi lunari e se si rafforzano reciprocamente le maree risultano particolarmente forti. Questo succede quando il Sole, la Luna e la Terra si trovano allineate su una retta, cioè al momento del plenilunio e del novilunio. Le maree che si creano in quel periodo si chiamano ***grandi maree*** (sizigie). Al contrario, quando la Luna è al primo o all'ultimo quarto, il flusso lunare viene attenuato dal flusso solare. In questo caso la ***marea*** risultante è ***piccola*** o ***di quadratura.***

Non è ancora stata costruita una teoria completa delle maree che risponda a tutti i bisogni della pratica. Ma non ci dobbiamo sorprendere poiché la natura delle maree è notevolmente influenzata dal rilievo del fondo marino ed oceanico, dai continenti e dalle isole, dalle configurazioni delle coste, dagli attriti, dalle correnti e dai venti, dalla deformazione della Terra stessa provocate dall'azione delle forze generatrici delle maree e da numerosi altri fattori difficilmente calcolabili.

Sulle isole in oceano aperto l'ampiezza del flusso nei momenti di plenilunio e novilunio di solito è uguale a ~ 1 m, ciò che corrisponde alle previsioni della teoria statica. Presso le coste oceaniche l'ampiezza dei flussi è di solito uguale a ~ 2 m. Un'ampiezza di tre metri si osserva in pochi luoghi e un'ampiezza di sei metri si registra assai raramente. Le forti ampiezze si riscontrano o negli stretti di piccole dimensioni o in golfi molto pronunciati. Le ampiezze più forti sono registrate nella baia di Fundy sulla costa orientale del Canadà. Questa baia si trova tra il continente e la penisola della Nuova Scozia. All'entrata della baia l'ampiezza è di 4 m e raggiunge 12 e perfino 16 m nel punto più interno della baia. Durante le sizigie si hanno ampiezze che superano 20 m.

Problema

Dedurre le formule (69.1), (69.3), (69.4).

Soluzione. Come è dimostrato $\varphi_m = \varphi_L + \varphi_{in}$. Orientiamo l'asse Z verso la Luna (cfr. fig. 191). Sia w l'accelerazione con la quale il centro O della Terra si avvicina al centro di mas-

sa del sistema Terra-Luna. La forza d'inerzia corrispondente sarà $F = -mw$. Supponendola omogenea, si ha $\varphi_{in} = wz = wr\cos\vartheta$. Il potenziale della forza di attrazione della Luna è uguale a

$$\varphi_L = -G\frac{M_L}{\rho}.$$

La figura 191 dimostra che $\rho^2 = R_{TL}^2 - 2R_{TL}r\cos\vartheta + r^2$. Utilizzando la formula del binomio di Newton e ignorando i cubi e di gradi superiori di r, si ottiene

$$\varphi_L = -\frac{GM_L}{R_{TL}}\left(1 - \frac{2R_{TL}r\cos\vartheta - r^2}{R_{TL}^2}\right)^{-\frac{1}{2}} =$$

$$= -\frac{GM_L}{R_{TL}}\left[1 + \frac{2R_{TL}r\cos\vartheta - r^2}{2R_{TL}^2} + \frac{3}{8}\left(\frac{2r\cos\vartheta}{R_{TL}}\right)^2\right].$$

Il termine costante $-G\frac{M_L}{R_{TL}}$, come ogni altra grandezza costante che figura nell'espressione del potenziale, può essere omesso. Il termine lineare rispetto a r è compensato dal potenziale φ_{in} poiché $w = G\frac{M_L}{R_{TL}^2}$. Poi, dal potenziale φ_L si possono escludere tutti i termini che contengono soltanto r, ma non l'angolo ϑ. Essi apportano una medesima correzione radiale alla forza attiva in tutti i punti della superficie terrestre. Si può includere questa correzione nel valore di g, poiché essa non ha nessun rapporto con la formazione dei flussi. Considerando queste osservazioni non è difficile ottenere

$$\varphi_m = -\frac{3}{4}\frac{r^2}{R_{TL}}w\cos 2\nu = -\frac{3}{4}\frac{GM_L}{R_{LT}^3}r^2\cos 2\vartheta.$$

§ 70. *Massa gravitazionale e legge generalizzata di Galilei*

1. Abbiamo introdotto il concetto di massa per mezzo della legge di conservazione dell'impuso. Dato che alla base di questo concetto si trova la *proprietà d'inerzia dei corpi,* la massa così definita è chiamata *massa inerziale* e sovente viene indicata mediante $m^{(i)}$. Però *i corpi possiedono non soltanto capacità d'inerzia, ma anche capacità di eccitare campi gravitazionali nello spazio circonvicino.* Sotto questo aspetto essi si comportano come corpi che portano cariche elettriche e che danno origine intorno a loro a campi elettrici. L'inerzia dei corpi e la loro capacità di eccitare campi gravitazionale nello spazio circonvicino non devono essere considerate a priori come proprietà reciprocamente collegate e ancor meno come proprietà identiche dei corpi. Si potrebbe supporre che i corpi siano sorgenti di campi gravitazionali non perché possiedono masse inerziali ma perché portano delle cariche speciali analoghe alle cariche elettriche. Tali cariche si chiamano *cariche gravitazionali* o *masse gravitazionali. Le forze di interazione delle masse gravitazionali,* come dimostra l'esperienza, *sono inversamente proporzionali al quadrato della distanza tra di loro.* Per determinare quan-

titativamente le masse gravitazionali ci si comporta come nel caso delle cariche elettriche in elettrostatica. E cioè indichiamo con $m_1^{(g)}$ e $m_2^{(g)}$ le masse gravitazionali dei corpi puntiformi in interazione reciproca. La forza della loro attrazione gravitazionale si può scrivere nella forma

$$F = C\frac{m_1^{(g)}m_2^{(g)}}{r^2}, \tag{70.1}$$

dove C è un coefficiente numerico che dipende soltanto dalla scelta delle unità di misura. A questo coefficiente si può assegnare una dimensione ed un valore numerico arbitrari. Stabilite le unità di misura per r ed F, determiniamo anche la dimensione e l'unità di misura della massa gravitazionale, mentre la formula (70.1) definirà il principio di misura delle masse gravitazionali.

La proporzionalità della forza di interazione gravitazionale dei corpi rispetto alle loro masse gravitazionali non costituisce una legge della fisica. Introduciamo il concetto di massa gravitazionale in modo che la proporzionalità suindicata si osservi *per definizione. La legge della fisica stabilita da Newton afferma che la forza di interazione gravitazionale dei corpi è proporzionale alle loro masse inerziali.* Ne segue che *la massa inerziale di un corpo è proporzionale alla sua massa gravitazionale.* Si possono scegliere per queste masse unità tali che siano non soltanto proporzionali, ma anche numericamente uguali tra loro. Perciò questa legge fondamentale della fisica si chiama *legge di uguaglianza* (o *di equivalenza*) *delle masse gravitazionali ed inerziali.* Vediamo quali sono le sue basi sperimentali e le conseguenze fisiche.

2. Consideriamo prima la caduta libera dei corpi nel campo di gravità terrestre. In virtù della seconda legge di Newton $m^{(i)}\mathbf{a} = \mathbf{F}$, dove $\mathbf{F}$ è la forza di gravità, si deve intendere per $m^{(i)}$ la massa inerziale del corpo. La forza di gravità invece può essere rappresentata nella forma $\mathbf{F} = m^{(g)}\mathbf{g}$, dove $m^{(g)}$ è la massa gravitazionale di questo stesso corpo. Si fa osservare che qui consideriamo il moto del corpo rispetto ad un sistema di riferimento inerziale e perciò non introduciamo nessuna forza d'inerzia. Tutte le forze sono «reali» in senso newtoniano. In particolare, la forza di gravità $\mathbf{F}$ nel caso in esame è soltanto la forza di attrazione gravitazionale che viene esercitata tra il corpo e la Terra (la forza centrifuga non vi è inclusa). La seconda legge di Newton dà $m^{(i)}\mathbf{a} = m^{(g)}\mathbf{g}$, quindi

$$\mathbf{a} = \frac{m^{(g)}}{m^{(i)}}\mathbf{g}. \tag{70.2}$$

Dato che la massa inerziale e la massa gravitazionale sono uguali, si ha $\mathbf{a} = \mathbf{g}$, il che vuol dire che nel campo di gravità terrestre tutti i corpi cadono con la stessa accelerazione. Questo fatto sperimentale, dimostrato da Galilei, è la conferma della legge di uguaglianza della massa inerziale e della massa gravitazionale. Essa è valida per ogni campo gravitazionale. *In un*

solo e medesimo campo gravitazionale tutti i corpi in caduta libera acquistano la medesima accelerazione. Questo enunciato, noto sotto il nome di legge generalizzata di Galilei, è stato largamente utilizzato da noi a partire dal § 65. Vediamo che *la legge generalizzata di Galilei per il suo significato è perfettamente equivalente al principio dell'uguaglianza delle masse gravitazionale e d'inerzia.*

Gli esperimenti di Galilei non avevano una grande precisione. Newton e più tardi Bessel (1784-1846) sono riusciti ad ottenere una precisione sostanzialmente migliore con esperimenti sulle oscillazioni del pendolo. Per il periodo delle piccole oscillazioni del pendolo matematico abbiamo ottenuto la formula

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \tag{70.3}$$

Se le masse gravitazionale e d'inerzia non fossero uguali tra di loro, in questa formula si dovrebbe sostituire alla grandezza g l'accelerazione a, definita dall'espressione (70.2). Si avrebbe allora

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}\frac{m^{(i)}}{m^{(g)}}}. \tag{70.4}$$

La formula (70.4) si riduce alla formula (70.3) soltanto a condizione che $m^{(i)} = m^{(g)}$. Newton e Bessel hanno stabilito che il periodo delle oscillazioni del pendolo matematico non dipende dal materiale di cui è fatto, il che conferma la legge dell'uguaglianza delle masse gravitazionale e inerziale. La precisione relativa con la quale è stata stabilita questa uguaglianza negli esperimenti di Bessel, era di 1/60 000.

3. Per lungo tempo il record di precisione lo ebbero gli esperimenti cominciati nel 1887 dal fisico ungherese Eötvös (1848-1919), e continuati fino alla sua morte. Eötvös è riuscito a stabilire l'uguaglianza tra la massa d'inerzia e gravitazionale con una precisione relativa di $5\cdot 10^{-9}$. Rispetto agli esperimenti di Newton la precisione era maggiore di 100 000 volte circa e rispetto agli esperimenti di Bessel di 10 000 volte. L'idea degli esperimenti di Eötvös era la seguente. Il peso di un corpo si compone di due forze differenti: la forza di attrazione gravitazionale terrestre e la forza d'inerzia centrifuga. La prima forza è proporzionale alla massa gravitazionale, la seconda è uguale a $m^{(i)}\omega^2 r_\perp$, cioè proporzionale alla massa d'inerzia $m^{(i)}$. Se le masse gravitazionale e d'inerzia non fossero rigorosamente proporzionali l'una all'altra, la direzione di un filo a piombo dipenderebbe dal materiale di cui è fatto il corpo. Gli esperimenti di Eötvös avevano come obiettivo quello di scoprire l'esistenza di questo effetto. Con la precisione suindicata gli esperimenti avevano condotto ad un risultato negativo, il che dimostra la validità della legge di ugualglianza delle masse gravitazionale e inerziale. Per giungere ad una tale precisione bisognava valutare le variazioni della direzione di un filo a piombo di $1{,}5\cdot 10^{-6}$ secondi d'arco. Un osservatore

terrestre vedrebbe un oggetto di 3 mm di lunghezza sulla superficie della Luna con questa apertura angolare. Questa precisione fu ottenuta da Eötvös e dai suoi collaboratori per mezzo della *bilancia di torsione* e dei variometri gravitazionali. Sebbene gli esperimenti principali fossero stati eseguiti con i *variometri gravitazionali,* daremo una descrizione (certo schematica) degli esperimenti eseguiti utilizzando la bilancia di torsione poiché sono di più semplice comprensione.

Si attacca ad un filo, sottile e lungo, un'asta alle cui estremità si possono sospendere i pesi *1* e *2* (fig. 194, *b*), fatti di differenti materiali, platino e rame, ad esempio. L'asta si dispone perpendicolarmente rispetto al meri-

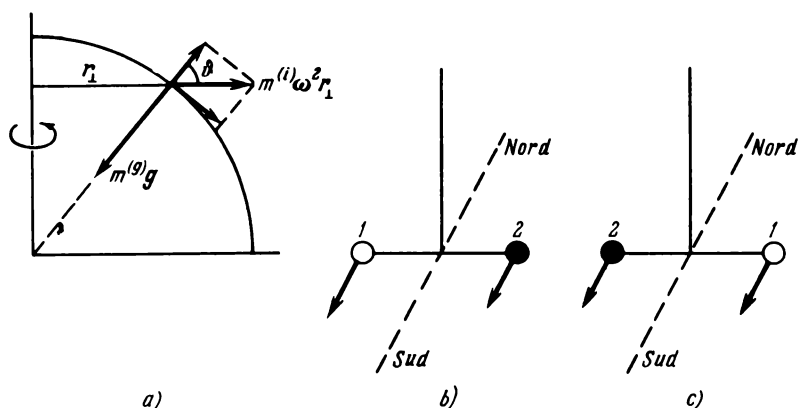



Fig. 194

diano del luogo considerato. Indichiamo con g l'intensità del campo gravitazionale terrestre, cioè la forza con la quale il campo agisce sull'unità di massa gravitazionale. Ambedue i pesi sono sottoposti a due forze: alla forza gravitazionale $m^{(g)}g$ e alla forza centrifuga $m^{(i)}\omega^2 r_\perp$. Quest'ultima possiede una componente verticale $m^{(i)}\omega^2 r_\perp \cos\vartheta$ (fig. 194, *a*), dove ϑ è la latitudine geografica del luogo considerato. Perciò se l'asta è una leva a braccia uguali una delle condizioni di equilibrio dei pesi sarà

$$m_1^{(g)}g - m_1^{(i)}\omega^2 r_\perp \cos\vartheta = m_2^{(g)}g - m_2^{(i)}\omega^2 r_\perp \cos\vartheta$$

ossia

$$m_1^{(i)}(\alpha_1 g - \omega^2 r_\perp \cos\vartheta) = m_2^{(i)}(\alpha_2 g - \omega^2 r_\perp \cos\vartheta),$$

dove α_1 e α_2 sono rispettivamente i rapporti delle masse gravitazionali alle masse d'inerzia per i pesi *1* e *2*. Se $\alpha_1 \neq \alpha_2$, dal rapporto derivato risulterebbe che $m_1^{(i)} \neq m_2^{(i)}$. In questo caso le forze centrifughe che agiscono sui pesi e quindi le loro componenti orizzontali orientate verso sud (fig. 194, *b*

e c) non sarebbero identiche, il che farebbe comparire un momento rotante

$$M_1 = (m_1^{(i)} - m_2^{(i)}) \frac{l}{2} \omega^2 r_\perp \sin\vartheta$$

che tende a torcere il filo (l è la lunghezza dell'asta). In stato di equilibrio l'angolo di torsione $\varphi_1 = (1/f)M_1$, dove f è il modulo di torsione. Se si fa ruotare di 180° tutto il dispositivo, cioè lo si fa passare dalla posizione b alla posizione c (fig. 194), il momento rotante e l'angolo di torsione cambiano di segno ($M_2 = -M_1$, $\varphi_2 = -\varphi_1$). L'angolo di torsione del filo allora sarà uguale a $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = -(2/f)M_1$. L'esperimento di Eötvös portò ad un risultato negativo, cioè dimostrò che $\varphi = 0$, qualsiasi fossero i materiali di cui sono fatti i pesi. Quindi $\alpha_1 = \alpha_2$, il che dimostra l'uguaglianza della massa gravitazionale e della massa inerziale.

4. *Una delle principali conseguenze della teoria della relatività è l'esistenza di un rapporto tra massa ed energia* $E = mc^2$, dove *m rappresenta la massa inerziale.* La legge dell'ugualianza della massa graviazionale e della massa inerziale permette di estendere questo enunciato alla massa gravitazionale. *Ogni energia deve possedere anche una massa gravitazionale.* L'alta precisione degli esperimenti di Eötvös ha permesso di verificare questa affermazione. A questo scopo Southerns ripetè gli esperimenti di Eötvös con sostanze radioattive ed ottene lo stesso risultato: non esiste nessuna differenza tra la massa gravitazionale e la massa inerziale. Dato che durante le trasformazioni radioattive l'energia e la massa inerziale diminuiscono, ne segue che diminuisce in proporzione anche la massa gravitazionale. Quindi l'uguaglianza delle due masse è sempre verificato.

5. Gli esperimenti di Eötvös sono stati ripetuti negli anni 1961-1964 dal fisico americano R. Dicke e dai suoi collaboratori che sono riusciti aumentare di più di 100 volte la precisione delle misurazioni di Eötvös. Venivano comparati pesi di rame e di piombo, d'oro e di alluminio. Con precisione relativa di $3 \cdot 10^{-11}$ è stata constatata l'uguaglianza dei coefficienti di proporzionalità tra la massa gravitazionale e la massa inerziale di queste sostanze.

Il principio che sta alla base dell'esperimento di Dicke è più semplice di quello di Eötvös. Negli esperimenti di quest'ultimo si trattava degli effetti dovuti all'azione congiunta dell'attrazione gravitazionale della Terra e delle forze d'inerzia risultanti della sua rotazione assiale. Negli esperimenti di Dicke invece alla Terra è stato sostituito il Sole. I pesi da comparare *1* e *2* erano come prima fissati alle estremità di un'asta rettilinea sospesa ad un filo sottile (fig. 195, *a*). Per ridurre al massimo l'influenza di tutte le perturbazioni esterne questo dispositivo veniva messo in un recipiente in cui ci fosse vuoto assoluto e veniva installato poi in un profondo pozzo di miniera termostatato lontano da qualunque costruzione. Poi il pozzo veniva chiuso ermeticamente e il dispositivo veniva controllato a distanza da un posto di comando per alcuni mesi.

Negli esperimenti di Dicke non svolgono un ruolo di principio né la forza gravitazionale della Terra né la forza centrifuga risultante della rotazione della Terra attorno al suo centro e perciò queste forze possono essere ignorate. Nel punto considerato del globo terrestre esse sono costanti e determinano soltanto la posizione di equilibrio a cui tende l'asta. Le forze che importano sono le forze di attrazione gravitazionale del Sole e la forza d'inerzia traslatoria collegata al moto accelerato del centro della Terra verso il Sole (si può ignorare l'influenza della Luna). Indichiamo questa accelerazione con $\boldsymbol{a}$. Per definizione stessa di massa gravitazionale, la forza di

Fig. 195.

attrazione gravitazionale del Sole rispetto all'unità di massa gravitazionale è la medesima per tutti i corpi. Questa forza è l'intensità del campo gravitazionale del Sole che non dipende che dal Sole stesso; indichiamola con $\boldsymbol{g}$. Però se la legge dell'uguaglianza della massa gravitazionale e della massa inerziale fosse violata, la forza di attrazione gravitazionale del Sole rispetto all'unità di massa inerziale sarebbe differente per differenti corpi. In questo caso apparirebbe un momento rotante tendente a torcere il filo di sospensione dell'asta. Se h_1 e h_2 sono i bracci dell'asta sospesa per il suo centro di massa C (fig. 195, a), il momento rotante rispetto al punto C sarà

$$M = (m_1^{(g)}g - m_1^{(i)}a)h_1 + (m_2^{(i)}a - m_2^{(g)}g)h_2$$

Per definizione di centro di massa (si dovrebbe precisare dicendo centro delle masse inerziali) si ha $m_1^{(i)}h_1 = m_2^{(i)}h_2$. Quindi, utilizzando le indicazioni introdotte prima α_1 e α_2, si ottiene

$$M = m_1^{(i)}h_1 g\alpha_1 - m_2^{(i)}h_1 g\alpha_2 = m_1^{(i)}h_1 g(\alpha_1 - \alpha_2).$$

A causa del moto del Sole, che è ben visibile, i bracci dell'asta variano periodicamente. Perciò anche il momento M deve variare periodicamente ed il periodo sarà uguale ad un giorno. Come risultato compariranno delle oscillazioni forzate dell'asta di medesimo periodo che potrebbero essere scoperte e misurate per mezzo di un dispositivo molto sensibile. Per urti ca-

suali ed inevitabili, a cui era sottoposto il sistema in esame, non è stato possibile vedere tali oscillazioni. Ne segue che nei limiti d'errore di misura $\alpha_1 = \alpha_2$, cioè la legge di equivalenza è valida.

6. L'esperimento di Dicke in forma perfezionata fu ripetuto nel 1971 da V. Braginsky e V. Panov. Invece di un'asta è stato adoperato un pendolo a torsione equivalente a quattro aste, unite insieme come indicato nella figura 195, *b*. La precisione della misurazione è stata aumentata di 30 volte circa. Si mettevano a confronto l'alluminio e il platino. L'uguaglianza dei coefficienti di proporzionalità tra la massa gravitazionale e la massa inerziale per queste sostanze fu confermata con una precisione relativa di 10^{-12}. Con questa precisione si potrebbe pesare una nave di 10.000 tonnellate di stazza e conoscere il peso a meno di 0,01 g.

7. La fisica prerelativistica non attribuiva un valore essenziale al problema dell'uguaglianza della massa gravitazionale e della massa inerziale dei corpi considerandola una coincidenza fortuita. L'importanza fondamentale dell'uguaglianza delle due masse fu compresa da Einstein. La legge di equivalenza gli servì come punto di riferimento nell'elaborazione della *teoria della relatività generale* detta anche *teoria relativistica della gravitazione*. Questa legge è il principale fatto sperimentale su cui si basa la teoria della relatività generale. Quest'ultima sarebbe errata e si dovrebbe accantonare se si verificasse una violazione anche minima della legge dell'equivalenza delle masse gravitazionale ed inerziale. Ecco perché l'aumento di precisione delle misurazioni, già eccezionale, ha un'importanza di principio e non è una semplice passione sportiva che si pone come scopo quello di battere il record di precisione.

§ 71. *Principio di equivalenza delle forze di gravitazione e delle forze inerziali*

1. Abbiamo già notato più volte che in un campo gravitazionale dato tutti i corpi acquistano la stessa accelerazione qualunque sia la loro massa e composizione chimica. Quindi nel campo in esame tutti i corpi si muovono in modo assolutamente identico se le condizioni iniziali sono identiche. Uguali proprietà possiedono i corpi in moto libero se si considerano i loro moti rispetto ad un sistema di riferimento non inerziale. In altre parole, queste proprietà sono inerenti alle forze d'inerzia. Questa analogia tra le forze di gravitazione e le forze d'inerzia è il punto di partenza nell'elaborazione della teoria della relatività generale o teoria relativistica della gravitazione di Einstein.

Vediamo, come ha fatto Einstein, che cosa succede in un ascensore in moto. Supponiamo dapprima che l'ascensore sia immobile sospeso al solo cavo o in moto uniforme rispetto alla Terra. Tutti i corpi che si trovano

nell'ascensore sono sottoposti all'azione del campo di gravitazione terrestre. Il passeggero sente il proprio peso, esercita una pressione sul pavimento dell'ascensore che a sua volta esercita su lui una contro-pressione uguale e diretta in senso opposto. Un peso sospeso ad una molla la allunga con la forza del suo peso. Tutti i corpi abbandonati a sé stessi cadono con la medesima accelerazione $\boldsymbol{g}$ rispetto all'ascensore e via dicendo.

Immaginiamo ora un ascensore talmente distante dalla Terra e da altri corpi celesti che tutti questi corpi non esercitino su di esso praticamente nessuna azione gravitazionale. Supponiamo che qualcuno tiri il cavo dell'ascensore comunicando a questo ultimo un'accelerazione $\boldsymbol{a} = -\boldsymbol{g}$. Nell'ascensore non esiste campo di gravitazione, ma si manifesta la forza d'inerzia $-m\boldsymbol{a} = m\boldsymbol{g}$. Sotto l'azione di questa forza d'inerzia tutti i corpi che si trovano nell'ascensore, se non sono trattenuti, cominciano a «cadere» con la stessa accelerazione $\boldsymbol{g}$ come nel primo caso. Un peso attaccato ad una molla la allunga come se possedesse un peso uguale a $m\boldsymbol{g}$. Il passeggero, che si trova nell'ascensore, eserciterà sul pavimento la stessa pressione come nel caso precedente. In breve, *tutti gli effetti meccanici e tutti i moti che si manifestano nell'ascensore saranno esattamente gli stessi che in un ascensore immobile sospeso in un campo di gravitazione.* Einstein ha esteso questa affermazione non soltanto agli effetti meccanici ma a tutti i fenomeni fisici come aveva già fatto per il principio di relatività di Galilei. Per una simile ipotesi ci sono delle ragioni convincenti. *Non esistono in natura fenomeni puramente meccanici.* Alla base di ciascun effetto meccanico ci sono una moltitudine di *altri effetti* classificati in branche diverse della fisica. Così, la collisione delle palline da biliardo è considerata di solito un effetto tipicamente meccanico. Ma l'esistenza stessa delle palline come anche la loro struttura interna sono regolate da *leggi quantistiche,* mentre le forze elastiche che compaiono durante l'urto si riconducono alle forze di *interazione elettrostatica* delle particelle cariche di cui sono costituiti i corpi.

Insomma, *tutti i fenomeni fisici in un ascensore in moto uniformemente accelerato avranno esattamente la stessa evoluzione che in un ascensore immobile sospeso in un campo di gravitazione omogeneo.* Però la fisica prerelativistica considerava i due casi sostanzialmente differenti. Nel primo caso gli effetti osservati erano interpretati come risultati dell'azione del campo di gravitazione, nel secondo gli stessi effetti venivano attribuiti all'azione delle forze d'inerzia. Nel primo caso l'ascensore costituisce un sistema di riferimento inerziale dove esiste un campo di gravitazione uniforme. Nel secondo caso il campo di gravitazione non c'è, ma ci sono delle forze d'inerzia, poiché l'ascensore rappresenta un sistema di riferimento non inerziale.

Se l'ascensore in un campo di gravitazione uniforme si muove verso l'alto o verso il basso con un'accelerazione $\boldsymbol{a}$, ogni corpo all'interno dell'ascensore è sottoposto alla forza di gravità $m\boldsymbol{g}$ ed alla forza

d'inerzia — $m\boldsymbol{a}$. La forza risultante $m(\boldsymbol{g} - \boldsymbol{a})$ è formata da queste due componenti completamente differenti per loro natura fisica. Intanto tutti i fenomeni all'interno dell'ascensore evolverebbero come se in esso agisse un campo di gravitazione uniforme di intensità $\boldsymbol{g}' = \boldsymbol{g} - \boldsymbol{a}$. In particolare quando l'ascensore è in caduta libera $\boldsymbol{g}' = 0$, cioè sorge uno «stato di imponderabilità». Ammettiamo che il passeggero nell'ascensore abbia la possibilità di effettuare esperimenti soltanto con i corpi che si trovano all'interno dell'ascensore senza contatti con il mondo esterno. Ora, tutti i corpi che si trovano nell'ascensore cadono con la medesima accelerazione. Basandosi soltanto su questo fatto lui non potrà spiegare l'origine di questa accelerazione: un campo di gravitazione uniforme, un moto di traslazione accelerato dell'ascensore stesso o infine una combinazione di queste due cause. Nessun esperimento sulla caduta libera dei corpi nell'ascensore potrà separare il campo di gravitazione uniforme ed il campo uniforme delle forze d'inerzia. Secondo la supposizione di Einstein ciò sarebbe impossibile con qualunque tipo di esperimenti fisici. Einstein innalzò a postulato questa sua ipotesi, noto ora come *principio di equivalenza delle forze gravitazionali e delle forze d'inerzia.*

Secondo questo principio *tutti i fenomeni fisici evolvono in un campo gravitazionale esattamente come in un campo di forze d'inerzia a condizione che le intensità di ambedue i campi coincidono in punti corrispondenti dello spazio e le condizioni iniziali siano identiche per tutti i corpi di un sistema isolato.*

2. *Il principio di equivalenza non afferma affatto che ogni campo gravitazionale potrebbe essere simulato con forze d'inerzia, cioè riprodotto da un moto convenientemente accelerato di un sistema di riferimento. Non si afferma neanche che qualsiasi forza d'inerzia possa essere sostituta in tutto lo spazio dalle forze gravitazionali. In generale, le due asserzioni sono valide soltanto per i campi uniformi, cioè per i campi la cui intensità è la stessa in tutti i punti dello spazio.* Per semplificare questa considerazione riproduciamo l'esperimento con l'ascensore. Supponiamo che l'ascensore sia sospeso e immobile nel campo di gravità terrestre. Disponendo di un gravimetro preciso, il passeggero noterà che in diversi punti dell'ascensore le direzioni di un filo a piombo non sono rigorosamente parallele e che esse si intersecano tutte approssimativamente nel centro della Terra. Constaterà anche che il campo di gravitazione terrestre cresce in direzione del centro della Terra. In breve, il passeggero in un ascensore immobile potrà costatare che il campo di gravitazione terrestre non è *uniforme.* Invece il campo di forze d'inerzia che compare nell'ascensore, durante un suo moto di traslazione accelerato, è *uniforme.* Questo campo non può sostituire in tutti i punti dell'ascensore anche un campo di forze d'inerzia non uniforme mettendolo in rotazione. Ma questo campo aumenta man mano che ci si allontana dall'asse di rotazione, cioè si comporterebbe in modo completamente diverso dal campo terrestre. Il campo di gravità newtoniano di una massa

puntiforme decresce in modo inversamente proporzionale al quadrato della distanza da questa massa. Il campo di forze centrifughe $\omega^2 \mathbf{r}_\perp$, invece cresce proporzionalmente alla distanza dall'asse di rotazione. È evidente che *un campo di gravità newtoniano di una massa puntiforme non può essere riprodotto da nessuna rotazione del sistema di riferimento.*

Tuttavia in regioni limitate di spazio, in cui il campo di gravitazione può essere considerato sensibilmente uniforme, esso può essere riprodotto da un moto accelerato del sistema di riferimento. Se si vuole precisare questa condizione, si dice che il principio di equivalenza ha un *carattere locale.*

3. Esiste inoltre una differenza essenziale tra le forze di attrazione gravitazionale di Newton e le forze d'inerzia quando queste ultime compaiono nei sistemi di riferimento in rotazione. *Le forze gravitazionali newtoniane non dipendono dalla velocità dei corpi sui quali esse agiscono. Le stesse proprietà valgono per le forze di traslazione e centrifughe nonché, in generale, per tutte le forze d'inerzia di trascinamento.* Le azioni fisiche delle forze d'inerzia di trascinamento sono perfettamente equivalenti a quelle delle forze di gravitazione newtoniane. È impossibile distinguere univocamente il campo di gravitazione newtoniano da quello delle forze d'inerzia di trascinamento. Invece, *le forze di Coriolis si comportano in modo sostanzialmente diverso da quelle newtoniane: esse non influenzano i corpi a riposo* (rispetto al sistema di riferimento considerato). *Le forze di Coriolis appaino soltano quando il corpo è in moto e sono proporzionali alla sua velocità.* Tuttavia a causa dell'equivalenza della massa gravitazionale e della massa inerziale è opportuno unificare il campo gravitazionale ed il campo di tutte le forze d'inerzia in *un campo unico.* E questo è quanto si fa nella teoria della relatività generale. Per il campo unico che risulta da questa unificazione si conserva il nome già noto precedentemente di campo gravitazionale. La forza d'inerzia è un caso particolare delle forze del campo gravitazionale inteso in senso generalizzato. La teoria della relatività generale o teoria relativistica della gravitazione stabilisce le equazioni del campo gravitazionale che sono note come equazioni di Einstein. La legge di gravitazione universale di Newton è contenuta nelle equazioni di Einstein, ma è verificata soltanto in modo approssimato.

Il carattere approssimato di questa legge del resto deriva dal fatto che essa è basata sull'idea della propagazione istantanea delle interazioni. Ma questa concezione ha una validità limitata.

4. Alla luce di queste considerazioni riprendiamo ancora una volta la questione dei sistemi di riferimento inerziali. Prendiamo un corpo A talmente distante dal sistema solare da poterne ignorare il campo gravitazionale. Non si può però affermare che il corpo A non sia sottoposto a nessun campo gravitazionale, poiché non possiamo affermare che non esistano nell'Universo corpi celesti anche lontani capaci di creare un campo di gravitazione $\mathbf{g}$ d'intensità finita nel luogo in cui si trovava il corpo A. Il fatto che il campo gravitazionale diminuisca a causa della distanza da questi corpi celesti può essere compensato dall'aumento della loro massa. Se si esa-

minano i fenomeni in una regione limitata S di spazio che non sia troppo grande, si può ammettere che il campo $\boldsymbol{g}$ possa essere considerato uniforme. In queste condizioni, se il corpo A è in caduta libera in questo campo di gravità $\boldsymbol{g}$, quest'ultimo sarà *completamente compensato dalle forze d'inerzia di traslazione.* Anche se il corpo A non ruota (rispetto alle masse molto distanti), esso non sarà sottoposto all'azione di altre forze d'inerzia. Il sistema di riferimento collegato al corpo A non ruotante che è in caduta libera sarà appunto un sistema di riferimento inerziale. In ogni sistema di riferimento A' in rotazione o in moto accelerato rispetto al sistema di riferimento A appariranno delle forze d'inerzia. Ma questo moto non è un moto nello «spazio assoluto», è un *moto rispetto a corpi distanti dell'Universo.* Secondo questo punto di vista, espresso da E. Mach (1838-1916), le forze d'inerzia sono prodotte dalle rotazioni o dai moti accelerati dei sistemi di coordinate rispetto a corpi distanti dell'Universo. Questo enunciato porta il nome di *principio di Mach.* Il punto di vista di Mach è assai seducente e lo ha condiviso anche Einstein, nelle sue prime pubblicazioni, ma in seguito lo ha rifiutato. Nelle teorie cosmogoniche contemporanee il principio di Mach non viene utilizzato, e sarebbe d'altronde prematuro discutere in questa sede questioni così complesse e che non hanno ancora trovato una soluzione soddisfacente.

§ 72. *Spostamento gravitazionale delle righe spettrali*

1. Come esempio d'applicazione del principio di equivalenza delle forze gravitazionali e delle forze d'inerzia consideriamo lo *spostamento gravitazionale delle righe spettrali* che fu previsto dalla teoria di Einstein. Partiamo dalla considerazione che la luce si comporta come onde che si propagano nel vuoto ad una velocità uguale a $c \approx 300\,000$ km/s. La luce corrispondente a una data riga spettrale è caratterizzata da una frequenza ben determinata ovvero da un numero determinato di oscillazioni per secondo che indicheremo con ν. Una tale luce si chiama *monocromatica,* cioè *monocolore.* Supponiamo che una luce monocromatica ci arrivi da una sorgente lontana e che nello spazio percorso da qusta luce non esista campo gravitazionale. Indichiamo con ν_0 la frequenza dell'onda luminosa registrata da un osservatore che si trova a riposo in un sistema di riferimento inerziale. Se l'osservatore si mette in moto verso i raggi luminosi con un'accelerazione costante $\boldsymbol{a}$ (fig. 196, a), la frequenza della luce che registrerà aumenterà (effetto Doppler).

Un semplice calcolo dimostra che, a meno di termini dell'ordine di $(v/c)^2$, la variazione relativa della frequenza registrata è data dalla formula

$$\frac{\nu - \nu_0}{\nu_0} = \frac{v}{c},$$

dove v è la velocità di spostamento dell'osservatore. Adottiamo come senso positivo di v ed $\boldsymbol{a}$ il senso contrario a quello della propagazione della luce. Se l'osservatore si muove per un tempo t, la sua velocità sarà $v = at$. Durante questo tempo t la luce percorre una distanza $l = ct = cv/a$, quindi la variazione della frequenza durante questo tempo sarà determinata dalla formula

$$\frac{\nu - \nu_0}{\nu_0} = \frac{al}{c^2}.$$

2. Supponiamo ora che l'osservatore sia immobile rispetto al sistema di riferimento inerziale, ma che in esso esista un campo gravitazionale uniforme di intensità $\boldsymbol{g}$ (fig. 196. *b*). Se il valore di $\boldsymbol{g}$ sarà uguale a $-\boldsymbol{a}$ ($\boldsymbol{g} = -\boldsymbol{a}$),

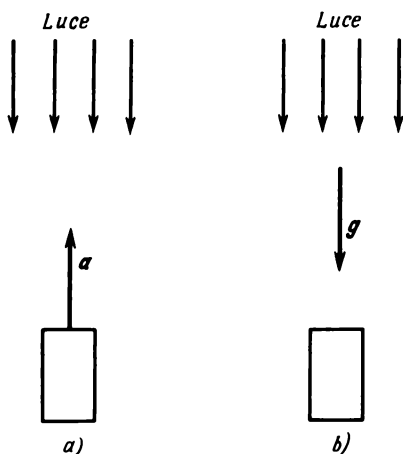



Fig. 196.

in virtù del principio di equivalenza il campo gravitazionale provocherà esattamente la medesima variazione di frequenza della luce che nel precedente caso. *Quando la luce si propaga nel senso del campo gravitazionale* $\boldsymbol{g}$ *la sua frequenza deve aumentare e quando invece la luce si propaga in senso opposto a quello del campo, la frequenza deve diminuire.* Proprio in questo consiste l'effetto di spostamento gravitazionale delle righe spettrali che era stato previsto da Einstein. La grandezza dello spostamento è determinata dalla formula

$$\frac{\nu - \nu_0}{\nu_0} = \frac{gl}{c^2}, \tag{72.1}$$

in cui l è la distanza percorsa dalla luce nel campo di gravità.

Nel derivare la formula (72.1) si supponeva che il campo gravitazionale fosse costante ed uniforme. È facile generalizzare il risultato ottenuto al caso di un qualunque campo non uniforme ma costante. A questo scopo suddividiamo il tragitto del raggio luminoso in intervalli infinitamente piccoli

dr. Lungo ogni tratto infinitesimale il campo gravitazionale può essere considerato uniforme. Indicando con $d\nu$ la variazione della frequenza del raggio luminoso che percorre un tratto infinitesimale dr, si ottiene per mezzo della formula (72.1)

$$\frac{d\nu}{\nu} = \frac{g\,dr}{c^2},$$

poiché la componente del vettore g perpendicolare alla direzione della propagazione della luce non influisce sulla variazione della frequenza. Se la luce percorre un tratto finito dalla posizione d'origine 1 alla posizione finale 2, la variazione della sua frequenza sarà ottenuta integrando l'espressione trovata, cioè con la formula

$$\ln\frac{\nu_2}{\nu_1} = \frac{1}{c^2}\int g\,dr. \tag{72.2}$$

Non è obbligatoria l'integrazione lungo il tratto percorso dalla luce; si può scegliere un tratto qualunque che colleghi i punti 1 e 2. Nei campi costanti le forze gravitazionali sono conservative, dunque il valore dell'integrale non dipende dalla forma del percorso. Questo integrale rappresenta il lavoro che avrebbero prodotto le forze del campo gravitazionale per spostare l'unità di massa dalla posizione 1 alla posizione 2, ed è chiamato *differenza di potenziale gravitazionale* $\varphi_1 - \varphi_2$ tra i punti 1 e 2. Con queste notazioni, possiamo scrivere

$$\ln\frac{\nu_2}{\nu_1} = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{c^2}. \tag{72.3}$$

Se la differenza di potenziale è piccola

$$|\varphi_1 - \varphi_2| \ll c^2,$$

la formula si riduce in

$$\frac{\nu_2 - \nu_1}{\nu_1} = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{c^2}. \tag{72.4}$$

Quando la luce si propaga procedendo da un potenziale gravitazionale superiore ad un potenziale inferiore, la sua frequenza aumenta, e quando essa si propaga in senso inverso, la sua frequenza diminuisce.

Attualmente si è riusciti ad osservare con sicurezza lo spostamento gravitazionale delle righe spettrali anche nel campo di gravità terrestre (grazie all'uso dell'*effetto Mössbauer*). Il tratto percorso lungo la verticale discendente non era che di 20 m. In questo caso lo spostamento che si deve avere nel campo di gravità terrestre è $\frac{\nu - \nu_0}{\nu_0} \sim 2\cdot 10^{-14}$.

Le misure hanno dato il risultato previsto, per cui questi studi fornirono una conferma ulteriore della validità del principio di equivalenza tra forze gravitazionali e forze d'inerzia.

X. MECCANICA DEI CORPI ELASTICI

§ 73. *Corpi perfettamente elastici*

1. Tutti i corpi reali sono *deformabili*, in quanto sotto l'azione di forze modificano la propria forma o il proprio volume. Questi mutamenti di forma o di volume si chiamano *deformazioni.* Nel caso dei corpi solidi si distinguono due tipi di deformazioni limite: *elastica* e *plastica.* Le deformazioni cosiddette elastiche scompaiono quando cessa l'azione delle forze applicate. Le *deformazioni* cosiddette *plastiche* o *residue* si conservono, almeno in parte, nel corpo anche dopo che sia terminata l'azione delle forze applicate. Le deformazioni plastiche sono alla base della *lavorazione a freddo dei metalli* (stampaggio, fucinatura, ecc.). La natura della deformazione (elastica o plastica) dipende non soltanto dal materiale costituente il corpo, ma anche dall'intensità delle forze applicate. Se la forza applicata (più esattamente la forza in rapporto all'unità di superficie, cioè la tensione) non supera un certo valore detto limite di elasticità, le deformazioni che compaino sono elastiche. Il limite di elasticità ha valori diversi a seconda del materiale, ma non ha mai un valore univoco. La suddivisione dei corpi in elastici e plastici è puramente convenzionale. A rigor di termini, terminata l'azione delle forze esterne, le deformazioni non scompaiono mai del tutto, e quindi sono sempre plastiche. Se i valori delle deformazioni residue sono minimi, in numerosi casi possiamo ignorarli; ma per decidere che valore debba avere la deformazione residua per poterla ignorare, ocorre controllare le condizioni concrete. Talvolta si possono ignorare deformazioni residue se, ad esempio, esse non superano lo 0,1% dei valori massimi dovuti all'azione delle forze applicate. In altri casi questo limite non deve essere superiore allo 0,01% del valore massimo.

2. In questo capitolo ci limitiamo a studiare le deformazioni elastiche considerandone l'aspetto puramente meccanico senza neppure soffermarci sulla natura fisica dei fenomeni. In meccanica, si descrivono le proprietà elastiche dei corpi per mezzo di *costanti elastiche*, empiricamente introdotte, diverse per i diversi corpi, perché dipendono da loro stato fisico (dalla temperatura dei corpi, ad esempio). L'approccio fisico, che considera le deformazioni dal punto di vista atomico, è più efficace. Questo è il campo di cui si occupa la *teoria dei corpi solidi* che permette non soltanto di stabilire in linea di principio le equazioni fondamentali della meccanica dei cor-

pi deformabili utilizzando considerazioni atomiche, ma anche di stabilire correlazioni tra le costanti elastiche delle sostanze ed altre loro proprietà fisiche.

Supponiamo che i corpi siano *perfettamente elastici.* Così si chiamano i corpi capaci di subire deformazioni elastiche, ma non plastiche. Tali modelli possono essere utilizzati qualora le forze applicate ai corpi reali non superino il limite di elasticità. *Per i corpi perfettamente elastici esiste una dipendenza univoca tra le forze applicate e le deformazioni provocate da queste forze.* In caso di deformazioni plastiche non esiste invece una correlazione univoca. Ciò dipende anche dal fatto che prima e dopo la deformazione plastica la forma del corpo è differente, quando non è sottoposto all'azione di forze esterne. Ci limiteremo al caso di *piccole deformazioni*, cioè di deformazioni elastiche che rispondono alla legge di Hooke. Si tratta di una legge approssimata secondo cui le *deformazioni sono proporzionali alle forze che le provocano.*

3. I corpi solidi si suddividono in corpi *isotropi* e *anisotropi.* È detto *isotropo* un corpo le cui proprietà non dipendono dalla direzione, e *anisotropo* un corpo, le cui proprietà sono diverse in direzioni. I *cristalli* sono dei corpi tipicamente anisotropi. Le definizioni date sono caratterizzate da una certa indeterminatezza perché non si dice di quali proprietà fisiche si tratta. In pratica uno stesso *corpo può comportarsi come isotropo rispetto a certe proprietà e come anisotropo rispetto ad altre.* Così, tutti i cristalli del *sistema cubico* sono isotropi per la propagazione della luce, e anisotropi per le loro proprietà elastiche. In questo capitolo ci interessa l'isotropia o l'anisotropia in rapporto alle proprietà elastiche dei corpi e ci limiteremo al caso più semplice dei corpi isotropi. I metalli hanno generalmente *struttura policristallina*, cioè sono costituiti da una moltitudine di piccoli cristalli disordinatamente orientati. Preso isolatamente ognuno di questi piccoli cristalli è anisotropo, ma un pezzettino di metallo che contiene un gran numero di piccoli cristalli orientati a caso si comporta come un corpo isotropo. Il carattere casuale degli orientamenti dei cristalli può essere turbato dalla deformazione plastica ed il metallo che ha subìto una deformazione plastica si comporterà come un corpo anisotropo. Un tale effetto si osserva in seguito ad un allungamento o ad una torsione di un filo metallico.

§ 74. *Sforzi elastici*

1. Le differenti parti di un corpo deformato interagiscono le une con le altre lungo le superfici di separazione. Consideriamo un corpo (o un mezzo) arbitrariamente deformato e dividiamolo mentalmente in due parti: corpo I e corpo II separati l'uno dall'altro dalla superficie AB (fig. 197). Dato che il corpo I è deformato, esso agisce con una certa forza sul corpo II il quale a sua volta, e per la stessa ragione, applica al corpo I una forza

uguale e contraria. Per determinare le deformazioni che compaiono, non è sufficiente conoscere le forze complessive applicate alla sezione *AB*, bisogna precisare la distribuzione di queste forze sulla sezione. Prendiamo sulla superficie *AB* un'area *dS* infinitamente piccola. Sia *dF* la forza con la quale, sull'area *dS*, il corpo *II* agisce sul corpo *I*. La *forza riferita all'unità di superficie cioè dF/dS, è lo sforzo* che agisce sul corpo *I* in un punto della superficie *AB*. Lo sforzo che agisce nello stesso punto sul corpo *II* sarà uguale ma di senso inverso.

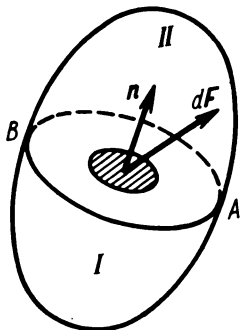
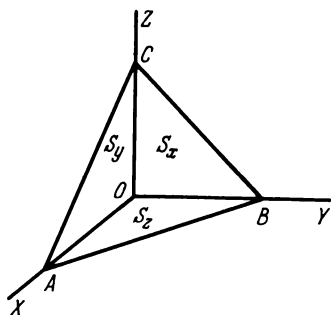



Fig. 197. Fig. 198.

2. Si può definire l'orientamento dell'area *dS* indicando la direzione della normale a *dS*. Per convenzione questa normale porta *fuori* dalla superficie del corpo sul quale agisce la forza *dF*. Indichiamo con $\boldsymbol{n}$ il vettore unitario di tale normale e con $\boldsymbol{\sigma}_n$ lo sforzo corrispondente. Alloıa $\boldsymbol{\sigma}_{-n}$ indicherà lo sforzo applicato alla superficie *AB* del corpo *II* adiacente al corpo *I*. In virtù dell'uguaglianza dell'azione e della reazione si ha $\boldsymbol{\sigma}_n = -\boldsymbol{\sigma}_{-n}$. Si può scomporre il vettore $\boldsymbol{\sigma}_n$ in una componente lungo la normale $\boldsymbol{n}$ ed una componente sul piano tangente all'area *dS*. La prima componente si chiama sforzo *normale* e la seconda sforzo *tangenziale* ambedue applicate all'area *dS*. Come per qualsiasi vettore lo sforzo $\boldsymbol{\sigma}_n$ può essere definito dalle sue tre componenti lungo gli assi *X, Y, Z* di un sistema di coordinate ortogonale. Indichiamo queste componenti rispettivamente con σ_{nx}, σ_{ny}, σ_{nz}. Il primo indice segna la direzione della normale esterna alle superficie del corpo in cui si trova l'area *dS*, il secondo indica la direzione dell'asse sul quale si proietta lo sforzo $\boldsymbol{\sigma}_n$. In particolare, $\boldsymbol{\sigma}_x$ indica lo sforzo applicato all'area la cui normale esterna è parallela al senso positivo dell'asse *X*. Le grandezze σ_{xx}, σ_{xy}, σ_{xz} indicano le proiezioni del vettore $\boldsymbol{\sigma}_x$ sugli assi delle coordinate.

3. Per determinare lo sforzo che viene esercitato su di un'area arbitrariamente orientata, in un punto qualunque di un mezzo, è sufficiente definire gli sforzi che si esercitano sulle tre aree reciprocamente perpendicolari che passano per questo punto. Questo procedimento è valido tanto per un

mezzo a riposo quanto per un mezzo in moto arbitrariamente accelerato. Per dimostrarlo facciamo coincidere l'origine delle coordinate con il punto considerato del mezzo e prendiamo in esame un volume infinitamente piccolo $OABC$ limitato dai tre piani coordinati e dal piano ABC che interseca questi tre piani (fig. 198). Sia $\boldsymbol{n}$ la normale esterna al piano del triangolo ABC. La forza applicata dal mezzo sulla faccia ABC e che agisce sull'elemento di volume sarà allora $\boldsymbol{\sigma}_n S$, dove S è l'area della faccia ABC. Per analogia, le forze applicate dal mezzo sulle tre facce laterali saranno: $\boldsymbol{\sigma}_{-x} S_x$, $\boldsymbol{\sigma}_{-y} S_y$, $\boldsymbol{\sigma}_{-z} S_z$, dove S_x, S_y, S_z sono le aree di queste facce. Oltre a queste forze, sul volume così definito possono agire forze *di massa* o volumetriche, la forza di gravità, ad esempio. Indichiamo con $\boldsymbol{f}$ la risultante di tutte queste forze. La forza $\boldsymbol{f}$ è proporzionale all'elemento di volume. Se la massa dell'elemento è m e la sua accelerazione è $\boldsymbol{a}$, si ha allora

$$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{f} + \boldsymbol{\sigma}_n S + \boldsymbol{\sigma}_{-x} S_x + \boldsymbol{\sigma}_{-y} S_y + \boldsymbol{\sigma}_{-z} S_z.$$

Passiamo al limite facendo tendere l'elemento di volume $OABC$ ad un punto. In un tale passaggio al limite si trascurano i termini $m\boldsymbol{a}$ ed $\boldsymbol{f}$ poiché essi sono proporzionali al volume $OABC$ e quindi sono infinitesime *d'ordine superiore* rispetto agli altri termini, proporzionali alla superficie dell'elemento. Come è noto dalla geometria, le proiezioni dell'area S sui piani delle coordinate si esprimono mediante le relazioni

$$S_x = Sn_x, \quad S_y = Sn_y, \quad S_z = Sn_z.$$

Osservando poi che $\boldsymbol{\sigma}_{-x} = -\boldsymbol{\sigma}_x$, $\boldsymbol{\sigma}_{-y} = -\boldsymbol{\sigma}_y$, $\boldsymbol{\sigma}_{-z} = -\boldsymbol{\sigma}_z$ e passando al limite si ottiene

$$\boldsymbol{\sigma}_n = \boldsymbol{\sigma}_x n_x + \boldsymbol{\sigma}_y n_y + \boldsymbol{\sigma}_z n_z. \quad (74.1)$$

Questa relazione dimostra il teorema, poiché gli assi coordinati X, Y, Z possono essere scelte arbitrariamente.

Quindi *lo sforzo in ogni punto di un corpo elastico deformato può essere definito per mezzo di tre vettori* $\boldsymbol{\sigma}_x$, $\boldsymbol{\sigma}_y$, $\boldsymbol{\sigma}_z$ o per mezzo delle loro nove proiezioni

$$\begin{matrix} \sigma_{xx}, & \sigma_{xy}, & \sigma_{xz}, \\ \sigma_{yx}, & \sigma_{yy}, & \sigma_{yz}, \\ \sigma_{zx}, & \sigma_{zy}, & \sigma_{zz}. \end{matrix} \quad (74.2)$$

L'insieme di queste nove grandezze si chiama *tensore degli sforzi elastici*.

In generale queste grandezze variano da un punto all' altro del mezzo, cioè sono funzioni delle coordinate. Il tensore degli sforzi elastici conserva lo stesso valore in tutti i punti del mezzo soltanto quando ci si trova in uno stato stazionario ed in assenza di forze di massa.

4. *Il tensore degli sforzi elastici è un tensore simmetrico*, cioè

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (i, j = x, y, z). \quad (74.3)$$

Per dimostrarlo consideriamo un parallelepipedo elementare di lati dx, dy, dz di una data sostanza (fig. 199). Il momento M_z delle forze rispetto all'asse Z, applicato a questo parallelepipedo, è uguale a

$$M_z = (\sigma_{xy} dy\, dz) dx - (\sigma_{yx} dx\, dz)\, dy = (\sigma_{xy} - \sigma_{yx}) dV,$$

dove dV è il volume del parallelepipedo elementare in esame. Secondo l'equazione dei momenti

$$(\sigma_{xy} - \sigma_{yx}) dV = I_z \frac{d\omega_z}{dt},$$

dove I_z e ω_z sono rispettivamente il momento d'inerzia e la velocità angolare rispetto all'asse Z. Ma il momento d'inerzia I_z è proporzionale al prodotto della massa per il quadrato delle dimensioni lineari del parallelepipedo, cioè è un infinitesimo *d'ordine più alto* del volume del parallelepipedo dV. Perciò quando il parallelepipedo tende a ridursi ad un punto il secondo membro $I_z \frac{d\omega_z}{dt}$ tenderà a zero più velocemente del primo membro dell'equazione. Al limite si ottiene $\sigma_{xy} = \sigma_{yx}$. Si dimostra analogamente che $\sigma_{yz} = \sigma_{zy}$ e $\sigma_{zx} = \sigma_{xz}$.

5. Si può dimostrare che il *sistema di coordinate X, Y, Z può essere scelto in modo che tutti gli elementi non diagonali del tensore degli sforzi elastici si annullino*, cioè $\sigma_{ij} = 0$ con $i \neq j$. Senza soffermarci sulla dimostrazione dell'enunciato, osserveremo che si ottiene questo risultato poiché il tensore degli sforzi elastici σ_{ij} è un tensore simmetrico. Quindi in un tale sistema di coordinate gli sforzi elastici sono caratterizzati in ogni punto soltanto dalle tre grandezze σ_{xx}, σ_{yy}, σ_{zz}, che per semplicità possiamo scrivere con un indice solo, cioè σ_x, σ_y, σ_z. Gli assi corrispondenti sono chiamati *assi principali del tensore degli sforzi elastici.*

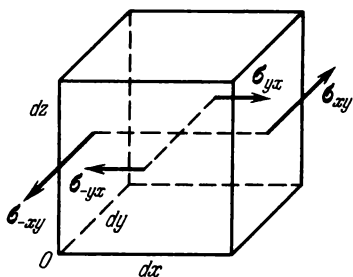



Fig. 199.

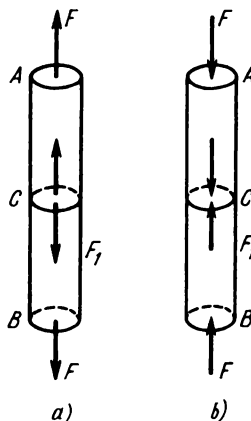



Fig. 200.

§ 75. *Estensione e compressione delle aste*

1. Prendiamo un'asta omogenea e applichiamo alle sue due estremità delle forze di tensione o di compressione F (fig. 200, *a*, *b*). L'asta subirà una deformazione, cioè sarà allungata o compressa. Consideriamo una sezione trasversale arbitraria C, perpendicolare all'asse dell'asta. Perché la sezione AC dell'asta resti in equilibrio è necessario che alla sua faccia inferiore C sia applicata una forza $F_1 = F$. È la forza con cui la sezione inferiore BC dell'asta tira o comprime quella superiore. Tale forza si manifesta poiché la sezione inferiore BC dell'asta è deformata. Essendo la sezione superiore AC dell'asta deformata, anch'essa agisce sulla parte inferiore con una forza F_1 uguale, ma di senso inverso. In ogni sezione retta di asta allungata o compressa agiscono forze di questo tipo. Quindi, la deformazione dell'asta è legata alla comparsa di forze elastiche tramite le quali ogni sezione dell'asta agisce sulla seguente. Abbiamo già indicato con il termine sforzo la forza rapportata ad un'unità di superficie della sezione retta dell'asta. Nel caso considerato lo sforzo è perpendicolare alla sezione retta dell'asta. *Se l'asta viene allungata, lo sforzo si chiama tensione ed è definito dalla espressione*

$$T = \frac{F}{S}, \tag{75.1}$$

dove S è l'area della sezione retta dell'asta. *Se invece l'asta è compressa, lo sforzo si chiama pressione* e il suo valore numerico è determinato dalla stessa formula

$$P = \frac{F}{S}. \tag{75.2}$$

La pressione può essere considerata come una tensione negativa, e viceversa, cioè

$$P = -T. \tag{75.3}$$

Non è necessario, quindi, considerare separatamente l'estensione e la compressione dell'asta.

2. Sia l_0 la lunghezza dell'asta non deformata. Dopo l' applicazione della forza di trazione F, l'asta si allunga di Δl e la sua lunghezza diventa uguale a $l = l_0 + \Delta l$. Il rapporto

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} \tag{75.4}$$

si chiama *allungamento relativo dell'asta.* In questo caso esso è positivo, nel caso di forze di compressione è invece negativo. L'allungamento relativo di segno inverso si chiama *compressione relativa.* Quindi per definizione la compressione relativa è la quantità $-(\Delta l)/l_0$. È positiva nel caso di forze di compressione e negativa nel caso di forze di trazione.

L'esperienza dimostra che *per deformazioni elastiche non troppo grandi la tensione T (o la pressione P) è proporzionale all'allungamento relativo (alla compressione relativa)*

$$T = E\frac{\Delta l}{l_0} \quad \text{o} \quad P = -E\frac{\Delta l}{l_0}, \tag{75.5}$$

dove E è una costante il cui valore dipende soltanto dal materiale dell'asta e dal suo stato fisico. Essa si chiama *modulo di Young* (1773-1829). Le formule (75.5) esprimono la *legge di Hooke* (1635-1703) *per le deformazioni di trazione o di compressione delle aste.* È una legge approssimata che non può essere verificata qualora si tratti di deformazioni notevoli. Le deformazioni per le quali la legge di Hooke è approssimativamente verificabile si chiamano *piccole deformazioni.* Se nella formula (75.3) si mette $\Delta l = l_0$, si ottiene $T = E$. Perciò il modulo di Young è sovente definito come tensione da applicare ad un'asta per raddoppiarne la lunghezza supponendo che in queste condizioni la legge di Hooke sia ancora valida. Il difetto di questa definizione è che nel caso di allungamenti così grandi la legge di Hooke diventa inapplicabile poiché il corpo o si rompe o cessa la proporzionalità tra deformazione e tensione applicata.

3. Più generale della legge di Hooke è l'enunciato per cui in *caso di deformazioni elastiche la tensione T è una funzione univoca dell'allungamento relativo ε: $T = T(\varepsilon)$.* Questa funzione deve annullarsi per $\varepsilon = 0$, con la scomparsa delle deformazioni ε anche la tensione T deve sparire. Perciò nello sviluppo in serie della funzione $T(\varepsilon)$ secondo le potenze di ε deve mancare il termine di potenza zero. Questo sviluppo deve essere del tipo

$$T = E\varepsilon + A\varepsilon^2 + B\varepsilon^3 + \ldots,$$

dove i coefficienti $E, A, B, \ldots$ sono costanti ed i loro valori dipendono soltanto dalla natura del materiale e dal suo stato fisico. Se l'allungamento relativo ε è piccolo, si possono ignorare le potenze superiori di ε e allora ritroviamo la legge di Hooke (75.5). L'errore relativo che facciamo è dell'ordine di $\frac{A\varepsilon^2}{E\varepsilon} \sim \varepsilon$. Queste considerazioni generali dimostrano che la *legge di Hooke ed i calcoli basati su questa legge presentano errori relativi dell'ordine di ε.* Quindi in questi calcoli si può trascurare tutti i termini che rispetto ai principali siano grandezze dell'ordine di ε, ε^2, ecc. L'allungamento relativo ε, ad esempio, può essere definito non soltanto dall'espressione (75.4), ma anche dall'espressione $(\Delta l)/l$. La differenza tra queste due espressioni

$$\frac{\Delta l}{l_0} - \frac{\Delta l}{l} = \frac{(l - l_0)\Delta l}{l l_0} = \frac{(\Delta l)^2}{l l_0} \sim \varepsilon^2$$

è del secondo ordine rispetto ad ε e va perciò ignorata. Quindi la legge di Hooke può essere presentata nella forma

$$T = E\frac{\Delta l}{l}, \quad P = -E\frac{\Delta l}{l}, \tag{75.6}$$

o anche

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{T}{E}, \quad \frac{\Delta l}{l} = -\frac{P}{E}. \tag{75.7}$$

Questa osservazione sulla precisione di calcolo si riferisce, ben inteso, non soltanto alle deformazioni di trazione e compressione, ma anche a tutte le piccole deformazioni di cui si tratterà più tardi.

4. Si applichi ad un'asta una tensione T_1 che provochi un allungamento relativo $\frac{\Delta_1 l}{l_0} = \frac{T_1}{E}$, in seguito a ciò la lunghezza dell'asta diventerà uguale a $l_l = l_0 + \Delta_1 l$. In generale le proprietà dei materiali cambiano in caso di deformazioni. Si potrebbe quindi presumere che cambi anche il modulo di Young. Tuttavia se le deformazioni sono piccole (e solo in questo caso è possibile applicare il modulo di Young) se ne possono ignorare le variazioni. Infatti, indichiamo con E_1 il modulo di Young dell'asta deformata. Se si applica all'asta deformata una tensione supplementare T_2, la sua lunghezza avrà un incremento supplementare $\Delta_2 l$, con $\frac{\Delta_2 l}{l_1} = \frac{T_1}{E_1}$. Tenendo conto del grado di precisione della legge di Hooke, si può ammettere $\frac{\Delta_2 l}{l_1} = \frac{\Delta_2 l}{l_0}$, e dato che l'allungamento complessivo è uguale a $\Delta l = \Delta_1 l + \Delta_2 l$, si ottiene

$$\frac{\Delta l}{l_0} = \frac{T_1}{E} + \frac{T_2}{E_1}.$$

Però non è necessario scomporre Δl nelle sue componenti $\Delta_1 l$ e $\Delta_2 l$. Si può infatti considerare questa grandezza un'allungamento unico prodotto dalla tensione risultante $T = T_1 + T_2$. Facendo così si può scrivere in virtù della legge di Hooke

$$\frac{\Delta l}{l_0} = \frac{T}{E} = \frac{T_1}{E} + \frac{T_2}{E}.$$

Paragonandola all'espressione precedente, si ottiene $E = E_1$, che è quanto si doveva dimostrare.

La considerazione riportata è valida non soltanto per le deformazioni di trazione e di compressione, ma anche per qualsiasi piccola deformazione. *Se le deformazioni sono piccole, le costanti elastiche dei corpi non cambiano a causa della deformazione.* Ne segue che *se il corpo è sottoposto*

all'azione di più forze, per calcolarne la deformazione risultante si calcolano prima le deformazioni di ciascuna delle forze separatamente (come se non fossero presenti altre forze) *e poi si addizionano le deformazioni ottenute.* Questo importante enunciato si chiama *principio di sovrapposizione delle piccole deformazioni.*

5. Per deformare un corpo bisogna fare un lavoro. A sua volta il corpo deformato può effettuare esso stesso un lavoro, dato che possiede una riserva d'energia potenziale. Questa energia si chiama *elastica* ed è uguale al lavoro impiegato per deformare il corpo, a condizione che questo lavoro sia stato utilizzato soltanto per accrescere l'energia elastica del corpo e non la sua energia cinetica. Per evitare la comparsa di energia cinetica durante la deformazione del corpo, questa va effettuata assai lentamente, aumentando progressivamente le forze esterne applicate ai corpi, affinché in qualsiasi istante ogni parte del corpo si trovi praticamente in stato di equilibrio. In altre parole, durante la deformazione le forze esterne devono essere in ogni istante equilibrate dalle forze degli sforzi interni che insorgono. Se questa condizione è rispettata si dice che il corpo è sottoposto ad un *processo quasi-statico.*

Per illustrare l'enunciato prendiamo una molla a spirale da usare come modello di corpo deformabile. Sospendiamola per l'estremità superiore e attacchiamole un peso all'estremità inferiore, sostenendolo con la mano perché la molla non si allunghi. Se ad un tratto si lascia il peso, si manifesteranno delle oscillazioni. Il lavoro prodotto dalla forza di gravità provoca non soltanto l'allungamento della molla, ma anche l'aumento di energia cinetica nel peso e nella molla. Non si tratta di un processo quasi-statico e non può servire al calcolo dell'energia elastica della molla. Attacchiamo ora all'estremità inferiore della molla, invece del peso, un leggero piatto su cui verseremo lentamente della sabbia. Le oscillazioni non si manifesteranno e la molla si allungherà lentamente e progressivamente con l'aumento del peso. Tutto il lavoro prodotto dalla forza di gravità sarà utilizzato per accrescere l'energia potenziale della molla deformata. Un tale processo è quasi-statico e si può utilizzare per il calcolo dell'energia elastica della molla.

6. Sulla base di queste osservazioni è facile calcolare l'energia elastica di un'asta allungata. Applichiamo all'asta una forza di trazione $f(x)$ e aumentiamola lentamente e progressivamente, a partire dal valore iniziale $f = 0$ fino a quello finale $f = F$. L'allungamento dell'asta varierà dal valore $x = 0$ a quello finale $x = \Delta l$. Secondo la legge di Hooke $f(x) = kx$, dove k è il *coefficiente di elasticità* che è facile esprimere mediante il modulo di Young. Tutto il lavoro compiuto durante il processo in esame sarà utilizzato per accrescere l'energia elastica U, quindi

$$U = \int_0^{\Delta l} f(x)\,dx = k \int_0^{\Delta l} x\,dx = \frac{1}{2}\,k\,(\Delta l)^2. \qquad (75.8)$$

Dato che nello stato finale $x = \Delta l$, si ha $F = f(\Delta l) = k\Delta l$. Tenendone conto, si ottiene

$$U = \frac{1}{2} F \Delta l. \tag{75.9}$$

Se avessimo applicato subito una forza costante F all'asta non deformata, durante l'allungamento Δl sarebbe stato effettuato un doppio lavoro $A = F\Delta l$. Poiché l'energia elastica accumulata nell'asta sarebbe risultata la stessa, è evidente che soltanto la metà del lavoro A sarebbe stata utilizzata per accrescere l'energia elastica dell'asta. L'altra metà di questo lavoro viene utilizzata per accrescere l'energia cinetica delle oscillazioni elastiche e delle onde che sempre si generano nell'asta durante processi che non sono quasi-statici. Durante processi quasi-statici non appaiono, invece, né onde né oscillazioni. Ecco perché nelle formule (75.8) e (75.9) figura il coefficiente numerico 1/2.

Calcoliamo la densità spaziale dell'energia elastica, cioè l'energia elastica u riferita all'unità di volume dell'asta allungata (o compressa). Essa si ottiene dividendo l'espressione (75.9) per il volume $V = Sl$ dell'asta

$$u = \frac{1}{2} \frac{F}{S} \frac{\Delta l}{l} = \frac{1}{2} T\varepsilon. \tag{75.10}$$

Se si utilizza la legge di Hooke si riduce facilmente questa formula alla forma

$$u = \frac{1}{2} E\varepsilon^2 = \frac{T^2}{2E} = \frac{P^2}{2E}. \tag{75.11}$$

7. L'esperienza dimostra che *sotto l'azione di una forza di trazione o di compressione F variano non soltanto le dimensioni longitudinali, ma anche quelle trasversali dell'asta. Se la forza E è una forza di trazione le dimensioni trasversali dell'asta diminuiscono, se è una forza di compressione, invece, queste aumentano.* Sia a_0 lo spessore dell'asta prima della deformazione ed a il suo spessore dopo la deformazione. Per un'asta cilindrica si può prendere come spessore il diametro della sua sezione retta e per un'asta rettangolare uno dei lati della base rettangolare, ecc. Se la forza F è di trazione, la grandezza $-\frac{\Delta a}{a_0} \approx -\frac{\Delta a}{a}$ si chiama *contrazione laterale relativa* dell'asta ($\Delta a = a - a_0$). Il rapporto tra la contrazione laterale relativa e l'allungamento longitudinale relativo si chiama *coefficiente di Poisson* (1781-1840):

$$\mu = -\frac{\Delta a}{a} : \frac{\Delta l}{l} = -\frac{\Delta a}{\Delta l} \cdot \frac{l}{a}. \tag{75.12}$$

Il valore del coefficiente di Poisson dipende soltanto dal materiale del corpo ed è una delle più importanti costanti che servono a caratterizzare le proprietà elastiche del materiale. Non è necessario studiare a parte il caso delle forze di compressione, poiché la forza di compressione può essere considerata una forza di trazione di segno contrario.

Il modulo di Young E e il coefficiente di Poisson μ caratterizzano completamente le proprietà elastiche di un materiale isotropo. Tutte le altre costanti elastiche possono essere espresse mediante E e μ.

8. Osserviamo infine che tutti i moduli e tutti i coefficienti di elasticità che abbiamo adoperato e adopereremo dovrebbero essere chiamati per chiarezza *moduli e coefficienti isotermi.* Essi caratterizzano le deformazioni dei corpi nell'ipotesi che la loro temperatura si mantenga costante, il che avviene generalmente nei casi di deformazioni statiche. Se invece le deformazioni sono dinamiche (onde nei mezzi elastici, ad esempio), queste possono essere così rapide che le differenze di temperatura, comparse durante la deformazione, non riescono a uniformarsi per scambio termico. Il caso limite più importante è quello in cui non si verifica scambio di calore tra le parti del corpo a temperatura diversa. I processi corrispondenti, così come i moduli ed i coefficienti di elasticità, sono chiamati *adiabatici.* Esamineremo nel volume II del nostro corso le relazioni tra i moduli di elasticità isotermi e adiabatici.

Problemi

1. Si calcoli l'allungamento relativo di un'asta, sospesa in posizione verticale, sotto l'azione del proprio peso P. L'area della sezione retta dell'asta è uguale a S.

Risposta. $\dfrac{l - l_0}{l_0} = \dfrac{P}{2SE}$.

2. Un'asta elastica di massa m, di lunghezza l e sezione retta S si muove con un'accelerazione a (la stessa per tutti i punti dell'asta) in direzione longitudinale. Si calcoli l'energia elastica della deformazione che compare a causa del moto accelerato.

Risposta. $U = \dfrac{m^2a^2l}{6ES}$.

3. Qual è l'energia cinetica massima che si può imprimere a un volano di volume $V = 1$ m^3 se la resistenza di rottura del materiale $T = 10^{10}$ dine/cm^2? Si consideri la massa del volano tutta concentrata nel cerchione (che è sottile in rapporto al raggio del volano). Dimostrare che se la resistenza di rottura del materiale di cui è fatto il volano è invariabile, l'energia cinetica massima dipende soltanto dal volume del volano e non dalla sua massa.

Risposta. $K = \dfrac{1}{2} TV = 5 \cdot 10^8$ J.

4. Sia data un'asta sottile di lunghezza $2\,l$ in rotazione uniforme alla velocità angolare ω intorno ad un asse perpendicolare che passa per il centro dell'asta. Si dimostri che la tensione T che compare nell'asta a causa di questa rotazione soddisfa l'equazione

$$\frac{dT}{dx} = -\rho\omega^2 x.$$

dove ρ è la densità del materiale dell'asta e x la distanza dall'asse di rotazione. Integrando questa equazione, si determini la distribuzione delle tensioni nell'asta. In quale punto dell'asta la tensione è massima e qual è il suo valore? Si dimostri che l'energia cinetica massima che si può comunicare all'asta, rimanendo la resistenza costante, dipende soltanto dal volume V dell'asta e non dalla sua massa. Calcolare l'energia cinetica massima per $V = 3 \cdot 10^4$ cm^3 se la tensione massima che può sopportare l'asta è $T_{mass} = 10^{10}$ dine/cm^2.

Risposta. $T = \frac{1}{2} \rho\omega^2 (l^2 - x^2)$. La tensione è massima al centro dell'asta ed è uguale $T_{mass} = 1/2\, \rho\omega^2 l^2$.

$$K_{mass} = \frac{1}{3} VT_{mass} = 10^7 \text{J}.$$

(Si confronti con il problema 3 del § 19).

5. Un'asta di sezione retta S è sottoposta alla forza di tensione F parallela all'asse dell'asta. Qual è l'angolo d'inclinazione α, rispetto all'asse, della sezione in cui lo sforzo tangenziale τ è massimo? Si calcoli questo sforzo.

Risposta. $\alpha = 45°$, $\tau = \frac{F}{2S}$.

6. Un cilindro di caucciù di altezza h, di peso P ed area di base S poggia su un piano orizzontale. Si calcoli l'energia della deformazione elastica del cilindro dovuta all'azione del proprio peso. Di quanto varierà l'energia della deformazione elastica del cilindro considerato, se sulla sua base superiore si mette un cilindro identico?

Risposta. $U = \frac{P^2h}{6ES}$. Nel secondo caso l'energia elastica aumenterà di 7 volte.

§ 76. *Deformazioni di un parallelepipedo rettangolo sotto l'azione di forze ortogonali dirette secondo gli assi*

1. Immaginiamo un corpo isotropo e omogeneo avente la forma di un parallelepipedo rettangolo alle cui facce opposte siano applicate le forze F_x, F_y, F_z, normali a queste facce. Indichiamo con T_x, T_y, T_z le tensioni corrispondenti (fig. 201) e determiniamo le deformazioni che si produrranno sotto l'azione di queste forze. Supponendo che le deformazioni siano piccole, potremo utilizzare il principio di sovrapposizione delle piccole deformazioni.

Orientiamo gli assi delle coordinate parallelamente agli spigoli del parallelepipedo. Siano x, y, z le lunghezze degli spigoli. Se agisse soltanto la forza F_x, lo spigolo x avrebbe un aumento $\Delta_1 x$ definito dalla relazione $\frac{\Delta_1 x}{x} = \frac{T_x}{E}$. Se agisse soltanto la forza F_y le dimensioni del parallelepipedo

perpendicolari all'asse Y diminuirebbero. In particolare, lo spigolo x subirebbe un incremento negativo $\Delta_2 x$ che si può calcolare secondo la formula $\frac{\Delta_2 x}{x} = -\mu \frac{T_y}{E}$. Infine, l'incremento relativo dello spigolo x sotto l'azione della sola forza F_z sarebbe uguale a $\frac{\Delta_3 x}{x} = -\mu \frac{T_z}{E}$. Se tutte le forze agiscono insieme, secondo il principio di sovrapposizione delle piccole deformazioni l'allugamento risultante dello spigolo x sarà uguale a $\Delta x = \Delta_1 x +$

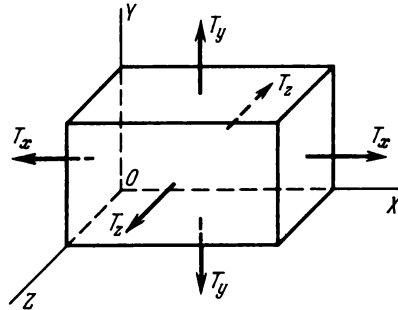



Fig. 201.

$+ \Delta_2 x + \Delta_3 x$. Analogamente si calcolano gli allungamenti del parallelepipedo lungo le direzioni Y e Z. Quindi per gli allungamenti dei tre spigoli del parallelepipedo si può scrivere

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &\equiv \frac{\Delta x}{x} = \frac{T_x}{E} - \frac{\mu}{E}(T_y + T_z), \\ \varepsilon_y &\equiv \frac{\Delta y}{y} = \frac{T_y}{E} - \frac{\mu}{E}(T_z + T_x), \\ \varepsilon_z &\equiv \frac{\Delta z}{z} = \frac{T_z}{E} - \frac{\mu}{E}(T_x + T_y), \end{aligned} \tag{76.1}$$

2. Nel caso di una trazione quasi statica del parallelepipedo lungo l'asse X, si effettua un lavoro $A_1 = 1/2 S_x T_x \Delta x$, dove $S_x = yz$ è l'area della faccia perpendicolare all'asse X. Si può scrivere questo nella forma $A_1 = 1/2 xyz \times \times T_x \frac{\Delta x}{x} = 1/2\ V/T_x \varepsilon_x$, dove $V = xyz$ è il volume del parallelepipedo. Si scrivono analogamente i lavori nel caso di estensioni quasi-statiche lungo gli assi Y e Z. Addizionando tutti questi lavori e dividendo il risultato per il volume del parallelepipedo, si ottiene l'espressione della densità dell'energia elastica del corpo considerato

$$u = \frac{1}{2}(T_x \varepsilon_x + T_y \varepsilon_y + T_z \varepsilon_z). \tag{76.2}$$

Mediante le formula (76.1) que a espressione si riduce alla forma

$$u = \frac{1}{2E}[T_x^2 + T_y^2 + T_z^2 - 2\mu(T_xT_y + T_yT_z + T_zT_x)]. \quad (76.3)$$

Se una sola delle tre tensioni T_x, T_y, T_z è diversa dallo zero, queste formule si riducono alle più semplici (75.10) e (75.11). Secondo le formule (75.11) la *densità di energia elastica u è proporzionale al quadrato della tensione T (o pressione P)*. Come dimostra la formula (76.3) nel caso generale la densità di energia elastica è una funzione quadratica omogenea delle tensioni T_x, T_y, T_z (o delle pressioni P_x, P_y, P_z). Nel caso di tensioni date (o pressioni) la densità di energia elastica è inversamente proporzionale al modulo di elasticità E. Più rigida è la molla, più piccola sarà la sua energia elastica in presenza di una tensione costante. I corpi solidi perfettamente rigidi (per i quali $E = \infty$) non acquistano energia elastica quali che siano le forze di tensione o pressione applicate. Conformemente alle formule (76.1) le tensioni T_x, T_y, T_z espresse attraverso ε_x, ε_y, ε_z sono lineari. La densità di energia elastica è quindi una funzione quadratica omogenea delle deformazioni ε_x, ε_y, ε_z. Nel caso particolare, in cui $\varepsilon_x = \varepsilon$, $\varepsilon_y = \varepsilon_z = 0$, essa è proporzionale al *quadrato della deformazione*. Date le deformazioni di ε_x, ε_y, ε_z la densità di energia elastica u è proporzionale al modulo di elasticità E. Più rigida è la molla, più la sua energia elastica è grande (per una deformazione data).

Problema

Si calcoli la variazione relativa del volume di una sfera cava in ottone, di raggio $R = 5$ cm, contenente l'aria sotto la pressione di 11 atm (la pressione esterna è di 1 atm). Lo spessore dell'involucro sferico $d = 1$ mm. Il modulo di Young dell'ottone $E = 10^{12}$ dine/cm^2, il coefficiente di Poisson $\mu = 0,3$.

Soluzione. A causa della simmetria lo sforzo tangenziale τ che agisce nell'involucro è uguale in tutte le direzioni. Consideriamo una piccola sezione dell'involucro avente forma rettangolare. Nell calcolo della variazione relativa dell'area di questa sezione sotto l'azione degli sforzi tangenziali τ si può ignorare la sua curvatura, assimilandolo a una piastra rettangolare. Allora il calcolo ci dà

$$\frac{\Delta S}{S} = 2(1 - \mu)\frac{\tau}{E}$$

(si ignori la variazione dell'area dovuta alla pressione normale). Poiché l'area S è proporzionale a $V^{2/3}$, la variazione relativa del volume sarà $\frac{\Delta V}{V} = \frac{3}{2}\frac{\Delta S}{S}$. Dato che la superficie è curva, la tensione τ creerà una differenza tra pressioni normali che si calcola facilmente: è uguale a $2\tau d/R$ (si veda la formula di Laplace per la tensione superficiale, v. II). Questa differenza di pressione deve essere equilibrata dalla differenza ΔP delle pressioni del gas che si trovano dall'una e dall'altra parte dell'involucro. Quindi si ottiene

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{3}{2}\frac{(1 - \mu)R}{Ed}\Delta P \approx 5 \cdot 10^{-4}.$$

§ 77. *Estensione e compressione uni- e triassiale*

1. Consideriamo un caso particolare in cui tutte le tensioni T_x, T_y, T_z siano uguali e negative. Allora il parallelepipedo è sottoposto da tutti i lati a una pressione costante $P = -T_x = -T_y = -T_z$. Come si vede nella formula (76.1) le tre deformazioni relative ε_x, ε_y, ε_z sono uguali e sono determinate dalle relazioni

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = -\frac{P}{E}(1 - 2\mu). \tag{77.1}$$

Le deformazioni si esprimono facilmente attraverso la variazione relativa del volume del parallelepipedo risultante dalla deformazione. Infatti, prendendo le derivate logaritmiche dei due membri dell'uguaglianza $V = xyz$, si ottiene

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y} + \frac{\Delta z}{z}$$

ossia

$$\frac{\Delta V}{V} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z. \tag{77.2}$$

Quindi la formula (77.1) può essere riscritta nella forma

$$\frac{\Delta V}{V} = -\frac{P}{K}, \tag{77.3}$$

dove la costante K è determinata dall'espressione

$$K = \frac{E}{3(1 - 2\mu)}. \tag{77.4}$$

Questa costante si chiama *modulo di compressione triassiale.* La formula (77.3) è applicabile ai corpi di qualsiasi forma, non soltanto a quelli rettangolari. Per dimostrarlo è sufficiente osservare che un corpo, qualunque sia la sua forma, può essere suddiviso in piccole parti, ciascuna avente la forma di un parallelepipedo rettangolo. Queste piccole parti sono sottoposte ad una pressione esterna costante. Le variazioni relative dei loro volumi e, quindi, la variazione relativa del corpo intero sono uguali e sono determinate dalla formula (77.3).

Nel caso di una *deformazione dovuta alla compressione triassiale*, l'espressione (76.3) della densità di energia elastica si trasforma in

$$u = \frac{3(1 - 2\mu)}{2E} P^2 = \frac{P^2}{2K}. \tag{77.5}$$

Dato che la grandezza u è essenzialmente positiva, si deve avere $1 - 2\mu > 0$, cioè

$$\mu < \frac{1}{2} . \tag{77.6}$$

2. Consideriamo un altro caso importante, *una deformazione dovuta alla trazione o alla compressione uniassiale.* Sia data un'asta omogenea in libero allungamento o in libera compressione lungo il suo asse (che prendiamo come asse X), senza che le sue dimensioni trasversali varino. Questo caso ha una grande importanza nella teoria della propagazione delle onde longitudinali in un mezzo elastico illimitato (cfr. § 83). Si può mentalmente delimitare una parte del mezzo considerato, avente la forma di un «asta» orientata lungo la propagazione dell'onda. Una tale «asta» può comprimersi o allungarsi lungo il suo asse longitudinale, ma il mezzo circonvicino impedisce ogni variazione delle sue dimensioni trasversali. Poiché la forma della sezione trasversale dell'asta non ha importanza, prendiamo un'asta di sezione trasversale rettangolare per poter utilizzare le formule (76.1). Supponiamo che lungo l'asta si eserciti una tensione costante T_x. Le tensioni trasversali T_y e T_z si ottengono dalla condizione d'invariabilità della dimensioni dell'asta lungo gli assi Y e Z. Ponendo nelle formule (76.1) $\Delta y = \Delta z = 0$, si ottiene

$$T_y - \mu(T_z + T_x) = 0, \quad T_z - \mu(T_x + T_y) = 0.$$

Quindi

$$T_y = T_z = \frac{\mu}{1 - \mu} T_x, \tag{77.7}$$

$$\varepsilon_x = \frac{T_x}{E}\left(1 - \frac{2\mu^2}{1 - \mu}\right). \tag{77.8}$$

Introduciamo l'indicazione

$$E' = E\frac{1 - \mu}{1 - \mu - 2\mu^2} = E\frac{1 - \mu}{(1 + \mu)(1 - 2\mu)} \tag{77.9}$$

ossia

$$E' = \left[\frac{2}{3\,(1 + \mu)} + \frac{1}{3\,(1 - 2\mu)}\right]E. \tag{77.10}$$

Allora

$$\frac{\Delta x}{x} = \frac{T_x}{E'}. \tag{77.11}$$

Questa relazione è analoga alla (75.7). La costante E' è il *modulo di trazione uniassiale.*

Problema

Una piastra rettangolare è bloccata tra due piani verticali perpendicolari all'asse X in modo che lungo quest'asse sia impossibile qualsiasi spostamento di materia (fig. 202). Lungo l'asse Z la piastra è sottoposta ad una pressione uniassiale uniforme P. Si calcoli la pressione P_x esercitata sulla piastra dai piani verticali tra cui è bloccata. Si trovi l'espressione della densità dell'energia elastica u nonché la compressione relativa della piastra nella direzione dell'asse Z e l'estensione relativa nella direzione dell'asse Y.

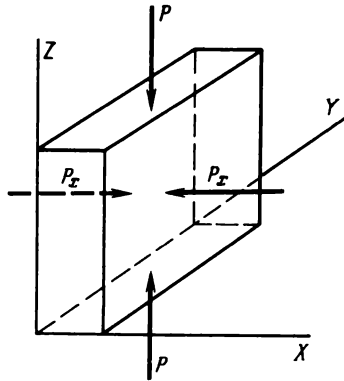



Fig. 202.

Risposta. $P_x = \mu P,\quad \dfrac{\Delta y}{y} = \dfrac{\mu P}{E}(1+\mu),\ \dfrac{\Delta z}{z} = -\dfrac{P}{E}(1-\mu^2),\quad u \doteq \dfrac{P^2}{2E}(1-\mu^2).$

§ 78. *Lo scorrimento*

1. Prendiamo un cubo di una sostanza omogenea ed isotropa. Applichiamo a due facce opposte AD e BC delle forze tangenziali uguali ma inversamente orientate (fig. 203, *a*). Queste due forze formano una coppia sotto la cui azione il cubo si metterà a ruotare. Per bloccare la rotazione applichiamo delle forze tangenziali identiche alle facce AB e CD. Il cubo allora non ruoterà più, ma subirà una deformazione. Anche la necessità di applicare degli sforzi tangenziali alle facce AB e CD deriva direttamente dalla simmetria del tensore degli sforzi elastici (cfr. § 74.).

L'esperienza mostra che sotto l'azione degli sforzi applicati il quadrato $ABCD$ si trasforma nel rombo $A'B'C'D'$, quindi la diagonale AC si allunga mentre la diagonale BD si accorcia. Come si dimostrerà più tardi, in questo caso il volume del corpo praticamente non varierà. Le variazioni relative del volume saranno quantità infinitesime di ordine superiore in rapporto alle variazioni relative delle lunghezze delle diagonali AC e BD. Nella teoria delle piccole deformazioni le variazioni di volume si trascurano. An-

che le variazioni delle lunghezze dei lati del quadrato *ABCD* saranno quantità infinitesime d'ordine superiore. Perciò dopo la deformazione, si può far ruotare il cubo in modo che la nuova base *A′D′* coincida con la base iniziale *AD* (fig. 203, *b*). Ne segue che la deformazione presa in esame consiste nel fatto che gli strati del cubo paralleli alla base *AD* sono spostati nella stessa direzione parallelamente alla base. È per questo che una tale deformazione si chiama *scorrimento.* Lo scorrimento è proporzionale alla distanza tra lo strato spostato e la base. L'angolo γ tra la faccia *AB* prima della deformazione e la stessa faccia *AB′* dopo la deformazione si chiama *angolo di scorrimento.* Certo la stessa deformazione del cubo si può ottenere per mezzo di uno scorrimento parallelo alla faccia *AB* o alla faccia *CD* essendo l'angolo di scorrimento γ identico. Si suppone, certamente, che l'angolo γ sia piccolo ($\gamma \ll 1$) per poter applicare la legge di Hooke. Per una deformazione da scorrimento questa legge si può scrivere

$$\tau = G\gamma, \tag{78.1}$$

dove τ è lo sforzo tangenziale che si esercita sulle facce del cubo. La costante G è il *modulo di scorrimento* e dipende dal materiale di cui è fatto il cubo.

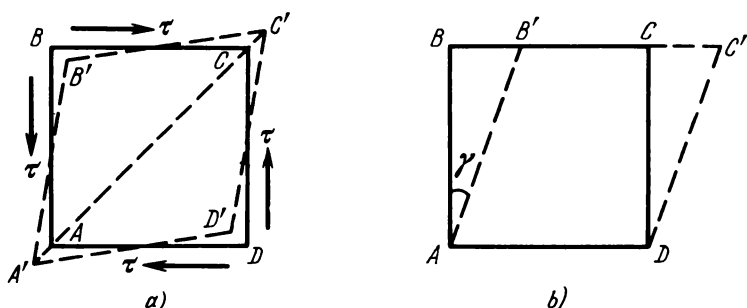



Fig. 203.

2. Calcoliamo l'espressione per la densità di energia elastica nel caso di una deformazione di scorrimento. Avendo fissato la base *AD* (fig. 203, *b*) provochiamo uno scorrimento quasi statico. Il lavoro speso per effettuare lo scorrimento farà aumentare l'energia elastica del corpo. Il lavoro prodotto, evidentemente, è uguale a $A = 1/2\tau S\Delta x$, dove Δx è lo scorrimento della faccia *BC* ed S l'area di questa faccia. Se a è la lunghezza dello spigolo, si ha $\Delta x = a\gamma$ e quindi $A = 1/2\tau Sa\gamma = 1/2V\tau\gamma$, dove V è il volume del cubo. Ne segue che la densità spaziale dell'energia elastica è espressa dalla formula

$$u = \frac{1}{2}\tau\gamma = \frac{\tau^2}{2G}. \tag{78.2}$$

3. Gli sforzi tangenziali che agiscono parallelamente alle facce del cubo possono essere ricondotti ad un insieme di sforzi e di pressioni di valore uguale, che agiscono in direzioni tra loro perpendicolari. Infatti, tagliamo una sezione diagonale del cubo AC (con un piano perpendicolare al piano della figura 203, *a*). La forza F che agisce sulla parte ACD del cubo nel piano AC sarà normale a questo piano e orientata verso l'interno della parte considerata. È una forza di pressione normale. Calcoliamo questa pressione. Se a è la lunghezza dello spigolo del cubo, la forza F è evidentemente uguale a

$$F = a^2 (\tau \sin 45° + \tau \cos 45°) = \sqrt{2} a^2 \tau .$$

L'area della sezione diagonale AC è $a^2\sqrt{2}$. Dividendo F per questa area si ottiene la pressione cercata $P = \tau$. Dunque, nella sezione diagonale AC, così come in ogni piano parallelo a questa sezione, lo sforzo si riduce ad una pressione normale di valore τ. Si può dimostrare con un ragionamento analogo che nella sezione diagonale BD ed in ogni piano parallelo a questa sezione agisce una tensione normale T numericamente uguale a τ.

4. Da quanto detto risulta evidente che *lo scorrimento è equivalente ad una estensione del corpo lungo una certa direzione e ad una compressione in direzione perpendicolare.* Ritagliamo mentalmente, dal nostro cubo, un parallelepipedo rettangolare, ad esempio di sezione retta $PQRS$ (fig. 204). Lungo la diagonale AC del cubo il parallelepipedo sarà allungato dalla tensione $T = \tau$ e lungo la direzione perpendicolare BD sarà compresso da una pressione $P = \tau$. Lungo la direzione perpendicolare al piano della figura le dimensioni del parallelepipedo rimarranno invariate. Orientiamo l'asse X

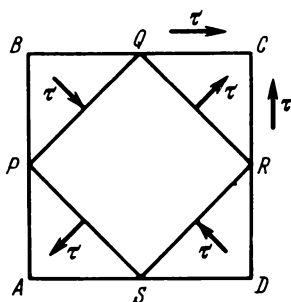



Fig. 204.

parallelamente agli spigoli PQ ed SR e l'asse Y parallelamente agli spigoli QR e PS. Portando allora nelle formule (76.1) $T_x = \tau$, $T_y = -\tau$, $T_z = 0$, si ottiene $\varepsilon_z = 0$, $\varepsilon_x + \varepsilon_y = 0$. Secondo la relazione (77.2) $\Delta V = 0$. La deformazione del corpo non ne modefica il volume — come abbiamo già affermato senza darne dimostrazione.

5. Con lo stesso tipo di ragionamento dalla formula (76.3) si ottiene la seguente espressione per la densità di energia elastica in caso di scorrimento:

$$u = \frac{1 + \mu}{E} \tau^2. \tag{78.3}$$

Questa quantità deve coincidere con la formula (78.2) poiché il valore di u non può dipendere dal tipo di calcolo. Confrontando le due espressioni, si ottiene

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}. \tag{78.4}$$

Questa formula stabilisce una correlazione tra il modulo di Young E, il coefficiente di Poisson μ e il modulo di scorrimento G. Utilizzando questa formula nonché le formule (77.10) e (77.4), si ottiene

$$E' = K + \frac{4}{3} G. \tag{78.5}$$

§ 79. *Torsione*

1. Le deformazioni di cui si è trattato finora erano deformazioni *omogenee*, cioè tali che tutti gli elementi infinitesimi del corpo si deformavano ugualmente. *Le deformazioni di torsione e di flessione che vogliamo ora esaminare sono deformazioni eterogenee*, il che significa che all'interno di un corpo le deformazioni variano da un punto all'altro.

Prendiamo un filo omogeneo, fissiamone l'estremità superiore e applichiamo all'altra estremità forze di torsione che creano un momento di torsione M rispetto all'asse longitudinale del filo. Il filo si torcerà, cioè ciascun raggio della base inferiore ruoterà di un angolo φ intorno all'asse longitudinale del filo. Tale deformazione si chiama *torsione*. Per la deformazione di torsione la legge di Hooke si scrive nella forma

$$M = f\varphi, \tag{79.1}$$

dove f è una quantità costante per il filo dato, detta *modulo di torsione*. A differenza dei moduli E, K, E', G e del coefficiente μ, il modulo di torsione

dipende non soltanto dal materiale, ma anche dalle dimensioni geometriche del filo.

2. Stabiliamo l'espressione del modulo di torsione f. Facciamolo prima per un tubo cilindrico di raggio r e di lunghezza l, supponendo che lo spessore δr della parete del tubo sia molto piccolo rispetto al raggio r. L'area di base del tubo è $2\pi r\delta r$. Il momento della forza che agisce su questa base sarà $M = 2\pi r\delta r \cdot \tau r$, dove τ è lo sforzo tangenziale che si esercita sulla base stessa. Nel caso di torsione quasi statica di un filo di angolo φ si produce un lavoro $A = 1/2M\varphi = \frac{M^2}{2f}$. Dividendolo per il volume del tubo $V = 2\pi rl\delta r$, si ottiene la densità dell'energia elastica accumulata durante la deformazione di torsione

$$u = \frac{\pi\tau^2 r^3\delta r}{fl}. \tag{79.2}$$

Si può esprimere la stessa grandezza in altro modo. Consideriamo mentalmente lungo il tubo un elemento infinitamente corto (fig. 205). In seguito alla deformazione di torsione l'elemento infinitesimo ABDC del tubo pas-

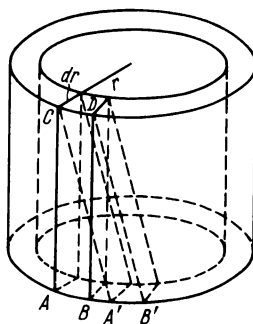



Fig. 205.

serà nella posizione $A'B'DC$. Questo è uno scorrimento. Si può quindi considerare le deformazioni di torsione come scorrimenti eterogenei. La densità di energia elastica durante lo scorrimento è data dall'espressione (78.2). Uguagliandola all'espressione (79.2), si ottiene la relazione cercata

$$f = \frac{2\pi G r^3\delta r}{l}. \tag{79.3}$$

Se lo spessore della parete del tubo è finito, si ottiene il modulo f integrando l'ultima espressione rispetto a r, il che dà

$$f = \frac{\pi G}{2l}(r_2^4 - r_1^4), \tag{79.4}$$

dove r_1 è il raggio interno del tubo e r_2 il raggio esterno. Per un filo di raggio r, si avrà

$$f = \frac{\pi G}{2\tau} r^4. \tag{79.5}$$

3. Si può determinare sperimentalmente il modulo di torsione, osservando le oscillazioni di torsione di un corpo massiccio sospeso all'estremità inferiore del filo. Queste oscillazioni saranno armoniche di periodo

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{f}} \tag{79.6}$$

(cfr. §42. Se si conosce il momento d'inerzia I del corpo, misurato il periodo T si può calcolare per mezzo di questa formula il modulo di torsione f.

Problemi

1. Siano dati due fili di uno stesso materiale, della stessa lunghezza, ma il diametro dell'uno sia il doppio dell'altro. In uno degli esperimenti si torcono di uno stesso angolo le basi inferiori dei due fili rispetto alle basi superiori. Nell'altro esperimento si saldano le basi dei due fili in modo che i due assi longitudinali coincidano; si torce per la base inferiore del secondo filo di un certo angolo rispetto alla base superiore. Si determini il rapporto delle energie elastiche nei due esperimenti.

Risposta. 1) $\frac{U_1}{U_2} = \frac{1}{16}$. 2) $\frac{U_1}{U_2} = 16$.

2. Una pallina sospesa ad un filo compie intorno ad un asse verticale delle oscillazioni di torsione di periodo T. Si calcoli il periodo T' delle oscillazioni della stessa pallina qualora al filo si sostituisca un tubo cilindrico dello stesso materiale, di massa e lunghezza uguali, di raggio esterno R e di raggio interno r.

Risposta. $T' = T\sqrt{\frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2}}$.

3. Si calcoli l'allungamento di una molla a elica lungo il cui asse agiscono forze di trazione. Si consideri il passo dell'elica trascurabilmente piccolo rispetto al raggio R della spirale e sia dato per noto il modulo di torsione del filo utilizzato per costruire la molla.

Soluzione. Immaginiamo di tagliare il filo della molla, in un punto qualunque A con un piano che passi attraverso l'asse della molla (fig. 206 a). Sia F_1 la forza con cui la parte inferiore della molla agisce su quella superiore nel punto A del taglio. Per ricreare un equilibrio bisogna che $F_1 = -F$, dove F è la forza di trazione che agisce sulla parte superiore della molla. Poiché le forze F ed F_1 formano una coppia, il momento di questa coppia non dipende dal punto cui si riferisce. Questo momento è perpendicolare al piano di taglio ed è uguale a $M = FR$. Dato che il passo dell'elica è piccolo, si può ammettere che nel punto A questo momento sia orientato lungo l'asse del filo. Affinché la parte di molla considerata sia in stato di equilibrio, bisogna che avvenga una torsione del filo intorno al suo asse per compensare il momento

M. Quando le forze di trazione F agiscono lungo l'asse della molla, il modulo del momento M non varia lungo il filo e la torsione del filo sarà, quindi, uniforme. Sia dl un tratto infinitesimo di filo. Sotto l'azione del momento M questo elemento si torce di un angolo $d\varphi = M/f_1$, dove f_1 è il modulo di torsione dell'elemento considerato. Indichiamo con f il modulo di torsione del filo intero (immaginiamo che il filo sia raddrizzato). Poiché il modulo di torsione è inversamente proporzionale alla lunghezza l_0 del filo, si ha $f = f_1 \frac{dl}{l_0}$, quindi $d\varphi = \frac{M}{f}\frac{dl}{l_0}$. In seguito alla torsione dell'elemento dl di un angolo $d\varphi$ l'estremità inferiore del filo si abbasserà di

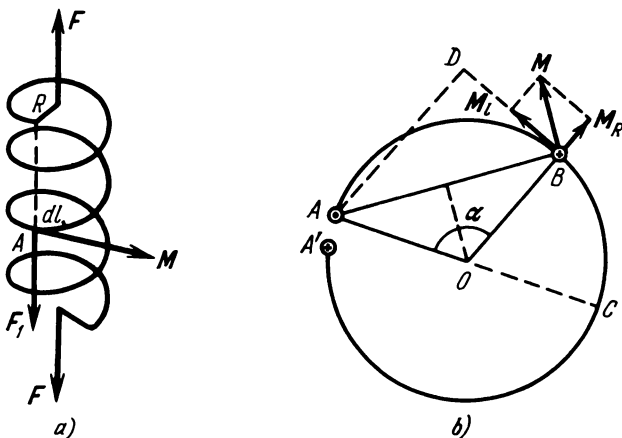



Fig. 206.

$dx = R\,d\varphi = \frac{MR}{f}\frac{dl}{l_0} = \frac{FR^2}{f}\frac{dl}{l_0}$. Integrando su tutta la lunghezza del filo, si ottiene l'allungamento della molla

$$x = \frac{FR^2}{f}. \tag{79.7}$$

Introduciamo il coefficiente di elasticità della molla secondo la formula $F = kx$. Si avrà allora

$$k = \frac{f}{R^2}. \tag{79.8}$$

4. Si risolva lo stesso problema per il caso in cui le forze di trazione agiscano non lungo l'asse della molla, ma lungo una delle generatrici della superficie cilindrica sulla quale la molla è arrotolata.

Soluzione. Individuiamo un segmento qualunque AB del filo (fig. 206, b). Le forze che agiscono sulle sue estremità sono perpendicolari al piano della figura (quindi, parallele all'asse longitudinale della molla). Ciascuna di queste forze è uguale alla forza esterna F applicata alla molla. Indichiamo la forza orientata verso il lettore con un punto, l'altra di senso inverso con una croce. Il momento M delle forze applicate al segmento considerato è perpendicolare alla corda AB ed è uguale a $M = 2FR \sin(\alpha/2)$. Scomponiamo questo momento in una componente M_l orientata lungo il filo ed in una componente M_R perpendicolare al filo. Se la molla possiede un gran numero di spire, si può ignorare la componente M_R, poiché essa provoca la torsione del filo intorno ad un asse parallelo al raggio OB. È facile notare che questo momento fa torcere la parte AC in un senso e la parte CA' in senso inverso; nel caso di un gran numero di spire, questa torsione non influenza praticamente l'allungamento della molla. Il momen-

to M_L è uguale a M sin $(\alpha/2) = 2FR \sin^2(\alpha/2)$. Esso fa torcere l'elemento di lunghezza dl del filo di un angolo $d\varphi = \frac{M_l}{f_1} = \frac{M_l}{f}\frac{dl}{l_0}$ e sposta l'estremità libera della molla di una distanza

$$dx = AD \cdot d\varphi = AB \sin\frac{\alpha}{2} \cdot d\varphi = \frac{4FR^2}{fl_0} \sin^4\frac{\alpha}{2}\, dl = \frac{4FR^3}{fl_0} \sin^4\frac{\alpha}{2}\, d\alpha.$$

A differenza del caso precedente, la torsione del filo non è omogenea. Integrando su tutta la lunghezza della molla e supponendo un numero intero di spire si ottiene

$$x = \frac{3}{4}\frac{FR^2}{f}.$$

§ 80. *La flessione*

1. Consideriamo la flessione di una sbarra omogenea di sezione trasversale arbitraria che rimane idenica su tutta la lunghezza della sbarra. Supponiamo che prima della deformazione la sbarra sia rettilinea. Mediante due sezioni AB e $A'B'$, perpendicolari all'asse, immaginiamo di delimitare nella sbarra un elemento AA′B′B infinitamente piccolo (fig. 207, *a*) di lunghezza l_0. Dato che l'elemento è infinitamente piccolo, si può ammettere che in seguito alla flessione le rette AA', NN', BB' e tutte le altre rette loro parallele diventino cerchi con i centri sull'asse O perpendicolare al piano della figura (fig. 207, *b*). Quest'asse si chiama *asse di flessione*. Le fibre esterne

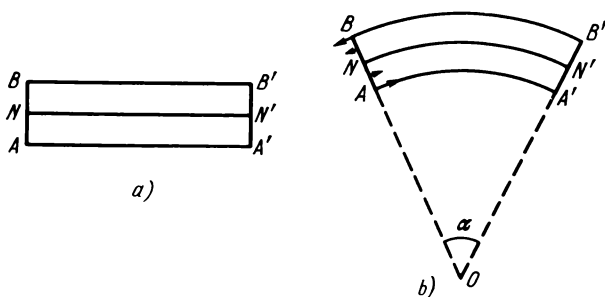



Fig. 207.

che si trovano al di sopra della linea NN' si allungano durante la flessione, mentre le fibre che si trovano al di sotto di questa linea si accorciano. La lunghezza della linea NN' rimane invariata. È la *linea neutra*. La sezione della sbarra (non deformata) con un piano normale al piano della figura 207, e che passi attraverso questa linea, si chiama *sezione neutra*. Quindi tutte le fibre esterne si tendono, mentre quelle interne si comprimono. Sia R il raggio di curvatura della linea neutra NN'. Allora $l_0 = R\alpha$, dove α è l'angolo al centro che insiste sull'arco NN'. Consideriamo una fibra della sbarra, che si trovi ad una distanza ξ dalla sezione neutra. (La grandezza ξ

è positiva se la fibra si trova al di sopra della sezione neutra (fig. 207, *b*) e negativa se si trova al di sotto). Se la sbarra non è troppo grossa, tanto che $|\xi| \ll R$ la lunghezza della fibra considerata sarà uguale a $l = (R + \xi)\alpha$ ed il suo allungamento sarà uguale a $\Delta l = l - l_0 = \xi\alpha$. Ne segue che la tensione che agisce lungo la fibra considerata è $\tau = E \frac{\Delta l}{l_0} = E\xi \frac{\alpha}{l_0}$, ossia

$$\tau = E \frac{\xi}{R}. \tag{80.1}$$

La tensione, quindi, varia linearmente con la distanza ξ. Al di sotto della sezione neutra è negativa, cioè corrisponde a una pressione. La somma delle forze di trazione e di pressione che agiscono nella sezione *AB* può essere diversa da zero, ma in questo caso alla flessione della sbarra si sovrappone un'allungamento (o una compressione) identica per tutte le fibre. Si può tenerne conto ed escluderla dai calcoli, qualora si voglia studiare una flessione pura. Ammetiamo quindi che la somma di tutte le forze di tensione che agiscono in ogni sezione trasversale della sbarra sia uguale a zero, cioè $\int \tau dS = 0$ ossia in virtù della formula (80.1) $\int \xi dS = 0$, dove dS è l'elemento di superficie della sezione trasversale considerata. L'integrazione si estende a tutta la superficie della sezione retta considerata. Ne segue che la linea neutra e la sezione neutra passano per il centro di gravità della sezione trasversale della sbarra. Dalla relazione $\int \tau dS = 0$ deriva che il momento delle forze di tensione M_τ che agiscono sulla sezione *AB* non dipende dalla posizione dell'asse cui si riferisce. Per calcolare M_τ è più comodo scegliere l'asse perpendicolare al piano della figura che passi per il punto *N*. È evidente che

$$M_\tau = \int \xi \tau dS = \frac{E}{R} \int \xi^2 dS,$$

ossia

$$M_\tau = \frac{E}{R} I, \tag{80.2}$$

dove

$$I = \int \xi^2 \, dS. \tag{80.3}$$

La grandezza I si chiama *momento d'inerzia* della sezione retta della sbarra per analogia con la grandezza corrispondente introdotta per lo studio della rotazione di un corpo intorno ad un asse fisso. Però a differenza di quest'ultima, avente per dimensioni il prodotto della massa per il quadrato della lunghezza, il momento (80.3) è una grandezza puramente geometrica, le cui dimensioni sono una lunghezza elevata alla quarta potenza.

A questo punto si possono utilizzare le formule dei momenti d'inerzia del § 36, sostituendo la massa m con l'area S della sezione trasversale. Se la sezione trasversale della sbarra ha forma rettangolare, larghezza a ed altez-

za b, si ottiene allora

$$I = \frac{ab^3}{12}. \qquad (80.4)$$

Per una sezione retta circolare, di raggio r

$$I = \frac{\pi r^4}{4}. \qquad (80.5)$$

Per un tubo cilindrico di raggio interno r_1 e di raggio esterno r_2

$$I = \frac{\pi}{4} (r_2^4 - r_1^4). \qquad (80.6)$$

Orientiamo l'asse X lungo la linea neutra della sbarra non deformata. Dirigiamo l'asse Y perpendicolarmente alla sbarra nel piano della flessione. L'equazione della linea neutra della sbarra, dopo aver subito la flessione sarà $y = y(x)$, secondo la formula conosciuta

$$\frac{1}{R} = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}}.$$

Se la flessione è piccola ($y' \ll 1$) si può trascurare il quadrato della derivata ed in questa approssimazione

$$M_\tau = EIy''. \qquad (80.7)$$

2. Immaginiamo di delimitare una parte arbitraria (finita o infinitamente piccola) di sbarra, praticando due sezioni normali. In stato di equilibrio il momento delle forze elastiche di tensione che agisono sulle due estremità della parte delimitata deve essere equilibrato dai momenti di senso opposto di tutte le altre forze esterne che agiscono sulla parte considerata. Questo procedimento suggerisce un metodo di soluzione dei problemi sulla flessione che illustreremo con esempi citati qui sotto e con problemi proposti alla fine del paragrafo.

Esempio 1. Un'asta omogenea AB si trova su due supporti C e D simmetricamente disposti (fig. 208). Si applicano alle estremità A e B dell'asta le forze F uguali e dello stesso senso. Calcoliamo la forma dell'asta in stato di equilibrio trascurando il peso. Per simmetria, i supporti C e D in equilibrio esercitano sull'asta forze identiche F_1 e $-F_1$ entrambe uguali ad F. Facciamo nell'asta una sezione retta che passi per un punto O arbitrariamente situato. È sufficiente considerare le condizioni di equilibrio di una delle parti dell'asta, della parte OB, ad esempio. Le tensioni elastiche creano nella sezione O un momento di rotazione M_τ che è determinato dalla formula (80.2). La coppia delle forze G_1 ed F creano un momento $M = Fa$ diretto in senso opposto, dove a è la distanza tra le linee di applicazione delle forze F_1 ed F. Né il momento M_τ né il momento M dipendòno dalla

posizione dell'asse rispetto al quale esso è definito. Inoltre, il momento M non dipende dalla posizione del punto O ed è identico lungo tutta l'asta. L'equazione di equilibrio $M_T = M$ assume la forma $IE/R = Fa$. Ne deriva che il raggio di curvatura R è uguale in tutti i punti della linea neutra dell'asta. Quindi, in stato di equilibrio l'asta avrà la forma di un'arco di cerchio come indicato dalla linea punteggiata sulla figura 208.

A dimostrazione di ciò si può prendere una tavola di legno e piantare dei chiodi nei punti A', B', C, D. Se si dispone tra questi chiodi una riga d'acciaio flessibile essa assumerà la forma d'un arco di cerchio. È un procedimento pratico per tracciare cerchi quando il normale compasso da disegno non si può usare (nel caso di cerchi di grande raggio, ad esempio).

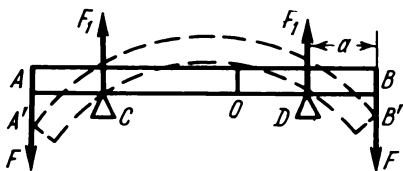



Fig. 208.

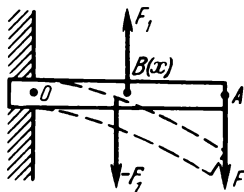



Fig. 209.

Esempio 2. Calcoliamo la freccia di flessione di una trave con una estremità fissata rigidamente nel muro (fig. 209). L'altra estremità della trave è sottoposta all'azione di una forza concentrata F. Si trascuri il peso di trave. Si chiama freccia di flessione lo spostamento dell'estremità libera della trave sotto l'azione di una forza applicata F.

Poniamo l'origine delle coordinate nel punto O in cui la linea neutra della trave intercetta il piano del muro. Facciamo passare una sezione retta per un punto arbitrario $B(x)$ (di coordinata $x = OB$). Perché ci sia equilibrio, bisogna che la forza F_1, che la parte BO applica alla parte BA della trave, sia diretta verso l'alto e sia uguale a F. Insieme con F essa forma una coppia di momento $M = F(l - x)$ dove l è la lunghezza della trave. Indichiamo il momento delle forze di tensione con la formula approssimata (80.7) supponendo che la freccia sia piccola. Si arriva così all'equazione

$$Ely'' = F(l - x).$$

(L'asse y punta verso la concavità, cioè verso il basso. In questo caso la derivata seconda y'' è positiva e i due membri di questa relazione hanno lo stesso segno). Integrando una prima volta questa equazione, si ottiene

$$y' = \frac{F}{EI} x \left(l - \frac{x}{2} \right) + C.$$

La costante di integrazione C è uguale a zero, poiché per $x = 0$ cioè nel punto O, la tangente alla linea neutra è orizzontale. Integrando una secon-

da volta e osservando che nel punto O (cioè per $x = 0$) $y = 0$, si ottiene

$$y' = \frac{Fx^2}{2EI} x \left(l - \frac{x}{3}\right). \tag{80.8}$$

Ponendo $x = l$ otteniamo la freccia di flessione

$$\lambda = \frac{Fl^3}{3EI}. \tag{80.9}$$

Esempio 3. Calcoliamo la freccia di flessione al centro di una trave posata su due supporti, se al suo centro O è applicata una forza concentrata F diretta verso il basso (fig. 210). Come nell'esempio di sopra, si trascura il peso della trave. Per simmetria la forza F si distribuirà ugualmente tra i due supporti. Poniamo l'origine delle coordinate nel punto A della linea neutra situata al di sopra del supporto di sinistra. Delimitiamo mentalmente la parte sinistra della trave tracciando una sezione trasversale passante per il punto arbitrario $C(x)$ (di coordinata x) situato un po' a sinistra dal centro O ($x < l/2$, dove l è la lunghezza della trave). Su questa parte della trave l'altra parte eserciterà una forza $F/2$ orientata verso il basso. Il momento delle forze esterne, che agiscono sulla parte delimitata, è $M = (F/2)x$. L'equazione d'equilibrio assumerà la forma

$$EIy'' = -\frac{F}{2} x \left(x \leqslant \frac{l}{2}\right). \tag{80.10}$$

Ora l'asse Y punta verso il basso, cioè in direzione della convessità della trave. La derivata y'' è negativa. Per ciò il secondo membro dell'equazio-

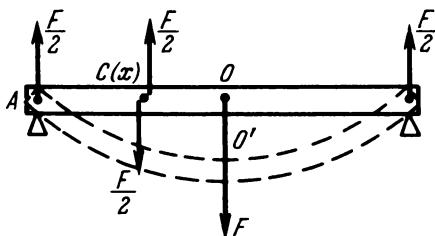



Fig. 210.

ne ha segno negativo. Integrando l'equazione ottenuta e osservando che $y' = 0$ per $x = l/2$, $y = 0$ per $x = 0$, si avrà

$$y = \frac{Fx}{48EI}(3l^2 - 4x^2) \quad \left(x \leqslant \frac{l}{2}\right). \tag{80.11}$$

Ponendo $x = l/2$, si ottiene la freccia di flessione

$$\lambda = \frac{Fl^3}{48EI}. \tag{80.12}$$

Questo risultato può ugualmente essere dedotto dalla formula (80.9). Infatti nel punto O' la tangente alla linea neutra della trave flessa è orizzontale (fig. 210). Se si taglia mentalmente la trave con una sezione trasversale che passi per il punto O', la trave sarà divisa in due parti ciascuna delle quali sarà equivalente ad una trave fissata rigidamente ad una estremità nel punto O'; l'estremità libera della trave sarà sottoposta all'azione della forza concentrata $F/2$ diretta verso l'alto. Ne segue che la freccia di flessione al centro della trave si otterrà dalla formula (80.9), se si effettuano le sostituzioni: $F \to F/2$, $l \to l/2$. Allora si ha

$$\lambda = \frac{1}{3EI}\frac{F}{2}\left(\frac{l}{2}\right)^3 = \frac{Fl^3}{48EI},$$

ovvero il risultato precedente (80.12).

Esempio 4. Calcoliamo la freccia di flessione al centro di una trave omogenea le cui due estremità siano fissate rigidamente; questa freccia di flessione è determinata dall'azione di una forza F concentrata al centro della trave (fig. 211). Si trascura ancora il peso della trave. Quando la trave poggiava liberamente su due supporti (fig. 210) la loro pressione si riduceva

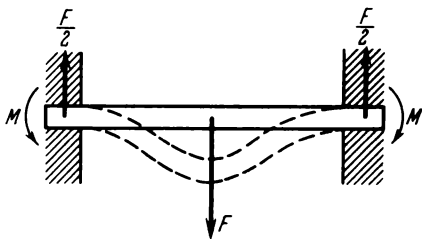
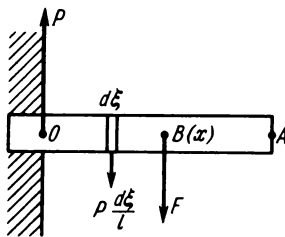



Fig. 211. Fig. 212.

alle forze $F/2$ con cui ciascun supporto puntuale premeva sulla trave. Nel caso di una trave fissata rigidamente alle estremità la risultante delle forze di reazione del supporto che agiscono su ciascuna estremità della trave è sempre uguale a $F/2$. Ma le forze di reazione creano un momento supplementare di rotazione M che agisce sulla trave. Al posto dell'equazione (80.10), si ha quindi

$$EIy'' = -\frac{F}{2}x + M \quad \left(x \leqslant \frac{l}{2}\right), \tag{80.13}$$

Supponendo che il momento di rotazione M non sia noto e debba essere calcolato, l'equazione (80.13) va risolta rispettando le seguenti condizioni:

1) $y' = 0$ per $x = 0$, 2) $y' = 0$ per $x = l/2$, 3) $y = 0$ per $x = 0$. Si ottiene allora

$$M = \frac{Fl}{8}$$

$$y = \frac{Fx^2}{16EI}\left(l - \frac{4}{3}x\right), \tag{80.14}$$

$$\lambda = \frac{Fl^3}{192EI}$$

Esempio 5. Consideriamo ora la flessione di una trave sotto l'azione del proprio peso P nel caso in cui sia fissata rigidamente ad una estremità, essendo l'altra libera (fig. 212). Perché la trave intera sia in equilibrio è necessario che il muro eserciti sull'estremità O della trave una forza uguale al peso P e diretta dal basso in alto. Tracciamo una sezione trasversale che passa per il punto $B(x)$ della linea neutra (di coordinata $OB = x$). Nell'esempio 2, risolvendo un problema analogo, è stata trovata la condizione di equilibrio della parte BA della trave. Si potrebbe utilizzare questo stesso procedimento anche per risolvere il problema in esame, ma per la dimostrazione preferiamo utilizzare la condizione di equilibrio dell'altra parte (OB). Sia F la forza che la parte BA applica all'estremità destra della parte OB della trave. Il peso della parte OB è Px/l. Per l'equilibrio di questa parte è necessaria la condizione $P = F + Px/l$ ossia $F = P(1 - x/l)$. Il segmento $d\xi$ della trave è sottoposto alla forza di gravità $P\frac{d\xi}{l}$. Il momento M_1 di tutte le forze verticali che agiscono sulla parte OB non dipende dalla posizione dell'asse rispetto a cui è definito. Prendiamo perciò come asse l'asse che passa per il punto O. Si avrà allora

$$M_1 = Fx + \int_0^x P\xi \frac{d\xi}{l} = Px - P\frac{x^2}{2l}.$$

Si deve ancora aggiungere il momento delle forze orizzontali degli sforzi elastici applicati all'estremità fissa O. Indicando questo momento con M_2, si può scrivere per il momento complessivo delle forze che agiscono sulla parte OB della trave:

$$M = Px - P\frac{x^2}{2l} + M_2. \tag{80.15}$$

Si può dedurre la costante M_2 dalla condizione di equilibrio dell'intera trave OA. Dato che nessuna forza e nessuno sforzo elastico agiscono sulla sua estremità libera, ponendo $x = l$ nella formula (80.15), si ottiene il momento complessivo delle forze che agiscono su tutta la trave. In condizioni di equilibrio, esso deve essere uguale a zero, cioè $Pl - P\frac{l^2}{2l} + M_2 = 0$. Da

cui $M_2 = -Pl/2$. Quindi

$$M = Px - P\frac{x^2}{2l} - P\frac{l}{2}. \qquad (80.16)$$

L'equazione d'equilibrio per la parte OB della trave assume la forma

$$EIy'' = -Px + P\frac{x^2}{2l} + P\frac{l}{2}.$$

Risolvendo con le condizioni 1) $y' = 0$ per $x = 0$, 2) $y = 0$ per $x = 0$, si ottiene

$$y = \frac{P}{4EI}lx^2 - \frac{P}{6EI}x^3 + \frac{P}{24EI}\frac{x^4}{l}. \qquad (80.17)$$

Ponendovi $x = l$, si ottiene la freccia di flessione della trave

$$\lambda = \frac{P}{8EI}l^3. \qquad (80.18)$$

Se all'estremità libera della trave si applica una forza esterna F diretta dall'alto in basso, al posto delle formule (80.16) e (80.18) si otterrà facilmente

$$M = F(x - l) + Px - P\frac{x^2}{2l} - \frac{Pl}{2}, \qquad (80.19)$$

$$\lambda = \frac{l^3}{EI}\left(\frac{F}{3} + \frac{P}{8}\right). \qquad (80.20)$$

La flessione che ne risulta è uguale quindi alla somma delle flessioni dovute ad una azione indipendente delle forze F e P. Questo risultato è valido per qualsiasi piccola deformazione e non soltanto per le deformazioni di flessione, il che deriva immediatamente dal principio di sovrapposizione.

Esempio 6. Un'asta elastica AB di lunghezza l è compressa da due forze F, uguali applicate alle sue due estremita, ma inversamente orientate che agiscono lungo la stessa retta (fig. 213). Le estremità dell'asta sono fissate con cerniere, il che permette loro di spostarsi liberamente lungo la direzione di applicazione delle forze. Nel caso di un certo carico F, l'asta comincia a flettersi da una parte. Ciò dimostra che oltre alla compressione sono possibili nell'asta anche altri stati di equilibrio. La figura 213 illustra lo stato dell'asta flessa. Orientiamo l'asse X lungo l'asse longitudinale dell'asta non deformata e l'asse Y lungo una direzione normale nel senso della curvatura. L'equazione di equilibrio dell'asta curvata ha la forma

$$y'' + k^2y = 0 \qquad (80.21)$$

dove

$$k^2 = \frac{F}{EI}. \qquad (80.22)$$

La soluzione generale di questa equazione è

$$y = C\cos kx + D\sin kx,$$

dove C e D sono le costanti di integrazione. Se si pone l'origine delle coordinate ad una delle estremità dell'asta, si avrà $C = 0$, poiché per $x = 0$ l'ordinata si annulla. All'altra estremità dell'asta, cioè per $x = l$, anche l'ordinata y è uguale a zero. Quindi anche $D \sin kl = 0$[1]. Se $\sin kl \neq 0$, allora $D = 0$, e in seguito $y = 0$. In questo caso l'asta può essere soltanto compressa, ma non curvata. Se invece $\sin kl = 0$, cioè $kl = \pi, 2\pi, 3\pi, \ldots$, la forma di equilibrio rettilinea dell'asta, sebbene ancora teoricamente possibile, risulterebbe instabile il che è facile da dimostrare. L'asta assume la forma di un arco di sinusoide in conformità all'equazione $y = D \sin kx$,

Fig. 213.

Fig. 214.

dove la costante D dipende dal valore della flessione, cioè, in conclusione, dal valore del carico imposto. I valori l e F corrispondenti alla radice più piccola ($kl = \pi$)

$$l = \frac{\pi}{k} = \pi \sqrt{\frac{EI}{F}} \quad \text{ed} \quad F = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \tag{80.23}$$

si chiamano rispettivamente *lunghezza critica e carico limite* di una flessione longitudinale. Queste grandezze possono essere considerate come i valori limite della lunghezza o del carico in presenza dei quali l'asta comincia ad incurvarsi su di un lato, a meno che non sia distrutta prima dalle forze applicate.

Nel caso in cui le due estremità dell'asta siano incastrate (fig. 214), si deve ancora tener conto dei momenti supplementari delle forze che agiscono alle due estremità dell'asta, come nell'esempio 4. Invece dell'equazione

[1] A rigor di termini, si deve considerare l non come lunghezza dell'asta stessa, ma come distanza lineare tra le due estremità dell'asta curvata. Questa distanza deve evidentemente variare con il cambiamento del carico ed è una grandezza da determinare. Però, nel caso di piccole deformazioni, tale correzione non ha importanza, si può considerare l come lunghezza dell'asta stessa.

(80.21) si deve risolvere ora l'equazione

$$y'' + k^2 y = k^2 C$$

dove C è una costante da definire. La soluzione generale di questa equazione è

$$y = A \cos kx + B \sin kx + C.$$

La condizione $y = 0$ per $x = 0$ conduce a $A + C = 0$. Dalla seconda condizione $y' = 0$ per $x = 0$ si ottiene $B = 0$, quindi

$$y = A(\cos kx - 1).$$

Si deve ancora esigere che y e y' si annullino ugualmente anche all'altra estremità dell'asta. Questa dà due nuove condizioni: 1) $\cos kl = 1$, 2) $\sin kl = 0$. Ne deriva $kl = 2\pi, 4\pi, \ldots$. La lunghezza critica in questo caso è due volte più grande e il carico limite quattro volte più grande che nel caso precedente

$$l = \frac{2\pi}{k} = 2\pi \sqrt{\frac{EI}{F}}, \quad F = \frac{4\pi^2 EI}{l^2}. \tag{80.24}$$

Se un'estremità dell'asta è fissata rigidamente, mentre l'altra è fissata ad una cerniera, si ottiene allora per le stesse grandezze

$$l = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{EI}{F}}, \quad F = \frac{\pi^2 EI}{4l^2}. \tag{80.25}$$

Problemi

1. Si calcoli la freccia al centro di una trave omogenea sotto l'azione del proprio peso P, qualora la trave poggi le estremità su due supporti.

Risposta. $\lambda = \frac{5}{384} \frac{Pl^3}{EI}$.

2. Stesso quesito, ma nel caso di una trave fissata rigidamente nel muro alle due estremità.

Risposta. $\lambda = \frac{1}{384} \frac{Pl^3}{EI}$.

3. Si calcoli la distribuzione del peso P di una trave poggiata su tre supporti A, B, C (fig. 215). Il supporto medio C si trova al centro tra i sostegni laterali A e B ed è spostato di λ verso il basso rispetto al piano orizzontale in cui si trovano i supporti laterali.

Soluzione. In condizione di equilibrio $F_1 + F_2 + F_3 = P$; per ragioni di simmetria $F_1 = F_2$. Leviamo mentalmente i supporti sostituendoli con le forze F_1, F_2, F_3 uguali alle forze di reazione con cui i supporti premevano sulla trave. In più fissiamo la trave al centro, il che non influirà sulle deformazioni della trave. Utilizziamo le formule (80.9) e (80.18). Sotto l'azione della forza F_1 l'estremità sinistra della trave si solleverà, rispetto al livello del sostegno medio, di una lunghezza $y_1 = \frac{F_1}{3EI}\left(\frac{l}{2}\right)^3$. Sotto l'azione del proprio peso questa stessa estremità della trave si abbasserà di una lunghezza $y_2 = \frac{l}{2} \frac{1}{8EI}\left(\frac{l}{2}\right)^3$. La lunghezza del sollevamento risultante sarà quindi $y_1 - y_2$. Secondo l'enunciato del problema essa deve invece esse-

re uguale a λ. Si ottiene allora

$$F_1 = F_2 = \frac{3}{16}P + \frac{24EI\lambda}{l^3}, \quad F_3 = \frac{5}{8}P - \frac{48EI\lambda}{l^3}.$$

Quando i tre supporti si trovano allo stesso livello, si ha

$$F_1 = F_2 = \frac{3}{16}P, \quad F_3 = \frac{5}{8}P.$$

In questo caso la distribuzione del peso della trave tra i tre supporti non dipende dalle sue proprietà elastiche, benché se non si tenesse conto di queste ultime il problema sarebbe indeterminato (cfr. § 44). Questa indipendenza è dovuta al fatto che non abbiamo preso in considerazione le deformazioni dei supporti stessi.

4. Si risolva il problema precedente, con la differenza che il supporto C (fig. 215) non sia al centro tra i sostegni A e B (AC = a, $CB = b$).

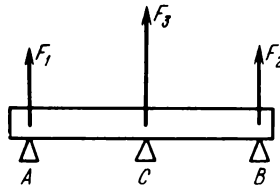



Fig. 215.

Soluzione. Mettiamo l'origine delle coordinate nella sezione neutra al di sopra del supporto A, orientando l'asse X a destra e l'asse Y verso il basso. Avendo scritto l'equazione di equilibrio per le parti AC ($x \leqslant a$) e CB ($x \geqslant a$) e integrandole con le condizioni $y = 0$ per $x = 0$ ed $x = a + b \equiv l$, nonché $y = \lambda$ per $x = a$, si ottiene

$$y = \frac{\lambda}{a}x + \frac{F_1 x}{6EI}(a^2 - x^2) - \frac{Px}{24EIl}(a^3 - x^3) \qquad (x \leqslant a),$$

$$y = \frac{\lambda}{b}(l - x) + \frac{F_2(l - x)}{6EI}[b^2 - (l - x)^2] - \frac{P(l - x)}{24EIl}[b^3 - (l - x)^3] \qquad (x \geqslant a).$$

Si deve porre come condizione che non ci sia rottura della trave nel punto C, cioè che le derivate prime di queste due espressioni coincidano nel punto $x = a$. Si deve infine prendere in considerazione il fatto che in condizioni di equilibrio la somma di tutte le forze esterne e dei momenti che agiscono sulla trave nel loro insieme, sono uguali a zero. Allora il risultato sarà il seguente:

$$F_1 = \frac{3EI}{a^2b}\lambda + \frac{P}{8}\frac{3a^2 + ab - b^2}{a(a + b)},$$

$$F_2 = \frac{3EI}{ab^2}\lambda + \frac{P}{8}\frac{3b^2 + ab - a^2}{b(a + b)},$$

$$F_3 = -\frac{3EI(a + b)}{a^2b^2}\lambda + \frac{P}{8}\frac{3ab + a^2 + b^2}{ab},$$

5. Un'asta cilindrica ed un tubo fatti di uno stesso materiale, aventi stessa massa e lunghezza, poggiano le loro estremità su due supporti incurvandosi sotto l'azione del proprio peso. Si calcoli il rapporto λ_1/λ_2 delle loro frecce di flessione, qualora il raggio dell'asta sia uguale a r e

il raggio esterno del tubo sia R.

Risposta. $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{2R^2 - r^2}{r^2}$

6. Se si posa un foglio di carta su due supporti, qesto s'incurva e cade sotto l'azione del proprio peso. Se invece lo si arrotola in forma di cilindro compatto o di tubo incollandone i bordi, allora i corpi risultanti si comportano come corpi solidi e si possono anche caricare senza che si incurvino in modo rilevante. Si spieghi questo comportamento dopo aver calcolato i momenti d'inerzia I_1, I_2, I_3 delle sezioni rette corrispondenti. La lunghezza del foglio (la distanza tra i supporti) è l, la larghezza è a, lo spessore è h.

Risposta. $I_1 = \frac{1}{12} ah^3$, $I_2 = \frac{1}{4\pi} (ah)^2$, $I_3 = \frac{1}{8\pi^2} a^3h$.

7. Da una trave di legno rotonda di diamentro D si deve ricavare una trave di sezione rettangolare tale che la flessione sia minima. Si calcoli la larghezza a e lo spessore b di tale trave.

Risposta. $a = \frac{D}{2}$, $b = \frac{\sqrt{3}}{2}$ D Il problema si riduce a studiare gli estremi dell'espressione ab^3 con la condizione supplementare $a^2 + b^2 = \text{cost}$.

§ 81. *La velocità di propagazione delle perturbazioni elastiche longitudinali nelle aste*

1. Se si produce una deformazione in un punto qualunque di un mezzo elastico, e subito dopo si mette fine alle cause che la producono, la deformazione non rimane al suo posto, ma si propaga nel mezzo in tutte le direzioni. In questi casi si dice che si produce nel mezzo una *propagazione di perturbazioni elastiche* o *onde elastiche*. Come esempio possono servire le onde sonore generate nei corpi solidi, liquidi o gassosi. Fissiamo, ad esempio, una lunga asta di ferro in posizione orizzontale. Se si dà un colpo di martello su un'estremità dell'asta compare una deformazione di compressione che si propaga a grande velocità lungo l'asta. Per scoprire una deformazione di tal genere infiliamo sull'asta una bobina e ne colleghiamo le estremità ad un oscillografo (fig. 216). L'asta di ferro è sempre magnetizza-

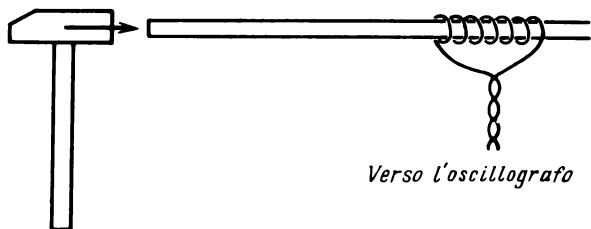



Fig. 216.

ta se non altro perché si trova nel campo magnetico della Terra. Finché non c'è perturbazione il flusso magnetico attraverso la bobina rimane costante e non vi passa alcuna corrente elettrica. Ma se la perturbazione raggiunge la parte dell'asta su cui è infilata la bobina il flusso magnetico che la attra-

versa varia. Si crea una corrente indotta, che viene registrata dall'oscillografo.

È assai difficile studiare la propagazione di una perturbazione lungo l'asta a causa della grande velocità e della piccolezza della perturbazione stessa. Ma si riesce a farlo utilizzando un modello costituito da una lunga molla elicoidale fatta di filo metallico dolce e sospesa orizzontalmente mediante alcuni fili. Se si dà un lieve colpo ad una delle estremità della molla, si vede la deformazione di compressione propagarsi lungo la molla. Se invece l'estremità della molla è tirata indietro, si crea una *deformazione di trazione* che si propaga anch'essa ad una velocità determinata lungo la molla.

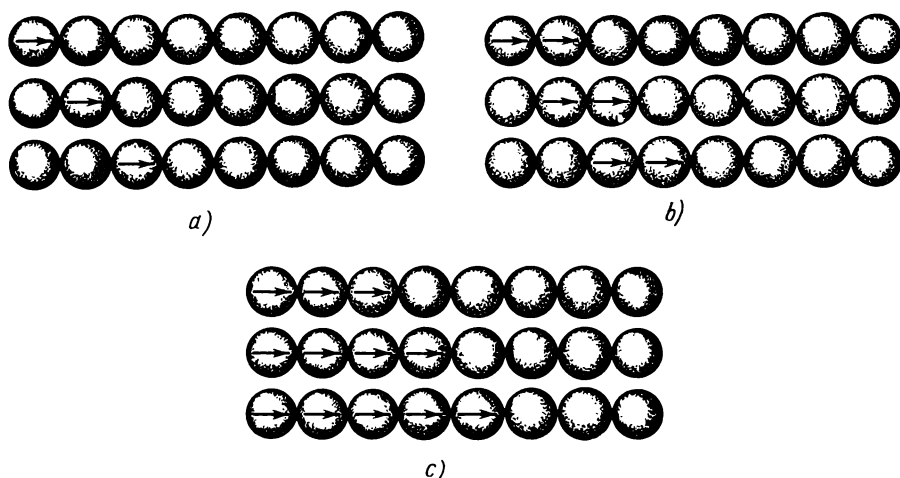



Fig. 217.

2. Un problema importante è quello della *velocità di propagazione delle perturbazioni elastiche*. Esaminiamo questo problema prima per le perturbazioni elastiche che si propagano lungo un'asta. Cominciamo da un modello. Sia data una fila rettilinea di palle solide, identiche e perfettamente elastiche in contatto tra di loro. Supponiamo che questa fila si prolunghi all'infinito verso destra (fig. 217). Il modello non è stato concepito per risolvere il problema della velocità di propagazione delle perturbazioni elastiche nelle aste, ma permette assai semplicemente di farsi un'idea sulla distribuzione della velocità di moto della materia nell'asta, qualora in essa si propaghi una perturbazione creata dall'azione di una forza determinata. Colpendo la prima palla, le si comunica una velocità v (fig. 217, *a*). La prima palla urtata colpisce la palla vicina. Nel caso di urto elastico (cfr. § 28) le palle semplicemente si scambiano le velocità: la prima palla si ferma e la seconda si mette in moto con la stessa velocità v. Poi la seconda palla trasmette il suo moto alla terza palla urtandola e si ferma, e così di seguito, il moto si trasmette da una palla all'altra. In questo caso compare una per-

turbazione che si propaga lungo la fila delle palle. Indichiamo con c la velocità di propagazione di questa perturbazione, osservando che non si deve confonderla con la velocità v della palla che è in moto nel momento considerato. Modifichiamo ora le condizioni dell'esperimento. Nell'istante in cui la prima palla si ferma dopo aver urtato la seconda, diamo di nuovo un colpo alla prima palla perché essa riacquisti la precedente velocità v. Allora, nel momento considerato, le due prime palle possiederanno la medesima velocità v. Quando la seconda palla percuote la terza e si ferma comunicandole la sua velocità, la prima palla percuoterà la seconda, fermandosi subito dopo. Quindi il moto sarà trasmesso dalle due prime palle alla seconda e alla terza. In seguito il moto sarà trasmesso alla terza ed alla quarta palla e così via. In breve, la fila delle palle sarà percorsa da una perturbazione dove in ogni istante due palle in mutuo contatto saranno in moto, mentre tutte le altre rimarranno a riposo (fig. 217, *b*). Supponiamo ora che ogni volta che la prima palla trasmette il suo moto alla seconda, questa riceva un'altra spinta che le comunica di nuovo la velocità v. Lo stato di questo moto è rappresentato schematicamente sulla figura 217, *c*. Tutte le palle situate a sinistra di certo punto si muovono alla medesima velocità v, mentre le palle che si trovano a destra di questo punto sono a riposo. Il punto divisorio stesso si sposta a destra con velocità c coinvolgendo così nel suo moto sempre nuove palle.

È evidente che la situazione non cambia se alle palle si sostituiscono dei cilindri elastici in contatto l'uno con l'altro lungo le basi (fig. 218). Fatta

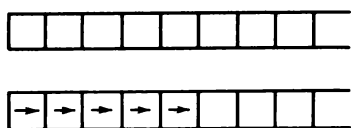



Fig. 218.

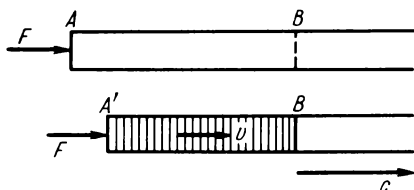



Fig. 219.

questa osservazione, si può passare ad un mezzo continuo. Ammettiamo che la lunghezza dei cilindri diminuisca e il loro numero cresca indefinitamente. Nello stesso tempo la frequenza degli urti ai quali è sottoposto il primo cilindro cresce sempre di più e la forza di ciascun urto decresce proporzionalmente. Al limite risulta un'asta continua alla cui estremità libera è applicata una forza costante F (fig. 219). Il nostro modello si differenzia da un'asta reale soltanto perché privo di resistenza alla rottura. Questo fatto non ha nessuna importanza, qualora si tratti della propagazione di una perturbazione di compressione poiché il modello è resistente alla compressione. Si potrebbe perfezionare il modello, introducendo tra i cilindri piccole molle di massa trascurabilmente piccola che li leghino tra di loro. Ma

non è necessario farlo, nel caso di perturbazioni di compressione. Lo stato di moto istantaneo dell'asta sorto sotto l'azione di una forza costante F può essere caratterizzato nel modo seguente. La materia dell'asta che si trova a sinistra di una certa frontiera B si muove ad una velocità costante v, mentre la materia che si trova a destra è a riposo. La stessa frontiera B si sposta a destra ad una velocità costante c. In acustica, di regola, ci si occupa di queste cosiddette *piccole perturbazioni*. In questo caso, la velocità v della materia è molto piccola rispetto alla velocità di propagazione della perturbazione c. La violazione di questa condizione avviene soltanto nel caso di grandi perturbazioni, dette *onde d'urto* che qui non esamineremo. Ci limiteremo infatti a studiare la propagazione di piccole perturbazioni.

3. Calcoliamo la velocità di propagazione nell'asta di *piccole perturbazioni longitudinali*, dovute all'azione di una forza di pressione costante F applicata in un certo istante alla sua estremità libera (fig. 219). Consideriamo inoltre questo momento come inizio del conteggio temporale. Nella parte perturbata dell'asta la materia si muove in ogni istante t ad una velocità costante v, mentre l'asta stessa nella parte considerata è deformata uniformemente. Se m è la massa della parte di asta deformata nell'istante t la sua quantità di moto nello stesso istante sarà mv. L'accrescimento $d(mv)$ della quantità di moto dell'asta nel tempo dt è uguale all'impulso $F\,dt$ della forza durante lo stesso intervallo di tempo. Questo dà

$$\frac{d(mv)}{dt} = F\ ^{1)}. \qquad (81.1)$$

Durante il tempo t la perturbazione percorre un tratto $l = ct$, la massa della parte perturbata dell'asta diventa allora uguale a $m = \rho Sct$, dove S è l'area della sezione retta dell'asta e ρ la sua densità. A rigore i valori delle grandezze S e ρ in questa espressione dovrebbero essere riferiti all'*asta non perturbata*. Tuttavia, nei limiti della precisione di calcolo qui adottata, nelle relazioni di questo tipo si può ignorare la differenza tra i valori ρ, S e le altre grandezze analoghe in stato perturbato o no. Non si può trascurare questa differenza soltanto nel caso di forti perturbazioni. Portando nella formula (81.1) $m = \rho Sct$, $F = PS$, dove P è la pressione della parte perturbata dell'asta, si ottiene

$$P = \rho c v. \qquad (81.2)$$

---

[1] Se si calcola la derivata, si ottiene

$$m\frac{dv}{dt} = F - v\frac{dm}{dt}. \qquad (81.1a)$$

Questa relazione è un caso particolare dell'equazione (21.2). È suffuciente notare che la parte perturbata dell'asta può essere considerata un corpo di massa variabile, con $v_{rel} = -v$. La formula (81.2) dedotta qui sotto può essere ottenuta anche dall'equazione (81.1a) osservando che nel caso considerato

$$\frac{dv}{dt} = 0, \quad \frac{dm}{dt} = S\rho c.$$

La pressione P è legata alla compressione relativa dell'asta dalla relazione $P = E\varepsilon$. Per calcolare ε si osserverà che, nell'istante t, l'estremità destra B della parte compressa dell'asta non è ancora riuscita a spostarsi, mentre la sua estremità sinistra libera A' era in moto durante il tempo t e si è spostata di una distanza vt. Ne risulta che rispetto alla sua lunghezza iniziale la parte perturbata dell'asta si accorcerà di $\Delta l = vt$. Quindi

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{v}{c}, \tag{81.3}$$

$$P = E\frac{v}{c}. \tag{81.4}$$

Eliminando P dalle formule (81.2) e (81.4), si ottiene

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

Questa formula definisce la velocità di propagazione delle perturbazioni elastiche nel caso considerato.

4. Il lavoro prodotto dalla forza F durante il tempo t è uguale a $A = Fvt = PS\varepsilon ct = P\varepsilon V$, dove V è il volume della parte perturbata dell'asta. L'energia potenziale accumulata durante la compressione è $U = 1/2P\varepsilon V$. Quindi $U = 1/2A$. Soltanto la metà del lavoro prodotto viene utilizzata per accrescere l'energia potenziale dell'asta, l'altra metà viene spesa per accrescerne l'energia cinetica. *In ogni istante l'inergia cinetica è uguale all'energia potenziale.* Dimostreremo nel paragrafo seguente che ogni piccola perturbazione che si propaghi *in un solo senso* possiede questa proprietà.

5. Se la forza F cessa di agire in un certo istante, nell'asta si crea una zona perturbata limitata da due parti. Per rendersene conto è sufficiente utilizzare il precedente modello della fila rettilinea di palle elastiche in contatto (fig. 217) e compiere quindi un passagio al limite ad un'asta continua. Impiegando lo stesso procedimento è facile rendersi conto che le due fron-

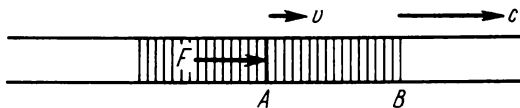



Fig. 220.

tiere della zona perturbata si devono propagare nello stesso senso ed alla stessa velocità. Quest'ultima è determinata dalla formula (81.5). Per dimostrarlo è sufficiente condurre nella parte perturbata una sezione retta qualunque (fig. 220) costituita sempre dalle stesse particelle per il periodo di tempo del nostro studio. È evidente che tale sezione si sposterà da sinistra a destra alla velocità v e che avrà ruolo di estremità libera dell'asta. La parte restante dell'asta deformata, situata a sinistra dalla sezione considerata,

esercita su questa sezione una forza di pressione $F = PS$. Possiamo perciò applicare anche alla parte dell'asta a destra di questa sezione il ragionamento precedente. Ne segue che la frontiera B della zona perturbata si sposterà da sinistra a destra alla velocità c definita dalla formula (81.5).

6. Il ragionamento non si modifica sensibilmente anche se invece della forza costante di pressione esercitata sull'estremità dell'asta si applica all'estremità dell'asta in un istante dato una forza di trazione costante. La sola differenza è che l'asta, invece che da una perturbazione di compressione, sarà percorsa da *una perturbazione di dilatazione*. La velocità di propagazione di tale perturbazione sarà come prima determinata dalla stessa formula (81.5). È evidente che in questo caso il modello della fila di palle elastiche in contatto non è utilizzabile, ma si può sostituirlo con un modello in cui le palle siano tenute in contatto tra di loro mediante molle infinitamente corte e di massa trascurabile.

7. Nei ragionamenti precedenti abbiamo ammesso che la perturbazione che si propaga nell'asta venisse provocata da una *forza costante* applicata in un certo istante alla sua estremità. È facile generalizzare al caso di una *forza variabile*. Riprendiamo il modello precedente di una fila di palle ela-

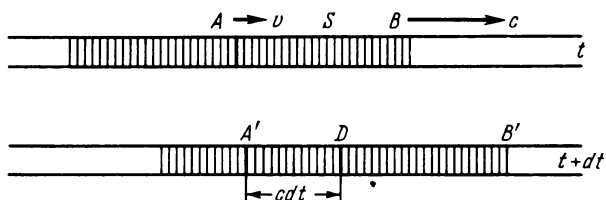



Fig. 221.

stiche collegate da molle di massa trascurabile. Se in istanti determinati si imprimono alla prima palla colpi di forza differenti, anche le velocità comunicate alla palla saranno diverse. Conformemente a ciò la distribuzione delle velocità può essere illustrata dai grafici della figura 217, con la differenza, però che la velocità v varia da una palla all'altra. Passando al limite di un'asta continua, otteniamo una perturbazione che si propaga in un senso determinato, dove, però, la velocità della materia varia da un punto all'altro. Può variare anche il senso della velocità v, qualora la forza applicata all'asta cambi di senso. La zona perturbata sarà limitata su due lati se la forza di perturbazione agisce per un tempo limitato. Dimostriamo allora che le formule (81.2), (81.3) e, quindi la formula (81.5), rimangono valide anche nel caso della perturbazione considerata. Sulla figura 221, la zona perturbata è tratteggiata e rappresentata in due istanti infinitamente vicini t e $t + dt$. Nel periodo di tempo dt la zona perturbata si sposta di una distanza $c\ dt$. Consideriamo nella zona perturbata un piano qualunque A costituito dalle stesse particelle di materia. Questo piano si sposta da sinistra a destra alla velocità v che è quella delle particelle del piano A nell'istante t.

Dopo un tempo dt, le particelle si sono spostate nella posizione A' dopo aver percorso il breve tratto $v\,dt$, che può essere trascurato. La pertubazione stessa si sposta di una distanza assai più grande uguale a $c\,dt$. Calcoliamo l'incremento della quantità di moto della materia situata a destra del piano A. La perturbazione si sposta dal punto A al punto D percorrendo il tratto $c\,dt$. Il moto della materia situata a destra di D sarà nell'istante $t + dt$ esattamente lo stesso di quello che nell'istante t aveva la sostanza situata a destra di A. È evidente che l'incremento cercato della quantità di moto deve essere uguale alla quantità di moto della materia compresa tra i piani A' e D, cioè uguale a $Sc\,dt\,\rho v$. Questo deve essere uguale all'impulso delle forze di pressione $PS\,dt$ che agiscono nel piano A nel periodo di tempo dt. Uguagliando le due espressioni, si ottiene la formula (81.2). È facile anche ottenere la formula (81.3). Consideriamo il tratto infinitesimo perturbato $A'D$ (fig. 221). La sua lunghezza iniziale era uguale a $l = c\,dt$. Ma dato che la perturbazione è arrivata nel piano A' prima che nel piano D di tempo dt il tratto percorso dalla materia legata al piano A', sarà di $v\,dt$ più lungo del tratto percorso dalla materia legata al piano D. Ne risulta che l'accorciamento del tratto $A'D$ causato dalla sua deformazione è $\Delta l = v\,dt$. Dividendo Δl per l si ottiene la formula (81.3).

La densità di energia cinetica nella zona perturbata è $w_{cin} = 1/2\rho v^2$. La densità di energia potenziale $w_{pot} = 1/2E\varepsilon^2 = \frac{E}{2}\frac{v^2}{c^2}$. Portando in quest'ultima equazione l'espressione per c, tratta dalla formula (81.5), si ottiene $w_{pot} = 1/2\rho v^2$. Quindi $w_{cin} = w_{pot}$. *In ogni perturbazione elastica progressiva, cioè in ogni perturbazione che si propaga in una direzione determinata, l'energia totale si distribuisce ugualmente tra energia potenziale ed energia cinetica.*

§ 82. *Applicazione del principio di sovrapposizione*

1. Abbiamo già utilizzato il *principio di sovrapposizione in statica*. Anche la *propagazione delle piccole perturbazioni* ubbidisce a questo principio. Si consideri una perturbazione che si propaghi in un mezzo dato. Indichiamo con $s_1(r_0, t)$ lo spostamento di una particella del mezzo perturbato dalla sua posizione di equilibrio. Il vettore r_0 è il raggio vettore del punto considerato in stato di riposo, cioè nell'istante che precede la comparsa della perturbazione. Sia $s_2(r_0, t)$ lo spostamento della particella dovuto ad una seconda perturbazione nello stesso mezzo. Quale sarà la perturbazione del mezzo se si provocano contemporaneamente ambedue le perturbazioni? Il principio di sovrapposizione afferma che lo spostamento risultante sarà

$$s(r_0, t) = s_1(r_0, t) + s_2(r_0, t).$$

Questo significa che *ogni perturbazione esistente nel mezzo non influenza la propagazione di un'altra perturbazione. Ciascuna perturbazione si pro-*

paga come se non ce ne fossero altre. Come esempio, possiamo prendere le onde sulla superficie dell'acqua. Se si gettano due sassi nell'acqua calma di uno stagno, dai punti d'impatto si propagheranno delle onde circolari. Là dove queste si sovrappongono compare un moto risultante assai complesso. Ma dopo aver superato la zona di sovrapposizione, ciascuna delle onde rimane esattamente la stessa di prima, come se non ci fosse stata un'altra onda ed essa fosse unica. Il principio di sovrapposizione è naturalmente valido non soltanto per due perturbazioni, ma anche per un numero qualunque di perturbazioni che si sovrappongano le une alle altre. Il principio formulato qui dovrebbe essere chiamato *principio di sovrapposizione dei piccoli movimenti (dei piccoli spostamenti).* Tuttavia è valido anche per le *velocità delle particelle*, poiché le velocità si ottengono mediante derivazione degli spostamenti rispetto al tempo. Esso è ugualmente valido per gli *sforzi elastici*, poiché questi ultimi sono funzioni lineari delle deformazioni, cioè degli spostamenti. Si può considerare il principio di sovrapposizione un fatto sperimentale. Esso è anche la conseguenza della *linearità delle equazioni* (rispetto agli spostamenti) che descrivono le piccole perturbazioni. *Non è valido quando, le perturbazioni sono forti.*

2. Nel paragrafo precedente è stato dimostrato che l'energia totale di una *perturbazione mobile* si distribuisce ugualmente tra energia potenziale ed energia cinetica. L'applicazione del principio di sovrapposizione dimostra ancor più che questo risultato è inevitabile. Per chiarezza consideriamo le perturbazioni che si propagano lungo una sbarra, sebbene il nostro ragionamento abbia carattere generale. Supponiamo che in un istante iniziale una zona della sbarra sia deformata, mentre tutta la materia è ancora in stato di riposo. L'energia iniziale della sbarra è dunque energia puramente potenziale. Indichiamola con E. Se si sopprimono le forze esterne che hanno provocato la deformazione iniziale, due deformazioni provenienti dalla zona deformata si propagheranno lungo la sbarra l'una in senso opposto all'altra. Se la perturbazione iniziale era simmetrica, è evidente che l'energia totale E si dividerà ugualmente tra le due perturbazioni. Dimostriamo ora che in ciascuna di queste due perturbazioni mobili l'energia cinetica è uguale all'energia potenziale. A questo scopo consideriamo le due perturbazioni nell'istante iniziale in cui esse si sovrappongono completamente. Se P_1 e P_2 sono le pressioni e v_1 e v_2 sono le velocità della materia nelle due perturbazioni, secondo il principio di sovrapposizioni si ha nell'istante iniziale $P_1 + P_2 = P$, $v_1 + v_2 = 0$, dove P è la pressione nella zona perturbata nello stesso istante. Per simmetria $P_1 = P_2 = 1/2\,P$. La stessa relazione tra le pressioni si conserverà in ogni istante ulteriore per i punti corrispondenti. In particolare essa rimarrà valida, anche quando le due perturbazioni si separeranno, cioè cesseranno di sovrapporsi l'una all'altra. Sarà opportuno allora parlare di una suddivisione dell'energia totale tra le due perturbazioni generate nella zona della perturbazione iniziale. Dato che l'energia potenziale è proporzionale al quadrato della pressione, il suo valore sarà uguale a $E/4$ in ciascuna delle perturbazioni mobili, quindi l'energia po-

tenziale delle due perturbazioni sarà uguale a $E/2$. Per la conservazione dell'energia è indispensabile che l'altra metà dell'energia totale si trasformi in cinetica. È evidente che anche l'energia cinetica si distribuirà ugualmente tra le due perturbazioni mobili. Quindi in ogni perturbazione mobile le energie cinetica e potenziale saranno identiche ed uguali a $E/4$.

3. Essendo il ragionamento appena riportato fondato su considerazioni di simmetria non sorgono obiezioni, se la distribuzione iniziale della deformazione possiede essa stessa la simmetria richiesta. Il ragionamento rimane valido anche se questa ultima condizione non è rispettata. Per convincersene basta suddividere mentalmente la zona perturbata iniziale in zone infinitesime. All'interno di ciascuna di queste zone infintesime la pressione potrà essere considerata costante e la sua distribuzione potrà essere rappresentata sotto forma di un rettangolo infinitamente stretto. Quindi in ciascuna di queste zone infinitesime perturbate, la distribuzione iniziale della pressione

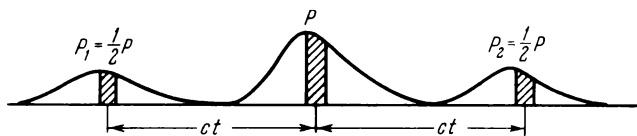



Fig. 222.

avrà la simmetria richiesta. Secondo il principio di sovrapposizione, le perturbazioni di ciascuna zona infinitesima non dipendono dal fatto che siano o no perturbate altre zone infinitesime. Possiamo, quindi, pienamente applicare a queste perturbazioni le considerazioni su esposte. Nel periodo di tempo t le perturbazioni provenienti dalla zona infinitesima considerata si propagheranno ad una distanza ct. Se le perturbazioni generate in tutta la zona perturbata non si sovrappongono più nell'istante t, non si sovrapporranno più neanche le perturbazioni delle differenti zone infinitesime perturbate (fig. 222). Per loro rimane valida la relazione $P_1 = P_2 = 1/2\,P$. Ne segue che *in ogni perturbazione mobile proveniente dalla zona perturbata sono uguali non soltanto le energie potenziali e cinetiche totali, ma anche le loro densità.*

4. Nel ragionamento fatto si supponeva che le due perturbazioni mobili avessero origine in una zona deformata inizialmente a riposo. Lo stesso ragionamento potrebbe essere utilizzato per le perturbazioni provenienti da zone non deformate, alle cui particelle sono state comunicate nell'istante iniziale delle velocità distribuite arbitrariamente in queste zone.

5. Dunque, *affinché una perturbazione sia mobile, bisogna che siano uguali le densità delle sue energie cinetiche e potenziali.* Il problema della direzione di propagazione di una perturbazione si risolve facilmente ricorrendo a considerazioni energetiche. Sia, ad esempio, una zona perturbata AB in propagazione da sinistra a destra (fig. 221). Conduciamo in quest'ultima una sezione arbitraria S. Perché la perturbazione si sposti a destra, bisogna che la parte AS della sbarra effettui un *lavoro positivo* sulla parte SB, cioè si deve avere $Pv > 0$, se si conviene di considerare positiva la velo-

cità delle particelle della sbarra dirette a destra. Se $v > 0$, si deve avere $P > 0$, cioè lo sforzo che si esercita sulla sezione S è *una pressione*. Se invece $v < 0$, si deve avere $P < 0$, cioè lo sforzo nella sezione S si riduce ad una *tensione* $T = -P$. Perché la perturbazione si propaghi da destra a sinistra bisogna che $Pv < 0$.

Se l'uguaglianza tra le energie potenziale e cinetica non figura in una perturbazione, questa si dividerà in *due perturbazioni* che si propagheranno in senso opposto. Nel caso generale queste perturbazioni porteranno energie differenti. Se, ad esempio, in ogni punto della zona perturbata iniziale $Pv > 0$, l'energia portata verso destra sarà più grande di quella portata verso sinistra. Se $Pv < 0$ la correlazione tra queste due energie sarà inversa. Se invece $Pv = 0$, le due perturbazioni porteranno energie uguali.

6. Dalle considerazioni esposte deriva che in un'onda di compressione mobile le particelle della sbarra si muovono *nello stesso senso* dello spostamento della perturbazione. Se la perturbazione ha carattere di trazione, le direzioni *sono opposte*. Supponiamo dapprima che la perturbazione sia una compressione che si propaghi lungo la sbarra da sinistra a destra. Esaminiamo ciò che si produrrà quando essa avrà raggiunto l'estremità destra della sbarra. Supponiamo che questa estremità sia libera, cioè non fissata. Allora l'arrivo della perturbazione comunicherà alle particelle della sbarra delle velocità dirette nello stesso senso, cioè a destra. Dato che l'estremità della sbarra è libera, queste particelle potranno fermarsi soltanto se sottoposte a forze dirette a sinistra. Per questo bisogna che l'estremità destra della sbarra risulti in tensione. Questo significa che all'estremità della sbarra la compressione si trasforma in una *trazione* che a sua volta provocherà nella sbarra una perturbazione di distensione che si propagherà verso sinistra (fig. 223). Tutto procede come se in un certo istante l'estremità libera

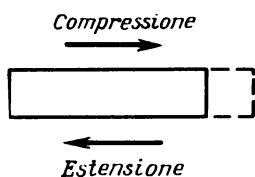
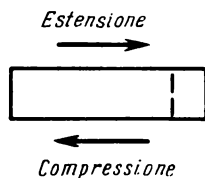



Fig. 223. Fig. 224.

della sbarra fosse sottoposta ad una trazione e si creasse una deformazione di distensione. Nella perturbazione di distensione propagantesi verso sinistra le velocità delle particelle del mezzo devono essere dirette in senso opposto a quello della perturbazione. Le particelle acquistano queste velocità sotto l'azione delle forze di tensione applicate alle particelle dalle zone situate a destra. Vediamo così che *la perturbazione di compressione si riflette sull'estremità libera della sbarra e si trasforma in una perturbazione di distensione. Anche la perturbazione di distensione si comporta in modo analogo. Essa si riflette sull'estremità libera della sbarra e si ritrasforma in perturbazione di compressione* (fig. 224). Nei due casi il segno della deforma-

zione è opposto, mentre il segno della velocità v delle particelle di materia non cambia.

In altro modo si comporta la perturbazione nel caso di riflessione dall'estremità fissa della sbarra. Nel caso generale la perturbazione si suddivide in due perturbazioni: una si propaga in senso inverso come perturbazione riflessa, mentre l'altra passa nel mezzo che è in contatto con l'estremità fissa della sbarra. Soltanto nel caso limite, in cui questo mezzo sia infinitamente rigido, la perturbazione è riflessa per intero. Consideriamo questo caso limite. Quando la perturbazione raggiunge la frontiera con questo mezzo, la compressione (o la distensione) non si trasforma, poiché l'estremità della sbarra è fissa e non può spostarsi. Ma le forze che il mezzo esercita sull'estremità con cui è in contatto determinano l'inversione di senso delle velocità delle particelle. Nel caso della riflessione i segni delle perturbazioni si conservano, mentre si inverte il senso delle velocità. Quindi, una perturbazione di compressione si riflette sotto forma di perturbazione di compressione, mentre una perturbazione di distensione si riflette sotto forma di perturbazione di distensione.

Problemi

1. Si crei in una sbarra elastica una deformazione di compressione iniziale, tale che le velocità delle particelle della zona deformata siano tutte orientate nel medesimo senso (a destra, per esempio) e che in ogni punto la densità dell'energia potenziale sia α volte più grande della densità dell'energia cinetica. Si calcolino le parti di energia iniziale trasportate rispettivamente dalla perturbazione in propagazione a destra e da quella in propagazione a sinistra.

Soluzione. Per semplificare introduciamo unità tali da esprimere le densità delle energie cinetica e potenziale con le formule $w_{cin} = v^2$, $w_{pot} = P^2$. Rappresentiamo i valori iniziali di P e v nella forma

$$P = P_1 + P_2, \quad v = v_1 + v_2.$$

Supponiamo che ciascuna delle perturbazioni iniziali P_1, v_1 e P_2, v_2 generi una perturbazione che si propaghi in uno solo senso. Allora si avrà $P_1^2 = v_1^2$, $P_2^2 = v_2^2$. Se la prima perturbazione si propaga a destra e la seconda a sinistra, si avrà $P_1 v_1 > 0$, $P_2 v_2 < 0$. Si ottiene quindi

$$P_1 = v_1, \quad P_2 = -v_2$$

e poi

$$P_1 = v_1 = \frac{P + v}{2}, \quad P_2 = -v_2 = \frac{P - v}{2}.$$

Il rapporto delle energie trasportate dalle perturbazioni è uguale a

$$\frac{E_1}{E_2} = \left(\frac{P_1}{P_2}\right)^2 = \left(\frac{P + v}{P - v}\right)^2 = \frac{1 + 2\frac{P}{v} + \left(\frac{P}{v}\right)^2}{1 - 2\frac{P}{v} + \left(\frac{P}{v}\right)^2}$$

ossia

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{1 + 2\sqrt{\alpha} + \alpha}{1 - 2\sqrt{\alpha} + \alpha} = \left(\frac{\sqrt{\alpha} + 1}{\sqrt{\alpha} - 1}\right)^2.$$

2. Un cilindro di acciaio di lunghezza $l = 10$ cm, in moto lungo il suo asse di rivoluzione alla velocità v, urta l'estremità di un altro cilindro immobile identico al primo così che l'asse rappresenti un prolungamento dell'asse del cilindro mobile. Considerando le perturbazioni elastiche generate dall'urto, si determini il tempo dell'urto fra i due cilindri. A quali valori della velocità v compaiono le deformazioni plastiche dei cilindri e a quali i cilindri saranno distrutti? Per l'acciaio $E = 2 \cdot 10^{12}$ dine/cm^2, $\rho = 7,8$ g/cm^3, limite di elasticità $P_0 = 2 \cdot 10^9$ dine/cm^2.

Soluzione. Nell'istante in cui i cilindri entrano in contatto la velocità del cilindro A è uguale a v, il cilindro B è a riposo e nessuno dei due cilindri è deformato (fig. 225, posizione 1). Subito dopo la collisione, dal punto d'urto cominceranno a propagarsi in ambo i sensi le onde di

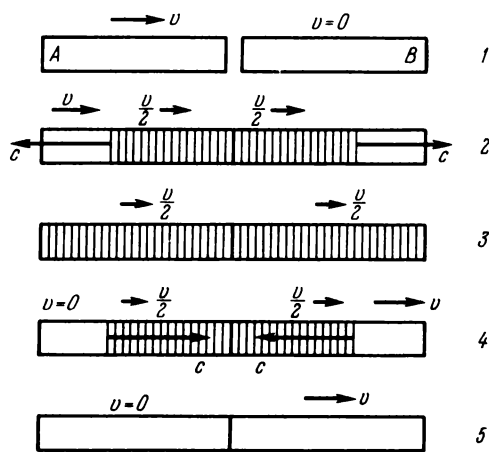



Fig. 225.

compressione ad una velocità c rispetto ai cilindri (posizione 2). Nella zona di compressione le particelle dei due cilindri si muovono nello stesso senso con velocità $v/2$. Ciò deriva dalla legge di conservazione dell'impulso. Quando le perturbazioni arriveranno alle estremità dei cilindri, tutta la materia sarà in moto con la stessa velocità $v/2$ (posizione 3). La massa di materia in moto raddoppia, mentre la velocità si dimezza, quindi, la legge di conservazione dell'impulso è rispettata. In confronto al suo valore iniziale, l'energia cinetica si è dimezzata: metà dell'energia si è infatti trasformata in energia potenziale — i due cilindri sono uniformemente compressi e uniti l'uno all'altro. Da qui comincia la riflessione delle perturbazioni dalle estremità libere dei cilindri (posizione 4). Le perturbazioni di compressione si trasformano in perturbazioni di distensione, così che la pressione esercitata sull'estremità sinistra dalle zone adiacenti ferma le particelle, mentre a destra le accelera. A sinistra compare una zona non deformata in cui la sostanza è a riposo, mentre a destra la sostanza si sposta alla velocità v. Per convincersene prendiamo un sistema di riferimento che si sposti a destra ad una velocità $v/2$. Nell'istante iniziale (posizione 3) i due cilindri sono uniformemente compressi e sono a riposo. Per riflessione sulle due estremità appaiono delle perturbazioni di distensione: dall'estremità sinistra la rarefazione si propagherà a destra alla velocità c, e dall'estremità destra si propagherà a sinistra alla stessa velocità. In prossimità delle estremità libere dei cilindri compaiono delle zone non deformate. Le velocità della materia in queste zone (rispetto al sistema di riferimento in moto) devono essere dirette verso l'esterno dei cilindri, poiché il moto compare sotto l'azione di forze di compressione dirette nello stesso senso. Per simmetria le velocità della materia nelle due zone non deformate sono uguali in valore assoluto, ma sono dirette in senso opposto. Indichiamo con v' la velocità della materia nella regione non deformata situata a de-

stra (è evidente che essa è positiva). La velocità della materia nella zona sinistra non deformata sarà $-v'$. Per calcolare v', passiamo di nuovo nel sistema di riferimento fisso. Rispetto a questo sistema di riferimento fisso, le velocità della materia nelle due regioni non deformate saranno $v/2 - v'$ e $v/2 + v'$. Quando le perturbazioni si incontreranno nel punto di contatto dei cilindri, le deformazioni spariranno e i due cilindri si muoveranno insieme alla velocità $v/2 - v'$ e $v/2 + v'$. L'energia cinetica di questo moto sarà

$$\frac{m}{2}\left(\frac{v}{2} - v'\right)^2 + \frac{m}{2}\left(\frac{v}{2} + v'\right)^2 = \frac{mv^2}{4} + mv'^2.$$

Ma questa quantità deve essere uguale a $mv^2/2$. Ne consegue che $v'^2 = v^2/4$, ed $v' = v/2$. Quindi, quando le due onde di rarefazione s'incontreranno al centro, il primo cilindro si fermerà e non sarà deformato, mentre il secondo, anche lui non deformato, si muoverà a destra alla velocità v (posizione 5). Come previsto, i cilindri si sono scambiati le velocità. A partire da quest'istante il contatto tra i cilindri cesserà. Si considera, quindi, tempo d'urto tra i due cilindri l'intervallo che la perturbazione impiega a percorrere un'andata e ritorno lungo uno qualunque degli assi dei cilindri

$$\tau_{\text{urto}} = \frac{2l}{c} = 2l\sqrt{\frac{\rho}{E}} \approx 4 \cdot 10^{-5}\ \text{s}.$$

Calcoliamo ora la compressione relativa dei cilindri durante la deformazione. Dopo il contatto, l'estremità sinistra del cilindro B ha acquistato una velocità $v/2$, mentre l'estremità destra è rimasta a riposo per un tempo uguale a $1/2\,\tau_{urto}$. Nel corso di questo tempo l'estremità sinistra si è spostata di una distanza $x = 1/4\,\tau_{\text{urto}}v$. La compressione relativa del cilindro sarà quindi

$$\frac{x}{l} = \frac{v}{2c},$$

e la pressione corrispondente $P = E\dfrac{v}{2c}$. Perché non si creino deformazioni plastiche o distruzioni bisogna che $P < P_0$, cioè

$$v < \frac{2cP_0}{E} = \frac{2P_0}{\sqrt{E\rho}} \approx 10\text{m/s}.$$

§ 83. Velocità di propagazione delle perturbazioni longitudinali e trasversali in un mezzo illimitato

1. Abbiamo chiamato le perturbazioni considerate nel § 81 deformazioni longitudinali. Non è del tutto esatto, poiché ogni deformazione di una sbarra è accompagnata da un aumento delle sue dimensioni trasversali. Nel caso di una deformazione di trazione, le dimensioni trasversali della sbarra diminuiscono. Per caratterizzare quantitativamente questi fenomeni è stato introdotto il coefficiente di Poisson. Nella sbarra infatti le particelle non si spostano in modo rigorosamente parallelo ad essa: accanto alla componente longitudinale delle velocità, possiedono una *componente trasversale*. Per rendere una perturbazione puramente longitudinale, bisogna privare le

particelle della sbarra della possibilità di spostarsi trasversalmente, cioè fissarne la superficie laterale della sbarra. Un tale caso si realizza quando una perturbazione longitudinale si propaga in un mezzo illimitato. Se in tale mezzo tracciamo mentalmente una «sbarra» qualunque, il cui asse sia parallelo alla direzione di propagazione della perturbazione (che nel caso di una perturbazione longitudinale è parallelo allo spostamento delle particelle) le particelle situate sulla superficie laterale della sbarra e bloccate dalle particelle del mezzo non potranno spostarsi trasversalmente. Tutti gli spostamenti saranno allora paralleli all'asse della «sbarra». I ragionamenti dei paragrafi precedenti possono essere utilizzati anche nel caso considerato. Si deve soltanto sostituire al modulo di Young E *modulo di trazione uniassiale* E'. Quindi la velocità di propagazione delle perturbazioni longitudinali in un mezzo illimitato si esprime mediante l'espressione

$$c_{\parallel} = \sqrt{\frac{E'}{\rho}} \tag{83.1}$$

ossia secondo le relazioni (77.9) e (78.5)

$$c_{\parallel} = \sqrt{\frac{1-\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)}\frac{E}{\rho}} = \sqrt{\frac{K + 4/3G}{\rho}}. \tag{83.2}$$

2. In un mezzo illimitato solido, accanto a perturbazioni longitudinali, possono propagarsi *perturbazioni trasversali.* Si chiamano così le perturbazioni in cui le particelle del mezzo si spostano *perpendicolarmente* alla direzione di propagazione della perturbazione. Si può calcolare la velocità di propagazione delle perturbazioni trasversali esattamente come è stato fatto per le perturbazioni longitudinali. Per questo tracciamo mentalmente nel mezzo considerato una «sbarra» qualunque il cui asse sia parallelo alla direzione di propagazione della perturbazione, cioè perpendicolare agli spostamenti delle particelle (fig. 226). Se nell'istante iniziale si applica alla base di

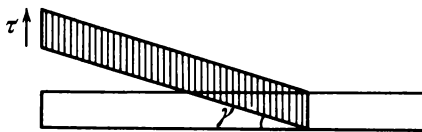



Fig. 226.

questa «sbarra» uno sforzo tangenziale costante τ, la sbarra subirà una *deformazione di scorrimento* che si propagherà ad una velocità $c_{\perp}$. Ragionando allo stesso modo che nel § 81, si scopre che lo sforzo tangenziale τ è legato alla velocità $c_{\perp}$ e alla velocità v delle particelle della sbarra mediante la relazione

$$\tau = \rho c_{\perp} v. \tag{83.3}$$

Qui $\tau = G\gamma$, dove γ è l'angolo di scorrimento facilmente calcolabile nel modo seguente. Nel periodo di tempo t l'estremità libera della sbarra si sposta di una distanza vt, mentre la perturbazione stessa percorre un tratto $c_{\perp}t$. Dato che $v \ll c_{\perp}$, ne deriva che

$$\gamma = \frac{v}{c_{\perp}} \qquad (83.4)$$

da cui

$$c_{\perp} = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$$

3. Se le perturbazioni trasversali sono piccole, soddisfano il principio di sovrapposizione. Quindi in ogni perturbazione trasversale, che si propaghi in una direzione determinata, sono uguali le densità delle energie cinetiche e potenziali. Si arriva a determinare la direzione di propagazione delle perturbazioni trasversali ricorrendo a considerazioni energetiche, esattamente come nel caso delle perturbazioni longitudinali.

4. Poiché $K > 0$, dalle formule (83.2) e (83.5) segue che

$$c_{\parallel} > c_{\perp}. \qquad (83.6)$$

Ne deriva che, in generale, ogni perturbazione in un mezzo illimitato si divide in una perturbazione trasversale ed in una perturbazione longitudinale, quest'ultima raggiungerà il punto di osservazione più presto della trasversale. La necessità di questa suddivisione deriva direttamente dal principio di sovrapposizione delle piccole perturbazioni, secondo cui le perturbazioni longitudinali e trasversali devono propagarsi *indipendentemente le une dalle altre.*

Calcoliamo, ad esempio, le velocità di propagazione delle perturbazioni elastiche nel ferro o nell'acciaio. Dagli esperimenti compiuti risulta che $E = 21{,}2 \cdot 10^{10}\,\mathrm{N/m^2}$, $G = 8{,}2 \cdot 10^{10}\,\mathrm{N/m^2}$, $\mu = 0{,}29$, $\rho = 7{,}8 \cdot 10^3\,\mathrm{kg/m^3}$. Utilizzando questi dati si ottiene

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} = 5{,}2 \cdot 10^3\ \mathrm{m/s},$$

$$c_{\parallel} = c\sqrt{\frac{1-\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)}} = 6 \cdot 10^3\ \mathrm{m/s},$$

$$c_{\perp} = \sqrt{\frac{G}{\rho}} = 3{,}4 \cdot 10^3\ \mathrm{m/s}.$$

Problemi

1. Si dimostri che la velocità di propagazione delle oscillazioni di torsione lungo un'asta coincide con la velocità di propagazione $c_{\perp}$ delle perturbazioni trasversali.

Soluzione. Per generalizzare supponiamo che l'asta si presenti sotto forma di un tubo cilindrico di raggio interno r_1 e di raggio esterno r_2. Siano applicate alla base del tubo sforzi tan-

genziali costanti tali da produrre un momento di rotazione M rispetto all'asse geometrico del tubo. Nel tubo apparirà allora una deformazione di torsione la cui velocità di propagazione indichiamo con c. Nella zona perturbata la materia ruoterà ad una velolcità angolare costante ω. Se la durata d'azione del momento M è t, si ha evidentemente

$$Mt = I\omega,$$

dove I è il momento d'inerzia della zona perturbata. D'altra parte, $M = f\varphi = f\omega t$. Da qui $ft^2 = I$. Portandovi $I = 1/2\pi\rho l(r_2^4 - r_1^4)$, $t = l/c$ (l è la lunghezza della zona perturbata) ed utilizzando la relazione (79.4) si ottiene

$$\rho c^2 = G.$$

2. Si determini l'espressione della velocità delle perturbazioni sonore longitudinali che si propagano in una piastra sottile, illimitata e bidimensionale. Si dimostri che questa velocità è più piccola di quella delle perturbazioni longitudinali in un mezzo illimitato (si veda il problema nel § 77).

Risposta. $c = \sqrt{\dfrac{E}{\rho(1 - \mu^2)}}$.

§ 84. *Velocità di propagazione delle perturbazioni trasversali in una corda tesa*

1. Le perturbazioni trasversali si propagano nei corpi solidi grazie alla presenza, in questi, di elasticità trasversale, cioè della capacità di opporsi ad ogni cambiamento di forma senza modificazioni volumetriche. L'elasticità trasversale può essere creata artificialmente nei corpi che non la possiedono. Serva da esempio una corda flessibile. Se la corda non è tesa, non può trasmettere perturbazioni trasversali. Se si fissa una delle estremità della corda e si sospende un peso all'altra estremità facendo passare la corda sopra una puleggia, la corda sarà sottoposta ad una tensione costante che indichiamo con T. Tale corda possiede *elasticità di forma* e può trasmettere le perturbazioni trasversali. La velocità di queste perturbazioni può essere calcolata secondo la formula (83.5). Bisogna però determinare quale sia la grandezza che ha il ruolo di modulo di scorrimento G nella corda tesa. Consideriamo un piccolo segmento AB di una corda tesa ed incurvata

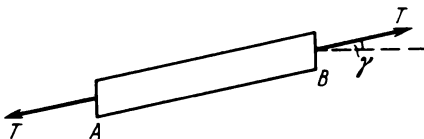



Fig. 227.

(fig. 227). Supponiamo che le deformazioni della corda in tensione, dovute agli scorrimenti trasversali delle sue particelle, siano piccole. Si possono allora ignorare le variazioni di grandezza della tensione T, determinate dalla curvatura della corda dovute alle piccole deformazioni. In questa approssimazione la tensione T applicata alle estremità del segmento AB lungo

il suo asse è la stessa. Le componenti tangenzialli alla base del segmento AB sono uguali a $T \sin\gamma \approx T\gamma$. Quindi le basi del segmento AB sono sottoposte agli sforzi tangenziali $\tau = (T/S)\gamma$, dove S è l'area della sezione trasversale della corda. Si può considerare la deformazione del segmento AB uno scorrimento sotto l'azione di questi sforzi tangenziali. Confrontando quindi l'espresione precedente con la formula $\tau = G\gamma$ si ottiene che il ruolo di modulo di scorrimento lo svolge la grandezza $G = T/S$. Portando quest'espressione nella formula (83.5) e introducendo la notazione $\delta = \rho S$, si ottiene per la velocità di propagazione delle perturbazioni trasversali nella corda

$$c = \sqrt{\frac{T}{\delta}}. \qquad (84.1)$$

La grandezza δ è uguale alla massa per l'unità di lunghezza della corda. Essa si chiama *densità lineare della corda.*

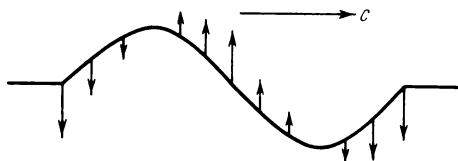



Fig. 228.

2. Se in una corda la perturbazione si propaga in una sola direzione, le densità delle energie cinetica e potenziale saranno in tale perturbazione uguali in ogni istante. La direzione di propagazione di una perturbazione può essere determinata mediante considerazioni energetiche. Perciò oltre la forma della corda bisogna conoscere la velocità di ognisuo punto in un istante dato. La perturbazione rappresentata, ad esempio, sulla figura 228 si propaga da sinistra a destra. Le frecce verticali rappresentano le velocità delle particelle della corda nell'istante considerato. Se si conduce mentalmente nella corda una sezione trasversale, l'angolo formato dalla forza di tensione che agisce sulla parte destra della corda e dalla sua velocità nella sezione considerata sarà acuto. Al contrario, la forza di tensione che agisce sulla parte sinistra della corda forma con la velocità corrispondente un angolo ottuso. Ciò significa che la forza di tensione effettua nella parte destra della corda un lavoro positivo e nella parte sinistra uno negativo. È per questa ragione che la perturbazione si propaga a destra. Se si inverte la direzione delle velocità di tutte le particelle della corda, la perturbazione si propagherà a sinistra.

3. Si può dedurre la formula (84.1) con un procedimento assai efficace. Supponiamo che una corda sia percorsa da una perturbazione trasversale in propagazione verso destra, ad esempio alla velocità c (fig. 228). Consideriamo il fenomeno in un sistema di riferimento in moto uniforme verso de-

stra con la stessa velocità c. In questo sistema di riferimento la perturbazione sarà immobile, mentre la corda si sposterà per intero a sinistra alla velocità c. Nella zona perturbata a questo moto si sovrappongono piccole oscillazioni trasversali delle particelle della corda. L'asse della corda è la traiettoria delle particelle mobili che si trovano su quest'asse. Se si infila debitamente sulla corda un tubo cilindrico convenientemente incurvato per riprodurre la forma della corda nell'istante considerato, che è immobile nel sistema di riferimento, la presenza di tale tubo non influenzerà in nessun modo il moto della corda. La corda scivolerà semplicemente nell'interno del tubo senza toccarne le pareti, se è tirata ad una velocità ben determinata c. Se le perturbazioni sono piccole, le velocità v dei moti trasversali delle particelle della corda saranno piccole rispetto alla velocità c. Nella formula della velocità totale $\sqrt{c^2 + v^2}$ delle particelle si può allora ignorare il quadrato della piccola quantità v. In questa approssimazione la velocità totale delle particelle della corda viene considerata uguale a c su tutta la lunghezza della corda. Però, nella zona del tubo in cui la corda è ricurva, le sue particelle hanno un moto accelerato. Le loro accelerazioni sono normali alla traiettoria e sono definite dall'espressione $a = c^2/R$. Per creare tali accelerazioni è necessaria una forza che agisca normalmente alla traiettoria. Questa forza esiste grazie alla curvatura della corda. Per calcolare il modulo di questa forza scegliamo mentalmente un segmento infinitamente piccolo AB della corda ricurva e indichiamone la lunghezza con s (fig. 229). Si può considerarlo un arco infinitesimo di un cerchio di raggio R alle cui estremità siano applicate le tensioni longitudinali T_1 e T_2. I loro valori assolu-

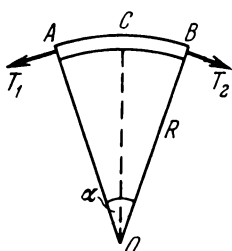



Fig. 229.

ti nei limiti della precisione di calcolo adottata sono uguali ($T_1 = T_2 = T$). Ma dato che le loro direzioni differiscono lievemente l'una dall'altra, compare una forza risultante normale al segmento AB. Essa è uguale a

$$F = 2T \sin\frac{\alpha}{2} \approx T\alpha = T\frac{s}{R}.$$

Uguagliando questa forza al prodotto della massa del segmento AB per la sua accelerazione, si ottiene

$$T\frac{s}{R} = s\delta\frac{c^2}{R},$$

da cui si ricava di nuovo la formula (84.1).

§ 85. *Velocità di propagazione del suono nei liquidi e nei gas*

1. I liquidi e i gas possiedono soltanto *elasticità volumetrica* e non elasticità di forma. Quindi in essi possono propagarsi perturbazioni longitudinali, ma non trasversali. La velocità di propagazione delle perturbazioni longitudinali in un mezzo liquido e gassoso può essere calcolata attraverso la formula (81.5). Si deve però precisare nel caso in esame cosa si intende per modulo di Young E. Immaginiamo che il mezzo liquido o gassoso sia contenuto in un tubo rettilineo a pareti lisce di sezione trasversale costante. Si ignori l'attrito tra le pareti e il mezzo. Le pareti del tubo ostacoleranno ogni moto trasversale del mezzo ma non il moto longitudinale. Un gas o un liquido contenuti in un tale tubo può essere assimilato a una sbarra lungo la quale si propaghino perturbazioni longitudinali. A differenza dei solidi, i gas possono esistere soltanto sotto pressione. Nel caso di assenza di pressione, il gas si espanderebbe illimitatamente. Quindi è necessario presupporre che in assenza di ogni perturbazione, la pressione all'interno del gas sia diversa da zero. Indichiamo questa pressione con P_0. Facciamo lo stesso nel caso di un liquido. Se la pressione del gas aumenterà fino a diventare $P = P_0 + \Delta P$, cambierà anche il volume della massa gassosa considerata.

Determiniamo la variazione del volume ΔV del gas dovuta all'incremento ΔP della pressione. Pressupporremo che ΔP sia piccolo rispetto a P_0: $\Delta P \ll P_0$. Se il gas è contenuto in un tubo, un'estremità del quale sia chiusa da un stantuffo mobile, una variazione di pressione sullo stantuffo di grandezza ΔP porterà ad una variazione di lunghezza della colonna gassosa di grandezza Δl. La grandezza $-(\Delta l/l)$ è la compressione relativa della colonna gassosa. Nel caso di piccole compressioni si ha

$$\Delta P = -A\frac{\Delta l}{l},$$

dove A è una costante. D'altra parte, la formula (75.7) per l'asta può essere riscritta nella forma $\Delta P = -E\frac{\Delta(\Delta l)}{l}$, dove $\Delta(\Delta l)$ è l'incremento della lunghezza dell'asta corrispondente alla variazione di pressione ΔP. Come idea questo incremento di lunghezza coincide con quanto detto per Δl nel caso di una colonna gassosa. Quindi, cambiando la notazione, il modulo di Young può essere determinato anche per mezzo della formula

$$\Delta P = -E\frac{\Delta l}{l}. \tag{85.1}$$

Da questa formula risulta che nel caso di una colonna di gas $A = E$. Poiché la lunghezza l della colonna di gas è proporzionale al volume V, si può riscrivere la formula precedente nella forma

$$\Delta P = -E\frac{\Delta V}{V}. \tag{85.2}$$

In questa forma l'equazione (85.2) rimane valida, qualunque sia la forma del contenitore del gas, mentre l'equazione (85.1) si riferisce soltanto ai gas contenuti in recipienti cilindrici.

Ammettiamo che la pressione del gas dipenda soltanto dal volume V. Per piccole variazioni di volume si avrà dunque

$$\Delta P = \frac{dP}{dV}\Delta V$$

ossia

$$\Delta P = \left(-V\frac{dP}{dV}\right)\cdot\left(-\frac{\Delta V}{V}\right).$$

Confrontando questa formula con la precedente, vediamo che nei gas (come nei liquidi) il ruolo del modulo di Young è assunto dalla grandezza

$$E = -V\frac{dP}{dV}. \tag{85.3}$$

È più comodo introdurre la densità ρ al posto del volume V del corpo. La grandezza $V\rho$ è la massa del corpo che in tutti i casi resta invariata. Derivando si ottiene dalla relazione V_ρ = cost.

$$\frac{dV}{V} = -\frac{d\rho}{\rho},$$

quindi

$$E = \rho\frac{dP}{d\rho}. \tag{85.4}$$

Portando questa espressione nella formula (81.5), si ottiene per la velocità del suono nei gas e nei liquidi

$$c = \sqrt{\frac{dP}{d\rho}}. \tag{85.5}$$

2. Applichiamo la formula (85.5) per calcolare la velocità del suono nei gas come ha fatto per primo Newton. Egli ha supposto che in un'onda sonora le variazioni di pressione e densità dei gas ubbidiscano alla *legge di Boyle-Mariotte:* $P = A\rho$, dove A = cost. Di quì $\frac{dP}{d\rho} = A = \frac{P}{\rho}$. Ne risulta la *formula di Newton*

$$c_N = \sqrt{\frac{P}{\rho}}. \tag{85.6}$$

Qui la velocità del suono è indicata con c_N per sottolineare che si tratta della velocità del suono calcolata secondo la formula di Newton.

Ora trasformiamo la formula (85.6) per comodità di calcolo. Come è noto il volume, la pressione e la temperatura assoluta T dei gas perfetti sono legati mediante la relazione

$$PV = RT, \qquad (85.7)$$

dove R è una costante. Se si prende una mole di gas, la costante R avrà lo stesso valore numerico per tutti i gas. Si chiama *costante universale di gas* ed è uguale a $R = 8{,}31 \cdot 10^7 \text{ erg} \cdot K^{-1}, \text{mole}^{-1}$. Ricordiamo che si chiama *mole* la quantità di materia la cui massa in grammi è numericamente uguale al peso molecolare di questa sostanza μ. Ne segue che la densità ρ è legata al volume V di una mole di un gas perfetto tramite la relazione $\mu = \rho V$. Quindi si ottiene

$$P = \frac{RT}{\mu}\rho, \qquad (85.8)$$

$$c_N = \sqrt{\frac{RT}{\mu}} \qquad (85.9)$$

Utilizziamo questa formula per calcolare la velocità del suono nell'aria a 0°C ($T = 273$ K). L'aria è una miscela di diversi gas le cui principali componenti sono l'azoto ($\mu = 28$) e l'ossigeno ($\mu = 32$). Il peso molecolare medio della miscela sia $\mu = 28{,}8$. Sostituendo nella formula (85.9) i valori numerici, si ottiene $c_N = 280$ m/s. Dagli esperimenti risulta c = 330 m/s. Nella realtà c'è quindi una notevole diversità tra teoria ed esperienza. Anzi per lungo tempo non si è riusciti a spiegare l'origine di questa diversità. Soltanto all'inizio del XIX secolo Laplace (1749-1827) scoprì la causa del fenomeno. La legge di Boyle-Mariotte si riferisce a variazioni di volume e pressione del gas qualora la *temperatura rimanga costante.* Inoltre un'onda sonora si compone di *compressioni* e *rarefazioni* che si susseguono l'una dietro l'altra. Le zone compresse sono sottoposte ad un lavoro esterno che *ne aumenta la temperatura.* Le zone rarefatte effettuano loro stesse un lavoro grazie a cui la temperatura si abbassa. Poiché le compressioni e le rarefazioni si susseguono molto rapidamente, le varie temperature non riescono a uniformarsi in tempo: le zone compresse sono sempre più calde delle zone rarefatte. L'esistenza di queste differenze di temperatura aumenta il gradiente di pressione tra le zone compresse e le zone rarefatte e provoca l'aumento della velocità del suono nei gas. Propri di questa circostanza non teneva conto la formula di Newton. Newton, calcolando la velocità del suono, ha messo nella formula (81.5) il *modulo isotermo* di elasticità E, invece di utilizzare il *modulo* di elasticità *adiabatico* (cfr. § 79). Affronteremo lo studio quantitativo del problema nel volume II del nostro corso.

XI. RAPPORTI DI SIMILITUDINE E DIMENSIONI

§ 86. *Dimensioni e unità di misura*

1. Finora non abbiamo parlato delle *dimensioni delle grandezze fisiche*, e abbiamo affrontato questo concetto supponendo che il lettore abbia una qualche conoscenza di questi argomenti. Per i problemi che abbiamo già esaminato queste nozioni potevano essere sufficienti. Per lo studio di problemi più complicati, in idrodinamica, ad esempio, la cui interpretazione teorica complessa è troppo ardua, si ricorre al *metodo di dimensionalità* o *metodo di studio dimensionale*. Applicando considerazioni supplimentari di carattere generale o dati sperimentali, questo metodo permette di ottenere, in modo semplice e rapido, dei risultati preliminari che anche se non sono completi, permettono di orientarsi quanto basta nell'arco dei problemi in esame. È necessario quindi conoscere questo metodo.

Il concetto di dimensionalità appare in rapporto alla costruzione di *un sistema di unità*. In linea di principio si potrebbe scegliere per ciascuna grandezza fisica una sua propria unità che non abbia nessuna relazione con le unità di altre grandezze. Ma allora nelle equazioni che esprimono le leggi fisiche apparirebbe un gran numero di coefficienti numerici i cui valori non potrebbero costituire un sistema semplice e chiaro e che verrebbero determinati attraverso una scelta arbitraria delle unità di misura. Tale moltitudine di coefficienti numerici complicherebbe assai le formule e esigerebbe uno sforzo di memorizzazione inutile. In fisica, per evitarlo, si è rinunciato da tempo a una scelta arbitraria delle unità di misura di tutte le grandezze fisiche e si sono cominciati ad adottare sistemi di unità che seguono un principio ben definito.

2. Questo principio è il seguente. Alcune grandezze fisiche vengono adottate per convenzione come grandezze *fondamentali* e *primarie*, cioè tali che le loro unità vengono stabilite in modo arbitrario e indipendente. Così, si utilizza in meccanica il sistema *LMT*, ad esempio, in cui le grandezze fondamentali sono la lunghezza (L), la massa (M) e il tempo (T). La *scelta delle grandezze di base e il loro numero sono arbitrari*. È una questione puramente convenzionale. In meccanica applicata, ad esempio, si utilizzava fino a poco tempo fa il sistema *LFT* le cui grandezze fondamentali erano la lunghezza (L), la forza (F) e il tempo (T). Nel *sistema internazionale delle unità* di misura (*SI*) sono adottate sei grandezze fondamentali: lunghezza,

massa, tempo, temperatura, intensità della corrente elettrica e intensità luminosa. Le grandezze che non sono fondamentali si chiamano *derivate* o *secondarie*. Le unità di misura delle grandezze derivate vengono stabilite muovendo dalla considerazione secondo cui i coefficienti numerici, facenti parte delle leggi o formule fisiche e che determinano le grandezze considerate, debbano assumere dei valori già ben definiti. La velocità di un punto materiale in moto uniforme, ad esempio, è una grandezza particolare, proporzionale al tratto percorso s e indirettamente proporzionale al tempo t impiegato per percorrere questo tratto. Se, ad esempio, le unità di misura s, t e v fossero scelte indipendentemente le une dalle altre, si dovrebbe scrivere $v = Cs/t$, dove C è un coefficiente numerico il cui valore è determinato dalle unità scelte per misurare queste grandezze. Se si fissa il valore di questo coefficiente, le unità di misura di s, t e v cesseranno di essere indipendenti. Per semplificare si mette $C = 1$ e si scrive $v = s/t$. Se si sceglie come grandezza di base la lunghezza s e il tempo t, la velocità v diventa una grandezza derivata. Siamo allora obbligati ad adottare come unità della velocità, la velocità di moto uniforme con cui un corpo percorre l'unità di un tratto nell'unità di tempo. Si dice allora che la dimensionalità della velocità è una lunghezza divisa per il tempo, il che viene scritto così: $[v] = LT^{-1}$. Analogamente, mentre si scelgono le unità di misura indipendentemente le une dalle altre, si scrive per l'accelerazione: $a = C\frac{dv}{dt}$. Mettendo $C = 1$, l'accelerazione a diventa un'unità derivata avente la dimensionalità della velocità divisa per il tempo o la dimensionalità della lunghezza divisa per il quadrato del tempo. Dopo di che siamo obbligati ad adottare come unità di tempo l'accelerazione di moto uniformemente accelerato la cui velocità aumenta di una unità nell'unità di tempo. Con unità arbitrarie la seconda legge di Newton si scrive nella forma $F = Cma$. Fissando il coefficiente numerico C la forza F diventa una grandezza derivata e le asegnamo un'unità di misura. Se si stabilisce, ad esempio, $C = 1$, si ottiene $F = ma$. Dopo di che la formula di dimensionalità della forza viene espressa dal prodotto della massa per l'accelerazione: $[F] = [ma] = MLT^{-2}$. La formula $F = ma$ impone di adottare come unità di forza una forza che comunichi all'unità di massa un'accelerazione uguale all'unità.

3. La dimensione di una grandezza fisica non determina affatto la grandezza della sua unità di misura, ma serve soltanto a stabilire un legame tra le unità di misura delle differenti grandezze fisiche in esame. La *conoscenza della dimensione aiuta a fissare una regola che permette di determinare la variazione dell'unità di misura di una grandezza fisica derivata nel caso di una variazione della scala delle unità di base.* La *formula di dimensionalità* delle grandezze fisiche è l'espressione matematica di questa regola. Supponiamo, ad esempio, che per unità di lunghezza sia preso il chilometro e per unità di tempo il minuto. In questo sistema di unità di misura l'unità di accelerazione sarà 1 km/min^2. Ci si domanda: come varierà l'unità di ac-

celerazione se si prende per unità di lunghezza il centimetro e per unità di tempo il secondo? La formula di dimensionalità permette di risolvere facilmente questo problema. Scriviamo prima le uguaglianze 1 km = 10^5 cm, 1 min = 60 s, quindi si ottiene

$$1 \text{ km/min}^2 = \frac{10^5 \text{ cm}}{60^2 \text{ s}^2} = \frac{1000}{36} \text{ cm/s}^2.$$

Ne segue che l'unità di accelerazione 1 km/min^2 è 1000/36 volte più grande dell'unità 1 cm/s^2, e di conseguenza il valore numerico dell'accelerazione misurata in km/min^2 sarà 1000/36 volte più piccolo della stessa accelerazione misurata in cm/s^2.

§ 87. *Equazioni dimensionali*

1. Il termine « sistema di unità » è utilizzato in due sensi differenti: in senso più generale, un sistema di unità è caratterizzato dalla scelta delle grandezze di base e dalle formule che definiscono le grandezze derivate in funzione delle grandezze di base, la *scala delle unità di queste ultime grandezze non è fissata.* Come esempio può servire il sistema *LMT* in cui le grandezze di base sono la lunghezza, la massa ed il tempo. Un altro esempio è fornito dal sistema elettrotecnico *LMTI* in cui le grandezze di base sono la lunghezza, la massa, il tempo e l'intensità *I* della corrente elettrica. In senso più ristretto, un sistema di unità di misura è ancora caratterizzato dalla scelta determinata di *una scala di grandezze delle unità di misura di base.* Come esempi possono servire i sistemi *CGS* e *MKSA*. Il primo sistema è un caso particolare del sistema *LMT* in cui le unità di lunghezza, di massa e di tempo sono il centimetro, il grammo e il secondo. Il secondo sistema è un caso particolare del sistema elettrotecnico *LMTI* dove in qualità di unità di lunghezza, di massa, di tempo e di forza sono usati rispettivamente il metro, il chilogrammo, il secondo e l'ampere. Nella teoria di dimensionalità delle grandezze fisiche il termine « sistema di unità » è concepito nella sua accezione più vasta.

La nozione di dimensionalità nasce dall'esigenza che in un medesimo sistema di unità i rapporti quantitativi tra differenti grandezze fisiche vengono espresse sempre dalle stesse formule quali che siano le scale di unità delle grandezze fisiche di base. È questa condizione che determina la forma generale delle « *formule di dimensionalità* » delle grandezze fisiche. Supponiamo che esistano parecchie grandezze fisiche legate tra loro. Per semplificare, limitiamoci al caso di due grandezze, una delle quali è usata come grandezza di base e l'altra come derivata. I loro valori numerici x e y sono legati tramite l'equazione $y = f(x)$. Determiniamo la forma generale della funzione $f(x)$. Se si diminuisce l'unità di misura x della grandezza di base di α volte, il suo valore numerico aumenta di altrettante volte e diventerà

uguale a $X=\alpha x$, mentre l'unità di misura y della grandezza derivata diminuirà e il suo valore numerico aumenterà di β volte diventando così uguale a $Y=\beta y$. Stabiliamo che i valori numerici X e Y siano legati tramite la stessa equazione che figura nel caso di x e y, cioè sia $Y=f(X)$ ossia $\beta y=f(\alpha x)$. Questa condizione può essere soddisfatta per qualsiasi valore di α, se viene debitamente scelto il valore di β. Il problema consiste nel calcolare β in funzione della variabile α. È la formula dimensionale che fornisce la soluzione di questo problema.

Prima di risolvere il problema, modifichiamone l'impostazione. Siano due grandezze fisiche legate mediante la relazione $y=f(x)$. Conservando le stesse unità di misura, facciamo variare le grandezze fisiche stesse. Ammettiamo che le grandezze x e y siano aumentate rispettivamente di α e di β volte e siano diventate uguali a $X=\alpha x$ e $Y=\beta y$. Si chiede allora, quale condizione devono soddisfare i numeri α e β perché la relazione tra i nuovi valori delle grandezze fisiche X e Y sia la stessa che nel caso dei precedenti valori x e y, cioè $Y=f(X)$. La risposta viene fornita dalla *teoria della similitudine*. Il problema ancora una volta consiste nello studiare l'equazione $\beta y=f(\alpha x)$. Ciò dimostra che le teorie della dimensione e della similitudine si differenziano soltanto per la forma dell'enunciato del problema, mentre nella sostanza non si distinguono. La teoria della similitudine permette di studiare le correlazioni quantitative tra i paramentri dei sistemi fisici reali rappresentati dai loro modelli ingranditi o ridotti. Questa è la prassi, ad esempio, nella tecnica aeronautica, dove in aerodinamica si utilizzano modelli ridotti di aerei reali. Esaminato il comportamento di modelli ridotti di sistemi reali, si può, per mezzo della teoria della similitudine o della teoria della dimensione tirare delle conclusioni relative al comportamento dei sistemi reali in condizioni reali. La teoria della dimensione riduce il problema della similitudine dei fenomeni fisici nel senso sopraindicato ad *un'analisi delle dimensioni* delle grandezze fisiche.

2. Dopo queste osservazioni preliminari stabiliamo la forma generale delle equazioni dimensionali. Come abbiamo già detto, è necessario che dall'equazione $y=f(x)$ derivi l'equazione $Y=f(X)$, con $X=\alpha x$, $Y=\beta y$. La variabile x ed il parametro α possono assumere indipendentemente qualsiasi valore. Il problema consiste nel calcolare il valore di β conoscendo quello di α. Differenziando, con α e β fissi, si ottiene

$$\frac{dy}{dx}=f'(x), \quad \frac{dY}{dX}=f'(X).$$

Scriviamo la seconda formula nella forma

$$\frac{\beta}{\alpha}\frac{dy}{dx}=f'(X).$$

Dividiamola membro a membro per la prima formula; nel risultato ottenuto sostituiamo α e β con le espressioni $\alpha=\frac{X}{x}$, $\beta=\frac{Y}{y}=\frac{f(X)}{f(x)}$. Si ottiene

allora

$$x\frac{f'(x)}{f(x)} = X\frac{f'(X)}{f(X)}.$$

A sinistra si trova soltanto una funzione di x e a destra la stessa funzione di X. Indicandola con F, abbiamo $F(x) = F(X)$. Ma in virtù dell'arbitrarietà del parametro α le variabili x e $X = \alpha x$ possono assumere indipendentemente qualsiasi valore. Di conseguenza, l'uguaglianza $F(x) = F(X)$ deve essere identicamente verificata quali che siano x e X. Ciò significa che $F(x)$ è una costante. Indicandola con m, si ottiene la seguente equazione differenziale

$$x\frac{f'(x)}{f(x)} = m,$$

ossia

$$\frac{df(x)}{f(x)} = m\frac{dx}{x}.$$

Da cui si ottiene

$$f(x) = f_0 x^m,$$

dove f_0 è la costante d'integrazione. Quindi $y = f_0 x^m$. Analogamente $Y = f_0 X^m$ o $\beta y = f_0(\alpha x)^m$. Dividendo membro a membro si eliminano x e y, e così si ottiene

$$\beta = \alpha^m. \tag{87.1}$$

È questa l'equazione delle dimensioni. Vediamo che la condizione di indipendenza della relazione funzionale tra y e x dalla scelta della scala dell'unità di misura della grandezza di base x può essere soddisfatta soltanto se la dimensione è espressa da *una formula di potenza*.

Le considerazioni appena espresse si possono facilmente generalizzare nel caso in cui la grandezza fisica considerata dipende da parecchie grandezze di base. Per farlo è sufficiente fissare le unità di tutte le grandezze fisiche di base eccetto una. Con tale procedimento non è difficile dimostrare che la formula della dimensione della grandezza considerata deve essere *una formula di potenza in confronto a tutte le grandezze fisiche di base*. Supponiamo, ad esempio, che si tratti di tre grandezze di base: la lunghezza (L), la massa (M) e il tempo (T). La dimensione di qualsiasi grandezza fisica y sarà rappresentata dalla formula

$$[y] = L^p M^q T^r, \tag{87.2}$$

dove p, q, r sono dei numeri costanti. La formula (87.2) significa che se diminuiamo le unità di lunghezza, di massa e di tempo rispettivamente di α, β e γ volte, l'unità della grandezza derivata y diminuerà di $\alpha^p \beta^q \gamma^r$ volte e il suo valore numerico aumenterà quindi di altrettante volte.

3. Se si esaminano le dimensioni delle grandezze fisiche che si incontrano effettivamente in fisica, non è difficile rilevare che i numeri p, q, r sono sempre razionali. Ciò non è necessario dal punto di vista della teoria delle dimensioni ma è il risultato delle definizioni rispettive delle grandezze fisiche. Così, ad esempio, la velocità viene introdotta dalla formula $v = s/t$ e,

quindi, ha per dimensione il quoziente di una lunghezza per il tempo. Per essa $p=1$, $q=0$, $r=-1$. Ma in via di principio la teoria delle dimensioni ammette l'introduzione di grandezze con valori irrazionali p, q, r, ad esempio $(1/t)s^{\sqrt{2}}$. Per una tale grandezza avremmo $p=\sqrt{2}$. Simili grandezze non vengono introdotte in fisica non per ragioni di principio, ma semplicemente perché non ce n'è bisogno. La teoria delle dimensioni non c'entra.

4. Spesso si identifica la dimensione di una grandezza fisica con la sua unità di misura in un sistema di unità corrispondente. Si dice, ad esempio, che la velocità ha per dimensione cm/s, la forza $g \cdot cm/s^2$. Non è logico, ma non è neanche grave. Se necessario, le unità di questo tipo permettono sempre di passare a formule dimensionali in cui le scale di unità delle grandezze di base non sono fissate.

5. Secondo la scelta delle grandezze di base, nonché secondo la forma delle equazioni che collegano queste grandezze di base alle grandezze derivate, la stessa grandezza fisica prende nei differenti sistemi di unità non soltanto valori differenti, ma anche differenti dimensioni. Nel sistema *LMT*, ad esempio, la dimensione della forza si deduce dalla seconda legge di Newton $f=Cma$, in cui il coefficiente C si considera per convenzione adimensionale e si suppone uguale all'unità. La forza avrebbe allora per dimensione LMT^{-2}. Ma non è obbligatorio procedere in tal modo poiché si può attribuire al coefficiente C una dimensione e un valore qualsiasi. Si ottiene allora un nuovo sistema di unità in cui la forza avrà un'altra dimensione. Nell'equazione $f=G\frac{m_1m_2}{r^2}$ che esprime la legge di gravitazione universale di Newton, si può uguagliare, ad esempio, la costante G all'unità e considerarla adimensionale. La forza f avrà allora per dimensione M^2L^{-2}, mentre nella seconda legge di Newton $f=Cma$ il coefficiente C avrà per dimensione $ML^{-3}T^2$.

Differenti grandezze fisiche possono avere dimensioni identiche anche all'interno di uno stesso sistema di unità. In meccanica possono servire da esempi il lavoro e l'energia cinetica o il lavoro e il momento delle forze (sistema *MLT*), mentre in elettromagnetica, la capacità e l'induttività che nel sistema gaussiano hanno per dimensione la lunghezza. In questi casi anche alle unità di queste grandezze fisiche spesso si attribuiscono le stesse denominazioni sebbene in sostanza siano assai differenti. Il fatto che due grandezze fisiche differenti possono avere una medesima dimensione in qualche sistema di unità, non prova che siano identiche, ma soltanto che nel sistema di unità considerato le scale di unità di misura di queste grandezze variano nello stesso modo se si fa variare la scala di unità delle grandezze fisiche di base. In altri sistemi di unità le dimensioni di queste stesse grandezze fisiche possono anche non coincidere.

Si interpreta qualche volta la non coincidenza delle dimensioni di una stessa grandezza in diversi sistemi di unità come una contraddizione logica che deve essere spiegata, e questa considerazione è servita da pretesto per

impostare la questione della « vera » dimensione delle grandezze fisiche. Dopo ciò che abbiamo detto in merito, non c'è bisogno di dimostrare che una grandezza fisica in quanto tale non possiede di per sé nessuna dimensione. La sua dimensione appare soltanto dopo che è stato scelto un sistema di unità di misura; quanto al problema della « vera » dimensione delle grandezze fisiche, si può rimandare all'indovinata felice osservazione di Max Plank secondo la quale la questione posta non ha più senso di quella della « vera » denominazione di un oggetto qualunque.

6. Si chiamano *combinazioni adimensionali delle grandezze fisiche* quelle combinazioni che nel sistema di unità considerato hanno dimensione zero. I loro valori numerici non variano quando si modifica la scala delle unità delle grandezze di base. Diamo qualche esempio di tali combinazioni. Se la grandezza y ha la dimensione di un'altra grandezza x elevata al grado di α, è evidente che il rapporto y/x^α sarà una combinazione adimensionale delle due grandezze x e y.

Si può illustrare il metodo generale di costruzione delle combinazioni adimensionali prendendo come esempio un sistema di unità basato su tre grandezze fondamentali: la lunghezza (L), la massa (M) e il tempo (T). Siano n grandezze fisiche $x_1, x_2, \ldots, x_n$ aventi in questo sistema le seguenti dimensioni

$$L^{p_1}M^{q_1}T^{r_1},\ L^{p_2}M^{q_2}T^{r_2},\ \ldots,\ L^{p_n}M^{q_n}T^{r_n}.$$

Si tratta ora di realizzare con queste grandezze una combinazione adimensionale. Secondo il teorema dimostrato al punto 2, la combinazione cercata deve avere la forma $x_1^{\alpha_1}, x_2^{\alpha_2}, \ldots x_n^{\alpha_n}$. Essa avrà per dimensione

$$(L^{p_1}M^{q_1}T^{r_1})^{\alpha_1}\ (L^{p_2}M^{q_2}T^{r_2})^{\alpha_2}\ \ldots\ (L^{p_n}M^{q_n}T^{r_n})^{\alpha_n},$$

cioè $L^pM^qT^r$ *con*

$$\begin{aligned} p &= p_1\alpha_1 + p_2\alpha_2 + \ldots + p_n\alpha_n, \\ q &= q_1\alpha_1 + q_2\alpha_2 + \ldots + q_n\alpha_n, \\ r &= r_1\alpha_1 + r_2\alpha_2 + \ldots + r_n\alpha_n. \end{aligned} \tag{87.3}$$

Perché la combinazione sia adimensionale, è necessario e sufficiente che $p=q=r=0$, il che porta ad un sistema di tre equazioni omogenee

$$\begin{aligned} p_1\alpha_1 + p_2\alpha_2 + \ldots + p_n\alpha_n &= 0, \\ q_1\alpha_1 + q_2\alpha_2 + \ldots + q_n\alpha_n &= 0, \\ r_1\alpha_1 + r_2\alpha_2 + \ldots + r_n\alpha_n &= 0 \end{aligned} \tag{87.4}$$

con le incognite $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.

Si può sempre scegliere arbitrariamente il valore di una di queste incognite poiché una combinazione adimensionale resterà la stessa se si eleva ad un grado arbitrario. Scegliamo, ad esempio, il valore di α_1. Si

avranno allora tre equazioni per definire $n-1$ incognite; è comodo prendere per incognite i rapporti $\frac{\alpha_2}{\alpha_1}, \frac{\alpha_3}{\alpha_1}, \ldots, \frac{\alpha_n}{\alpha_1}$. Se queste equazioni sono indipendenti, si potrebbero scegliere arbitrariamente i valori di $(n-1)-3=n-4$ rapporti. I tre altri rapporti verranno determinati tramite le equazioni (87.4). Come risultato finale si otteranno $n-4$ combinazioni adimensionali indipendenti. Ogni funzione di queste combinazioni adimensionali sarà anche una combinazione adimensionale. Se invece le tre equazioni (87.4) non sono indipendenti, il numero delle combinazioni indipendenti aumenterà. Se, ad esempio, soltanto due su tre equazioni (87.4) sono indipendenti, ci sarà $n-3$ combinazioni indipendenti, ecc.

§ 88. *Regola delle dimensioni*

1. Tutte le applicazioni della teoria delle dimensioni sono basate su due teoremi. Uno di questi è espresso dalla formula (87.2) che stabilisce la forma generale delle dimensioni delle grandezze fisiche. Il secondo teorema afferma che ogni correlazione quantitativa tra le grandezze fisiche può essere espressa sotto forma di una correlazione funzionale tra le *combinazioni adimensionali di queste grandezze.*

Per dimostrare questo teorema supporremo che esista tra le grandezze $a, b, c, x_1, x_2, x_3, \ldots$ una relazione funzionale $f(a, b, c, x_1, x_2, x_3, \ldots)=0$. Adottiamo come grandezze fondamentali le grandezze a, b, c e come derivate x_1, x_2, x_3. (Abbiamo preso tre grandezze fondamentali, ma il numero non ha importanza). Supponiamo che le grandezze derivate presentino le dimensioni $[x_1] = [a^{p_1}b^{q_1}c^{r_1}]$, $[x_2] = [a^{p_2}b^{q_2}c^{r_2}]$. . . Diminuiamo di α, β, γ volte rispettivamente le unità delle grandezze fondamentali. Allora esse assumeranno i valori fondamentali $\alpha a, \beta b, \gamma c$ e le grandezze derivate i valori $\alpha^{p_1}\beta^{q_1}\gamma^{r_1}x_1$, $\alpha^{p_2}\beta^{q_2}\gamma^{r_2}x_2, \ldots$ La relazione funzionale considerata si scrive allora nella forma

$$f(\alpha a, \beta b, \gamma c, \alpha^{p_1}\beta^{q_1}\gamma^{r_1}x_1, \alpha^{p_2}\beta^{q_2}\gamma^{r_2}x_2, \ldots) = 0,$$

i valori α, β, γ possono essere scelti arbitrariamente. Scegliamoli in modo che $\alpha a=\beta b=\gamma c=1$. Ciò significa passare da un sistema di unità rigorosamente fissate ad un sistema di unità variabili, nel quale i valori numerici delle grandezze fondamentali nel problema in esame si suppongono uguali all'unità. Con questa scelta si ha

$$f\left(1, 1, 1, \frac{x_1}{a^{p_1}b^{q_1}c^{r_1}}, \frac{x_2}{a^{p_2}b^{q_2}c^{r_2}}, \ldots\right) = 0.$$

Ma questa equazione come variabili contiene soltanto combinazioni adimensionali di grandezze fisiche. Si può scrivere questa equazione nella for-

ma

$$F\left(\frac{x_1}{a^{p_1}b^{q_1}c^{r_1}}, \frac{x_2}{a^{p_2}b^{q_2}c^{r_2}}, \dots\right) = 0, \tag{88.1}$$

dove F è una nuova funzione. Il teorema è dimostrato.

2. Questo teorema può essere espresso in altro modo. Risolviamo l'equazione (88.1) rispetto ad una delle variabili, la prima, ad esempio, e moltiplichiamo il risultato per il denominatore di questa variabile. Si ottiene

$$x_1 = a^{p_1}b^{q_1}c^{r_1}\varphi\left(\frac{x_2}{a^{p_2}b^{q_2}c^{r_2}}, \dots\right), \tag{88.2}$$

dove φ è una certa funzione delle variabili adimensionali. Ciò significa che in ogni legge fisica del tipo $A = B$ le dimensioni dei due membri dell'uguaglianza devono essere *le stesse*. Sotto questa forma il teorema dimostrato è noto come *regola delle dimensioni*. Un'uguaglianza del tipo $A = B$ può comprendere come fattori sia dei coefficienti costanti che delle combinazioni adimensionali delle grandezze fisiche. Secondo questa regola, le grandezze fisiche dimensionali possono essere sottoposte soltanto ad operazioni matematiche che implicano elevazioni a potenza. Tutte le altre operazioni matematiche ($\sin x$, e^x, $\ln x$, ecc.) possono essere applicate soltanto alle grandezze adimensionali. La regola delle dimensioni è molto utile quando si tratta di verificare delle formule. Se i calcoli vengono effettuati in un solo sistema di unità, le dimensioni dei membri di tutte le uguaglianze ottenute devono essere le stesse. La non coincidenza delle dimensioni indica che si è commesso uno sbaglio di calcolo.

Non si deve però concludere che non si possono essere leggi fisiche che si esprimano sotto forma di uguaglianze tra grandezze fisiche di diversa dimensione. In fisica uguaglianze del genere sono al contrario assai frequenti. La velocità di un corpo in caduta libera, ad esempio, può essere espressa dalla formula approssimata $v = 10t$ (se la velocità iniziale del corpo è uguale a zero) e la pressione idrostatica di uno strato d'acqua dalla formula $P = 1/10h$. Però simili formule sono valide solo quando le unità delle grandezze fisiche che vi figurano sono *fissate in modo preciso*. Negli esempi riportati si suppone che il tempo t sia misurato in secondi, la velocità v in metri al secondo, lo spessore h dello strato d'acqua in metri e la pressione P in atmosfere. Queste formule non ammettono quindi variazioni delle scale di unità. Ma in questo caso non ha senso parlare delle dimensioni delle grandezze che figurano in queste formule.

3. La teoria della dimensione in sé, cioè senza utilizzare dati supplementari, non può portare a nessuna conclusione fisica concreta, poiché essa non si basa su nessuna legge fisica. Per trarne conclusioni concrete, bisogna deternimare *tra quali grandezze fisiche* esistano relazioni quantitative. La teoria della dimensione non può esservi di nessun aiuto. Potrebbero essere utilizzati dei dati sperimentali o una qualche legge fisica. Gli esempi che seguono possono servire ad illustrare le considerazioni esposte.

Problemi

1. Si facciano tutte le combinazioni adimensionali indipendenti possibili utilizzando le grandezze l, m, t, v, a, ρ, E, φ(l è la lunghezza, m la massa, t il tempo, v la velocità, a l'accelerazione, ρ la densità di una sostanza, E il modulo di Young, φ l'angolo in radianti).

Soluzione. Il procedimento più semplice è il seguente. Fra le grandezze elencate, l'angolo φ è una grandezza adimensionale. Osserviamo inoltre che il prodotto vt ha dimensione di lunghezza, at di velocità, ρl^3 di massa, ρv^2 di pressione, oltre al modulo di Young. Si possono dunque scrivere subito le seguenti combinazioni adimensionali:

$$\frac{vt}{l}, \frac{at}{v}, \frac{\rho l^3}{m}, \frac{\rho v^2}{E}, \varphi. \tag{88.3}$$

Però questo procedimento presenta il difetto di non fornire risposta. qualora si esauriscano con la serie (88.3) tutte le combinazioni adimensionali indipendenti delle grandezze fisiche considerate. Il metodo generale esposto nel §87, punto 6, non ha questo difetto, perciò utilizzando anche per risolvere il problema in esame. Nella ricerca delle combinazioni adimensionali, l'angolo φ come grandezza adimensionale può essere ignorato. Con le sette grandezze rimaste facciamo una combinazione della forma

$$l^\alpha m^\beta t^\gamma v^\delta a^\lambda \rho^\mu E^\nu.$$

Se si esprimono le dimensioni di v, a, ρ, E attraverso le dimensioni delle grandezze fondamentali l, m, t, la combinazione suindicata si trasforma in

$$l^\alpha m^\beta t^\gamma l^\delta t^{-\delta} l^\lambda t^{-2\lambda} m^\mu l^{-3\mu} m^\nu l^{-\nu} t^{-2\nu},$$

cioè, nella combinazione

$$l^{\alpha+\delta+\lambda-3\mu-\nu} m^{\beta+\mu+\nu} t^{\gamma-\delta-2\lambda-2\nu}.$$

Perché questa combinazione sia adimensionale, bisogna che

$$\begin{aligned} \alpha + \delta + \lambda - 3\mu - \nu &= 0 \\ \beta + \mu + \nu &= 0 \\ \gamma - \delta - 2\lambda - 2\nu &= 0. \end{aligned}$$

Per mezzo di queste tre equazioni si possono esprimere i tre parametri sconosciuti attraverso gli altri quattro rimasti. È più semplice prendere per parametri indipendenti δ, λ, μ, ν, perché le equazioni sono praticamente già risolte rispetto agli altri parametri rimasti sconosciuti α, β, γ:

$$\begin{aligned} \alpha &= -\delta - \lambda + 3\mu + \nu, \\ \beta &= -\mu - \nu, \\ \gamma &= \delta + 2\lambda + 2\nu. \end{aligned}$$

I parametri δ, λ, μ, ν possono prendere qualsiasi valore indipendente. Supponendo successivamente

$$1)\ \delta = 1,\quad \lambda = \mu = \nu = 0,\quad 2)\ \lambda = 1,\quad \delta = \mu = \nu = 0,$$
$$3)\ \mu = 1,\quad \delta = \lambda = \nu = 0,\quad 4)\ \nu = 1,\quad \delta = \lambda = \mu = 0,$$

si ottiene

$$1)\ \alpha = -1,\quad \beta = 0, \gamma = 1,\quad 2)\ \alpha = -1,\quad \beta = 0, \gamma = 2,$$
$$3)\ \alpha = 3,\quad \beta = -1, \gamma = 0,\quad 4)\ \alpha = 1,\quad \beta = -1, \gamma = 2.$$

A questi valori corrispondono le seguenti combinazioni adimensionali:

$$1) \frac{vt}{l}, \; 2) \frac{at^2}{l}, \; 3) \frac{\rho l^3}{m}, \; 4) \frac{Elt^2}{m}.$$

Aggiungendovi l'angolo φ si ottengono in tutto cinque combinazioni adimensionali indipendenti che sono tutte funzioni di combinazioni adimensionali (88.3). Ciò significa che con la serie (88.3) si esauriscono tutte le combinazioni adimensionali indipendenti possibili con le grandezze fisiche considerate.

2. In che misura dipende dall'altezza h la velocità di caduta libera di un corpo, se la sua velocità iniziale è uguale a zero?

Soluzione. L'accelerazione g della caduta libera è una costante e non dipende né dalla massa, né dalla densità, né dalle proprietà elastiche e via dicendo del corpo. Quindi la velocità v di caduta libera può dipendere soltanto da g e da h. Con le combinazioni adimensionali (88.3) si può comporre un'unica combinazione adimensionale indipendente $v^2/(la)$ o $v^2/(gh)$, che contiene soltanto la lunghezza, la velocità e l'accelerazione. Essa si ottiene dividendo la prima combinazione adimensionale della serie (88.3) per la seconda. Quindi si deve avere $f\left(\frac{v^2}{gh}\right) = 0$, da cui $v^2/(gh) = C = \text{cost}$, ossia $v^2 = Cgh$. Non si può ottenere il valore del coefficiente numerico C, basandosi sulla teoria della dimensione.

3. Utilizzando le considerazioni sulla dimensione si trovi la dipendenza del periodo T delle oscillazioni di un pendolo fisico dalla sua lunghezza ridotta l, dall'accelerazione di gravità g e dall'ampiezza angolare α.

Risposta. $T = \varphi(\alpha)\sqrt{l/g}$. La forma della funzione $\varphi(\alpha)$ non si può dedurre dalla teoria della dimensione. Se si sviluppa questa funzione nella serie di Taylor e vi si conserva soltanto il termine zero (il che si può fare in caso di piccole oscillazioni), si ottiene $T = C\sqrt{l/g}$, dove C è un coefficiente numerico costante, il cui valore di nuovo non si può ricavare dalla teoria della dimensione. Anche il fatto che $C \neq 0$ non risulta dalla teoria della dimensione e deve essere stabilito in altro modo (per mezzo di esperimenti, ad esempio).

4. Utilizzando le considerazioni sulla dimensione si determini la dipendenza della velocità v di propagazione delle perturbazioni longitudinali elastiche in un'asta, dal modulo di Young E e dalla densità ρ del materiale di cui è fatta l'asta.

Risposta. $v = C\sqrt{E/\rho}$. Il coefficiente numerico C non si può ricavare dalle considerazioni sulla dimensione.

5. Due punti materiali non in interazione che si trovano in un campo di forze centrali descrivono delle traiettorie geometricamente simili. La forza F che agisce su ciascuno dei punti materiali è proporzionale alla sua massa e varia con la distanza r fino al centro come r^n, dove n è una costante. Come sono legate le lunghezze l_1 e l_2 degli archi geometricamente simili delle traiettorie, con i tempi T_1 e T_2, che impiegano i punti a percorrere questi archi?

Soluzione. Deve esistere una relazione tra la lunghezza l della traiettoria del'arco, il tempo T impiegato dal punto materiale a percorrere quest'arco, e l'accelerazione a diretta al centro di forza. Le accelerazioni possono essere definite in punti arbitrari a condizione che sia rispettata la similitudine delle posizioni di questi punti. Con queste tre grandezze si può formare una sola combinazione adimensionale indipendente per la quale si può adottare aT^2/l. Quindi si deve avere $aT^2/l = \text{cost}$. Per l'accelerazione si può scrivere $a = Ar^n$, dove A è una costante, la stessa per i due punti materiali. In virtù della similitudine delle traiettorie sulle quali si muovono i punti materiali, si può anche scrivere $a = Bl^n$, dove B è un'altra costante sempre la stessa per i due punti. Come risultato finale si ottiene $T_l^2 l_l^{n-1} = \text{cost}$, quindi $T_1^2 l_1^{n-1} = T_2^2 l_2^{n-1}$. In casi particolari in cui $n = 1$ e $n = -2$ si ottiene $T = \text{cost}$ e $T^2/l^3 = \text{cost}$. La prima relazione significa che nel caso di un oscillatore armonico il periodo di oscillazione o il periodo di rivoluzione intorno al centro di forza non dipendono dall'ampiezza o dalle dimensioni dell'orbita. La seconda relazione esprime la terza legge di Keplero. Però nel caso in esame, questa legge è valida soltanto per le particelle che percorrono traiettorie geometricamente simili.

XII. MECCANICA DEI FLUIDI

§ 89. *Proprietà generali dei fluidi*

1. A differenza dei corpi solidi, i *liquidi e i gas in stato di equilibrio non possiedono un'elasticità di forma* [1], *ma presentano un'elasticità di volume. Nei liquidi e nei gas in stato di equilibrio gli sforzi sono sempre normali alla superficie sulla quale essi agiscono.* Gli sforzi tangenziali provocano soltanto un cambiamento di forma dei volumi elementari dei corpi (scorrimenti) senza modificarne il volume. Per ottenere tali deformazioni nei liquidi e nei gas non c'è bisogno di nessun sforzo, quindi in stato di equilibrio gli sforzi tangenziali non compaiono in questi mezzi. Dal punto di vista della meccanica i *liquidi ed i gas possono essere definiti come mezzi in cui, in stato di equilibrio, gli sforzi tangenziali non possono esistere.*

Da questa definizione risulta che nei liquidi e nei gas in stato di equilibrio la grandezza dello sforzo normale non dipende dall'orientamento della superficie su cui agisce. Per dimostrarlo prendiamo una superficie elementare arbitrariamente orientata, la cui normale esterna è definita dal vettore unitario $\boldsymbol{n}$. Dato che lo sforzo è normale alla superficie si può rappresentarlo nella forma $\boldsymbol{\sigma}_n = -P\boldsymbol{n}$. Gli sforzi sulle superfici perpendicolari agli assi delle coordinate si scriveranno come $\boldsymbol{\sigma}_x = -P_x\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{\sigma}_y = -P_y\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{\sigma}_z = -P_z\boldsymbol{k}$, dove $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ sono i vettori degli assi delle coordinate. Portando questi valori nella formula (74.1) si ottiene

$$P\boldsymbol{n} = P_x n_x \boldsymbol{i} + P_y n_y \boldsymbol{j} + P_z n_z \boldsymbol{k}.$$

Moltiplicando scalarmente questa relazione successivamente per $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$, si ha

$$P = P_x = P_y = P_z. \qquad (89.1)$$

Ne deriva che *in stato di equilibrio la tensione normale (la pressione P) non dipende dall'orientamento della superficie su cui agisce.* Questa è la *legge di Pascal* (1623-1662).

2. Nei gas uno sforzo normale è sempre diretto all'interno del gas, cioè ha *un carattere di pressione*. Nei liquidi possono realizzarsi, come eccezione, anche casi in cui uno sforzo normale sia *una tensione* (pressione negati-

[1] Ad eccezione delle pellicole liquide e degli strati superficiali dei liquidi. I fenomeni che ne risultano non saranno studiati nel presente capitolo, ma nel II° volume del nostro corso.

va): i liquidi oppongono resistenza alla rottura. In generale, questa resistenza è assai notevole e nei liquidi omogenei presenta parecchie decine di newton per millimetro quadrato. Ma i liquidi normali non sono omogenei. Essi contengono piccolissime bolle di gas che agiscono come tagli in una corda tesa e diminuiscono fortemente la resistenza alla rottura del liquido. Perciò nella maggioranza dei casi gli sforzi che si esercitano nei liquidi hanno carattere di pressioni. Ecco perché per indicare gli sforzi normali utilizziamo l'indice $-Pn$ (pressione) e non l'indice $+Tn$ (tensione). Se la pressione si trasforma in tensione, cioè diventa negativa, la continuità del liquido, di regola, è interrotta. Alle particolarità osservate è legata la proprietà dei gas di dilatarsi illimitamente: il gas riempie sempre per intero il volume del recipiente in cui è contenuto. Ogni liquido invece possiede *un proprio volume* che varia leggermente con il cambiamento della pressione esterna. I liquidi hanno una superficie libera e possono raccogliersi in gocce. Per rilevare queste particolarità i mezzi liquidi sono anche chiamati *liquidi a gocce*. Quando in meccanica si esamina il moto dei liquidi acquosi e dei gas, si considera di solito il gas un caso particolare dello stato liquido. Quindi per liquido si intende in generale un liquido acquoso o un gas. La *parte della meccanica dedicata allo studio del moto e dell'equilibrio dei fluidi si chiama idrodinamica.*

3. La pressione che esiste in un fluido è determinata dalla sua compressione. E poiché non compaiono sforzi tangenziali, le proprietà elastiche dei fluidi rispetto a piccole deformazioni sono caratterizzate soltanto da una sola costante elastica: il *coefficiente di comprimibilità*

$$\gamma = -\frac{1}{V}\frac{dV}{dP}, \qquad (89.2)$$

o la grandezza inversa detta *modulo di compressione triassiale*

$$K = -V\frac{dP}{dV}. \qquad (89.3)$$

Si suppone che durante la compressione la temperatura del fluido rimanga costante. Nello studio di deformazioni accompagnate da cambiamenti della temperatura del fluido, è preferibile scrivere al posto delle formule (89.2) e (89.3)

$$\gamma_T = -\frac{1}{V}\left(\frac{dV}{dP}\right)_{T=\mathrm{cost}}, \qquad (89.2a)$$

$$K_T = -V\left(\frac{dP}{dV}\right)_{T=\mathrm{cost}}, \qquad (89.3a)$$

e chiamare γ_T e K_T rispettivamente *coefficiente di comprimibilità e modulo di compressione triassiale.* Nei proccessi rapidi praticamente senza varia-

zione di calore, un ruolo importante svolgono i *coefficienti* e *moduli di elasticità adiabatica* (cfr. § 75, punto 8).

Esaminando le deformazioni dei corpi solidi, abbiamo definito il modulo di compressione triassiale dalla formula (77.3) che si distingue dalla formula (89.3) sostituendo semplicemente P alla grandezza dP. È stato possibile dare una tale definizione, perché ogni corpo solido possiede un volume ben determinato quando la pressione esterna P si riduce a zero e questo volume cambia poco persino per variazioni finite della pressione P. La formula (89.3) si riduce alla formula (77.3), se si pone $dP = P - P_0$ con $P_0 = 0$. Così, si potrebbe procedere anche nel caso di liquidi acquosi, invece nel caso di gas la formula (77.3) non è applicabile e si deve utilizzare la formula (89.3) più generale, perché in assenza di pressione esterna il volume del gas diventa infinitamente grande. Proprio così abbiamo proceduto nel § 85 quando abbiamo preso in considerazione il problema della velocità del suono in un gas.

Si potrebbe anche dire che in generale si prende un certo stato del corpo dotato di pressione P_0 (e temperatura T) per stato *normale* e se ne considera la variazione di volume rispetto a quest'ultimo. Per i corpi solidi e i liquidi acquosi il modulo di elasticità (89.3) risulta largamente indipendente dal valore della grandezza P_0, perciò si può mettere $P_0 = 0$. Nel caso di un gas invece è importante precisare il valore di P_0 dato che P_0 non può essere uguale a zero. Così se si utilizza la legge di Boyle-Mariotte $P \sim 1/V$ (per $T = \text{cost}$), è facile ottenere dalla formula (89.3) $K = P$. Ciò dimostra che si può parlare di modulo di elasticità di un gas solo quando ne sia indicata la pressione (a una determinata temperatura che rimanga costante).

4. La leggera comprimibilità dei fluidi acquosi può essere illustrata per mezzo del seguente esperimento di grande effetto. Si riempie a metà di acqua un recipiente in plastica. Se si spara un colpo di fucile di piccolo calibro al di sopra del livello dell'acqua, la pallottola perfora soltanto le pareti del recipiente senza romperlo. Se, invece, la pallottola colpisce il recipiente di qualche centimetro più basso rispetto al livello dell'acqua lo manda in frantumi. Il fatto è che la pallottola per penetrare nell'acqua deve comprimerla di un volume uguale al suo o sollevarla. Poiché manca il tempo per sollevare l'acqua, si verifica una compressione che nel liquido sviluppa forti pressioni che infrangono le pareti del recipiente. Per dimostrare questo esperimento vanno bene anche una cassetta di legno o una scatola di carta riempite d'acqua. In questo caso può andare anche un fucile ad aria compressa. Fenomeni analoghi si producono qualora esplodano bombe subacque antisommergibili. A causa della scarsa comprimibilità dell'acqua, un'esplosione subacquea sviluppa enormi pressioni, tali da danneggiare il sommergibile.

La scarsa comprimibilità dei liquidi permette in molti casi di ignorarne del tutto le variazioni di volume. Si può così introdurre la nozione di *fluido assolutamente incomprimibile*. Questa ipotesi viene spesso usata. È eviden-

te che anche nei fluidi incomprimibili la pressione dipende dal suo grado di comprimibilità. Ma anche nel caso di grandi pressioni, le variazioni di volume di un « fluido incomprimibile » sono talmente piccole da poterle ignorare. Si può dire che un fluido incomprimibile è il caso limite di un liquido comprimibile, in cui per ottenere una pressione infinitamente grande è sufficiente un piccolo grado di compressione. Un fluido incomprimibile è anche un'astrazione esattamente come un corpo solido. Per capire il meccanismo della comparsa degli sforzi interni è essenziale conoscere le deformazioni dei corpi solidi. Ma quando le deformazioni sono piccole si può in certi casi sostituire al corpo reale un solido ipotizzato. Il corpo solido è il caso limite di corpo reale in cui la comparsa di sforzi infinitamente grandi è determinata da deformazioni infinitamente piccole.

La possibilità di sostituire o no a un fluido reale quello ipotizzato dipende non tanto dalla scarsità di comprimibilità del fluido quanto dalla natura dei problemi da risolvere. Così, nello studio delle onde sonore, non si può, in linea di principio, ignorare la comprimibilità dei fluidi. Nello studio, invece, delle correnti d'aria, a condizione che gli sbalzi di pressione non siano troppo grandi, si può spesso considerare l'aria un fluido incomprimibile (cfr. § 94, punto 5).

5. In stato di equilibrio la pressione P di un liquido (o di un gas) varia secondo le variazioni della densità ρ e della temperatura T. La pressione dipende univocamente dai valori di questi parametri. La relazione tra la pressione, la densità e la temperatura in stato di equilibrio

$$P = f(\rho, T) \tag{89.4}$$

si chiama *equazione di stato*. Essa può avere diverse forme a seconda della natura della sostanza e assume forme particolarmente semplici nel caso di gas rarefatti. I problemi legati all'equazione di stato saranno esaminati dettagliatamente nel II° volume del corso. Qui ci limiteremo ad osservare che, conoscendo l'equazione di stato, si può calcolare il modulo di elasticità isotermico K_T mediante una semplice derivazione. Nel caso generale è una funzione della densità e della temperatura o della pressione e della temperatura.

6. *Se il fluido è in moto, al pari degli sforzi normali possono comparire anche forze tangenziali.* Queste però sono definite non dalle deformazioni stesse dei fluidi (dagli spostamenti), ma dalle loro *velocità*, cioè dalle derivate delle deformazioni rispetto al tempo. Perciò vanno classificate come *forze d'attrito* o di *viscosità* e vengono chiamate forze *tangenziali* o di *spostamento d'attrito interno*. Al pari delle forze tangenziali, possono esistere anche forze *normali* o *volumetriche* d'attrito interno. Queste si distinguono dalle forze di pressione solite P per il fatto che sono determinate non dal grado di comprimibilità ma dalla *velocità di variazione della compressione rispetto al tempo*. Queste forze svolgono un ruolo importante nei processi rapidi, nella propagazione degli ultrasuoni, ad esempio, (la cui lunghezza si

avvicina alle distanze intermolecolari). Nel caso limite, quando la velocità di variazione delle deformazioni di un liquido tende a zero, tutte le forze d'attrito interno sia di compressione che di spostamento disperdono. Un fluido in cui non siano presenti forze d'attrito interno (sia tangenziali che normali), qualunque sia il suo moto, si chiama *perfetto*. In altre parole, è detto perfetto il fluido in cui possono manifestarsi soltanto forze di pressione normale P univocamente determinabile dal grado di compressione e dalla temperatura del fluido. Queste forze possono essere calcolate per mezzo dell'equazione di stato (89.4) sia per un fluido a riposo che per un fluido in moto arbitrario. È evidente che non esistono a rigore di termini fluidi perfetti. Sono astrazioni che possono essere utilizzate quando la velocità di variazione delle deformazioni in un fluido non sia troppo grande.

7. Se si applicano ad un fluido sforzi tangenziali, esso si mette in moto Questo moto alla fine cessa e si trasforma in stato a riposo, dove non con paiono sforzi tangenziali. La velocità di variazione delle deformazioni di un fluido può variare grandemente. In liquidi come l'acqua o l'alcool, ad esempio, queste variazioni sono molto rapide, mentre in liquidi assai viscosi come il miele o la melassa sono molto lente. Infine, esistono sostanze che, sottoposte a forze rapide, si comportano come solidi o come liquidi se sottoposte ad azioni lente. Sono le cosiddette *sostanze solide amorfe* o *corpi solidi amorfi*. Un pezzo di pece liquida o di asfalto, ad esempio, si spezza se colpito con un martello, ma sull'asfalto si può camminare senza distruggerlo. Tra l'altro l'asfalto contenuto in una botte scorre molto lentamente, per settimane e mesi. La velocità di scorrimento aumenta fortemente con la temperatura. Un'asticella di vetro, le cui estremità poggino su due sostegni, s'incurva col passar del tempo (dopo mesi e anni) e la curvatura non scompare neppure con la cessazione dell'azione di gravità. Questi esempi, anche se sono pochi, dimostrano che non si può fare una netta distinzione tra fluidi e corpi solidi amorfi. Veramente solidi sono soltanto i *cristalli*. Ad ogni modo, parlando dei fluidi dovremo tener sempre presente che essi non possiedono una viscosità incredibilmente grande, quando sia ben chiara la loro diversità dai corpi solidi amorfi.

§ 90. *Equazioni fondamentali di equilibrio e di moto dei fluidi*

1. Le forze che agiscono in un fluido di solito si suddividono, come in ogni altro mezzo continuo, in forze di *massa* (volumetriche) ed in forze *superficiali*. Una forza di massa è proporzionale alla massa dm e quindi al volume dV dell'elemento del liquido su cui essa agisce. Si può indicare questa forza come fdV, chiamando f la *densità volumetrica delle forze di massa*. Tra le forze di massa più importanti vanno considerate le forze di gravità e le forze d'inerzia (quando il moto si esamina nei sistemi non inerziali). Nel caso della forza di gravità $f = \rho g$, dove ρ è la densità del liquido e g, l'accelerazione della forza di gravità. Le forze superficiali sono delle forze alle

quali è sottoposto ogni volume elementare del fluido, a causa degli sforzi normali e tangenziali dovuti alle parti vicine del liquido.

2. Consideriamo il caso in cui non si applichino sforzi tangenziali, ma solo forze di pressione normale. È ciò che si produce sempre in un fluido perfetto qualunque sia il moto. Per gli altri liquidi questa situazione si realizza, se il liquido è a riposo, cioè in *idrostatica*. Calcoliamo la risultante delle forze di pressione che agiscono su un elemento del volume dV infinitamente piccolo del fluido. Determiniamo dapprima la proiezione di questa risultante sulla direzione dell'asse delle coordinate X. Scegliamo per volume elementare dV un cilindro infinitamente piccolo con un'area delle basi dS e di lunghezza dx (fig.230) orientato lungo l'asse X. Indichiamo rispetti-

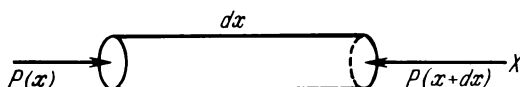



Fig. 230.

vamente con x e $x+dx$ le ascisse delle basi del cilindro. La forza di pressione che agisce sulla prima base è $P(x)dS$ e sulla seconda è $P(x+dx)dS$. Tra parentesi dopo P è indicato il valore della variabile x dalla quale dipende P. È evidente che P può dipendere anche dalle coordinate y, z e anche dal tempo t. Ma poiché tutte queste variabili non variano quando si passa da una base del cilindro all'altra possiamo nel caso in esame considerarle costanti. Si potrebbe, se si volesse, prendere le dimensioni trasversali del cilindro infinitamente piccole d'ordine superiore rispetto alla lunghezza dx. Allora y e z possono essere considerate delle costanti non soltanto per gli spostamenti lungo il cilindro, ma anche per gli spostamenti trasversali. Le forze di pressione che agiscono sulle pareti laterali del cilindro sono perpendicolari all'asse X e non hanno perciò nessuna importanza nel calcolo delle componenti lungo quest'asse. Dunque la proiezione sull'asse X delle forze di pressione che agiscono sull'elemento di volume del liquido in esame è

$$[P(x) - P(x + dx)]dS.$$

La differenza infinitamente piccola che figura tra parentesi quadre può essere sostituita dal differenziale della funzione P

$$P(x + dx) - P(x) = dP_{\substack{y = \text{cost} \\ z = \text{cost} \\ t = \text{cost}}} = \left(\frac{dP}{dx}\right)_{\substack{y = \text{cost} \\ z = \text{cost} \\ t = \text{cost}}} dx.$$

Le condizioni supplementari $y = \text{cost}$, $z = \text{cost}$, $t = \text{cost}$ indicano che nel calcolo della derivata dP/dx e del differenziale dP si devono considerare costanti y, z e t. La derivata della funzione $P(x, y, z, t)$ presa in queste condizioni supplementari, come è noto, si chiama *derivata parziale* e viene indi-

cata con $\frac{\partial P}{\partial x}$. Utilizzando questa notazione si ottiene per la proiezione della forza calcolata

$$-\frac{\partial P}{\partial x}\,dS\,dx = -\frac{\partial P}{\partial x}\,dV,$$

perché $dS\,dx = dV$. La proiezione è anche proporzionale al valore dell'elemento del volume dV e può essere indicata con $s_x dV$. La grandezza s_x è la componente x della forza che agisce sull'unità di volume del fluido che compare a causa della variazione della pressione normale P nello spazio. Per il suo significato questa grandezza non può dipendere dalla forma dell'elemento dV. Abbiamo dato a dV la forma di un cilindro soltanto per maggiore semplicità ed evidenza di calcolo. Utilizzando lo stesso procedimento si possono calcolare le proiezioni s_y e s_z, orientando i cilindri elementari dV parallelamente agli assi Y e Z. Si ottiene così che sull'unità di volume del fluido agisce una forza $\boldsymbol{s}$ determinata dalle forze di pressione superficiali o più esattamente dalle loro variazioni nello spazio. Le proiezioni sono uguali a

$$s_x = -\frac{\partial P}{\partial x}, \quad s_y = -\frac{\partial P}{\partial y}, \quad s_z = -\frac{\partial P}{\partial z}. \tag{90.1}$$

Il vettore stesso $\boldsymbol{s}$ è uguale a

$$\boldsymbol{s} = -\frac{\partial P}{\partial x}\boldsymbol{i} - \frac{\partial P}{\partial y}\boldsymbol{j} - \frac{\partial P}{\partial z}\boldsymbol{k}, \tag{90.2}$$

ossia in breve

$$\boldsymbol{s} = -\operatorname{grad} P. \tag{90.3}$$

Abbiamo introdotto la notazione

$$\operatorname{grad} P \equiv \frac{\partial P}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial P}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial P}{\partial z}\boldsymbol{k}. \tag{90.4}$$

Questo vettore si chiama *gradiente dello scalare P* (si veda anche § 29). Quindi la *densità volumetrica* $\boldsymbol{s}$ *della risultante delle forze di pressione che agiscono sugli elementi del volume di un fluido è uguale al gradiente P di segno contrario.* Si vede che la forza $\boldsymbol{s}$ è determinata non dal valore della pressione P, ma delle sue *variazioni spaziali.* Ciò nondimeno anche la grandezza P è importante, poiché determina il *grado di compressione del fluido* nel punto considerato dello spazio.

3. In stato di equilibrio la forza $\boldsymbol{s}$ deve essere compensata dalla forza di massa $\boldsymbol{f}$. La relazione è espressa dall'equazione

$$\operatorname{grad} P = \boldsymbol{f}, \tag{90.5}$$

che è l'*equazione fondamentale dell'idrostatica.* Per le coordinate si esprime nel modo seguente:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = f_x, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = f_y, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = f_z. \tag{90.6}$$

Si può scrivere anche l'equazione fondamentale dell'idrodinamica di un fluido perfetto. Poiché la formula (90.3) resta valida anche in questo caso, si ottiene

$$\rho\frac{dv}{dt} = f - \operatorname{grad} P, \tag{90.7}$$

dove v è la velocità e dv/dt l'accelerazione del liquido nel punto considerato. L'equazione (90.7) si chiama *equazione di Eulero.*

4. L'equazione (90.5) dimostra che in stato di equilibrio la forza f (più esattamente la densità della forza o la forza che agisce sull'unità di volume del liquido) deve essere espressa dal gradiente di una funzione scalare univoca. È questa una condizione necessaria e sufficiente perché la forza f sia conservativa (cfr. § 29). Quindi, *perché un fluido sia in equilibrio è necessario che il campo di forze in cui si trova il fluido sia conservativo.* Nei campi di forze non conservativi l'equilibrio non è possibile.

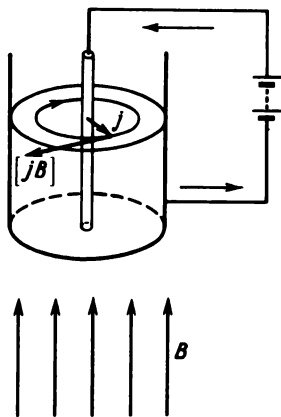



Fig. 231.

Come esempio può servirci un liquido conduttore posto in un campo magnetico attraverso il quale passi una corrente elettrica. In questo caso il campo magnetico applica al liquido una forza $f = C[jB]$, dove B è l'intensità (più esattamente l'induzione) del campo magnetico, j la densità di corrente e C un coefficiente numerico il cui valore dipende dalla scelta delle unità di misura. Mettiamo un recipiente cilindrico contenente una soluzione elettrolitica ($CuSO_4$, ad esempio) al di sopra di uno dei poli di un potente elettromagnete (fig.231). Lungo l'asse del recipiente è disposto un conduttore cilindrico. Tra il conduttore e la parete laterale del recipiente applichiamo una tensione elettrica di qualche volt. Allora nell'elettrolita lungo i raggi del recipiente passerà la corrente elettrica. La forza $f = C[jB]$ sarà orientata lungo le tangenti ai cerchi i cui centri si troveranno sull'asse del recipiente. Essa provocherà una rotazione del liquido intorno all'asse indicato. La rotazione accelererà finché le forze create dal campo magnetico non siano compensate dalle forze d'attrito interno ed esterno.

§ 91. *Idrostatica dei fluidi incomprimibili*

1. Se non ci sono forze di massa ($f = 0$), le equazioni (90.6) si riducono a $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial z} = 0$. *Ne segue che in stato di equilibrio la pressione P* è la stessa in tutti i punti del fluido.

Se il fluido si trova in un campo di gravità, si ha $f = \rho g$. Orientiamo l'asse Z lungo la verticale ascendente. Allora le equazioni fondamentali di equilibrio del fluido assumeranno la forma seguente

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g. \tag{91.1}$$

Ne risulta che in stato di equilibrio meccanico la pressione nc . può dipendere né da x e né da y, ma deve rimanere costante in ogni pian orizzontale, $x = \text{cost}$. I piani orizzontali sono dei *piani di pressione identic* . In particolare, la superficie libera di un fluido è orizzontale, poiché si .rova sottoposta a una pressione atmosferica costante. Quindi, in stato di equilibrio meccanico la pressione può dipendere soltanto dalla coordinata z. Dalla terza equazione (91.1) deriva quindi che per ottenere l'equilibrio meccanico basta che il prodotto ρg sia funzione di z. Poiché g non dipende né da x né da y (ignoriamo qui la dipendenza di g dalla longitudine e latitudine geografiche del luogo), la densità ρ può variare soltanto con l'altezza. Secondo l'equazione di stato (89.4) la pressione P e la densità ρ determinano la temperatura T del liquido. Dunque, *in stato di equilibrio meccanico la pressione, la temperatura e la densità di un fluido sono solo funzioni di z e non possono dipendere né da x né da y.*

2. Supponiamo che il fluido sia *omogeneo* e si possa considerare *incomprimibile* ($\rho = \text{cost}$). Inoltre considereremo costante l'accelerazione della gravità g ignorandone la dipendenza dall'altezza z. Allora l'ultima equazione della formula (91.1) è facile da integrare. In seguito a questa integrazione si ottiene

$$P = P_0 - \rho g z. \tag{91.2}$$

La costante di integrazione P_0 è la pressione del fluido all'altezza $z = 0$, cioè la pressione atmosferica, se si pone l'origine delle coordinate sulla superficie libera del fluido. La formula (91.2) determina anche la pressione che il fluido esercita sul fondo e sulle pareti del recipiente, nonché su tutta la superficie del corpo immerso nel fluido. Essa riassume tutta l'idrostatica insegnata alle scuole superiori.

3. Consideriamo ora la *legge di Archimede* (287-212 circa a. C.) ed i problemi ad essa collegati. Scegliamo mentalmente un volume qualunque di fluido limitato da una superficie chiusa S (fig.232). Se il fluido è in equilibrio meccanico, è chiaro che anche il volume scelto deve trovarsi in equilibrio. Perciò devono annullarsi la risultante e il momento di tutte le forze esterne che agiscono sul volume considerato. Le forze esterne sono il peso

Q del volume di fluido scelto e la pressione sulla superficie S da parte del fluido circonvicino. Il che significa che la risultante F delle forze di pressione idrostatiche applicate alla superficie S deve essere uguale a Q, cioè al peso del fluido contenuto nel volume limitato dalla superficie S. Questa risultante deve essere diretta verso l'alto e passare per il centro di massa A del volume scelto del fluido, affinché il momento totale delle forze esterne applicate ad esso sia uguale a zero. Ammettiamo ora che sia scaricato tutto il fluido contenuto nel volume scelto e sostituito da un corpo solido qualunque. Se questo corpo si mantiene in equilibrio, il mezzo circonvicino *non subirà nessun cambiamento.* Non varierà anche la pressione applicata dal mezzo circonvicino alla superficie S. Così arriviamo alla legge di Archimede. *Se un corpo immerso nel fluido si mantiene in equilibrio meccanico, esso subisce da parte del mezzo circonvicino una spinta verticale uguale al peso del fluido spostato. Questa spinta verticale è diretta dal basso in alto e passa per il centro di massa A del fluido spostato dal corpo.* Chiamiamo il punto *A centro di galleggiabilità del corpo.* Dimostreremo più avanti che la posizione di questo punto determina l'*equilibrio* e la *stabilità* dei corpi galleggianti.

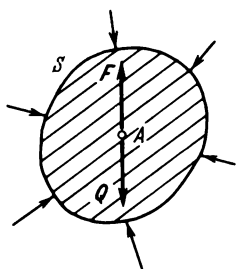



Fig. 232.

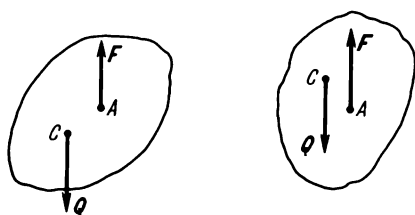



Fig. 233.

4. Con la legge di Archimede si risolve il problema dell'equilibrio dei corpi galleggianti in un fluido. *Perché un corpo galleggiante sia in equilibrio, è necessario che il suo peso sia uguale al peso del fluido spostato e che il suo centro di galleggiabilità A si trovi sulla verticale che passa per il centro di massa del corpo stesso.* Quanto alla stabilità d'equilibrio, si devono distinguere due casi diversi.

Caso 1. Il corpo intero è immerso in un fluido. Qualunque siano gl spostamenti e le rotazioni del corpo, i centri di massa C e di galleggiabilità A conservano posizioni invariate rispetto al corpo. L'*equilibrio è stabile, se il centro di massa C del corpo si trova al di sotto del centro di galleggiamento A ed è instabile se al contrario il centro di galleggiamento si trova al di sopra di A.* Infatti, se si fa ruotare lievemente il corpo rispetto alla posizione di equilibrio intorno all'asse orizzontale, in ambedue i casi il momento di coppia delle forze Q e F cercherà di fare abbassare il punto C e di far alzare A (fig.233). Come risultato il corpo occupa una posizione di equilibrio stabile perché il punto C è posto sotto il punto A.

Caso 2. Un corpo galleggiante è immerso in un fluido non per intero, ma solo parzialmente ed emerge in parte al di sopra della superficie libera del fluido. Rispetto al precedente, questo caso è più complicato poiché, spostando il corpo dalla posizione di equilibrio, il volume del liquido spostato dal corpo cambia forma. Per questa ragione la posizione del centro di galleggiamento rispetto al corpo galleggiante si altera, il che complica il problema. Il caso considerato è di grande interesse nello studio della stabilità delle navi. Sulla figura 234, *a* è rappresentato schematicamente lo scafo di una nave nella posizione « di chiglia » in cui il centro di massa C e il centro di galleggiamento A si trovano su una stessa verticale che coincide con l'asse di simmetria verticale della nave. Se la nave si inclina di un piccolo angolo φ (fig.234,*b*) il centro di galleggiamento si sposta rispetto alla nave

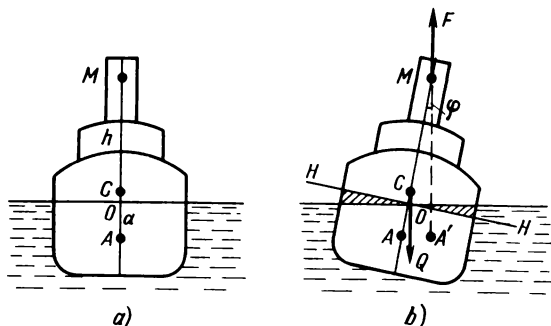



Fig. 234.

verso il punto A' che si trova praticamente alla stessa altezza dal punto A. Ora la spinta passa per il punto A' e la sua linea d'azione interseca l'asse verticale di simmetria della nave nel punto M, detto *metacentro*. Se il metacentro si trova al di sopra del centro di massa della nave, il momento di coppia delle forze $\boldsymbol{Q}$ e $\boldsymbol{F}$ farà ritornare la nave alla sua posizione iniziale. In questo caso l'equilibrio della nave è stabile. Se invece il metacentro M si trova al di sotto del centro di massa della nave, la coppia delle forze $\boldsymbol{Q}$ e $\boldsymbol{F}$ farà deviare ancora di più la nave dalla sua posizione iniziale, quindi l'equilibrio della nave è instabile. La distanza h tra i punti C e M si chiama *altezza metacentrica. Se l'altezza metacentrica è positiva, l'equilibrio è stabile, mentre se è negativa, l'equilibrio è instabile.* Più l'altezza h è grande, più l'equilibrio è stabile. Il momento di coppia delle forze $\boldsymbol{Q}$ e $\boldsymbol{F}$ che fa ritornare la nave alla posizione d'origine si chiama *momento di rettifica* ed è evidentemente uguale a

$$M = Qh \sin \varphi. \qquad (91.3)$$

La grandezza h dipende essa stessa da φ, poiché col variare dell'inclinazione φ varia anche la posizione del metacentro rispetto alla nave. Si deter-

minino la posizione del metacentro e l'altezza metacentrica h nel caso limite di angoli d'inclinazione φ infinitesimali.

Poiché la spinta passa per il punto A' ed è diretta verticalmente verso l'alto, il suo momento rispetto al punto A sarà uguale a $N = Q \cdot AM \sin \varphi$ ossia (per piccoli angoli φ) $N = Q(h + a)\varphi$, dove a è la distanza tra il centro di massa C della nave e il suo centro di galleggiamento in equilibrio. La grandezza a si considera positiva, se il punto C si trova al di sopra del punto A ed è negativa se si trova al di sotto. Il valore del momento N non dipende evidentemente dalla scelta del punto d'applicazione della spinta $\boldsymbol{F}$ sulla linea $A'M$. Scomponiamo la forza $\boldsymbol{F}$ in una componente $\boldsymbol{F}_{\parallel}$, parallela all'asse AM della nave, e in una componente $\boldsymbol{F}_{\perp}$, perpendicolare a quest'asse. Se il punto d'applicazione della forza $\boldsymbol{F}$ si trova in A', il momento della componente $\boldsymbol{F}_{\perp}$ rispetto al centro di galleggiamento A sarà uguale a zero ed il calcolo sarà semplificato, poiché allora il momento totale N sarà dato dalla sola componente $\boldsymbol{F}_{\parallel}$. È evidente che il momento di questa componente sarà uguale in tutti i punti dell'asse AM. Dall'enunciato deriva che la grandezza $N = Q(h + a)\varphi$ può essere considerata il momento della spinta della pressione rispetto ad un punto arbitrario dell'asse AM, a condizione che si sottraggono a queste forze attive le componenti perpendicolari all'asse stesso. Quindi il momento N può essere calcolato in altro modo. Se la nave è inclinata di un angolo φ, le spinte della pressione che agiscono sulla parte destra della nave aumenteranno, mentre quelle che agiscono sulla parte sinistra diminueranno. È evidente che si tratta non di forze totali, ma unicamente delle componenti parallele a AM. Sia x la distanza (la coordinata) tra un punto qualunque del piano HH e l'asse Y che passa per il punto O perpendicolarmente al piano della figura. Allora l'aumento della pressione nel punto corrispondente del fondo dello scafo della nave sarà uguale a $\rho g x \varphi$, e il momento N sarà rappresentato dall'espressione

$$N = \rho g \varphi \int x^2 dS = \rho g I \varphi,$$

dove I è il *momento d'inerzia* rispetto all'asse Y della sezione trasversale della nave lungo la linea di galleggiamento rispetto all'asse $Y: I = \int x^2 dS$ (si veda § 80, punto 1). Paragonando le due formule dell'espressione, per N, si ottiene

$$h = \frac{I}{V} - a, \qquad (91.4)$$

dove $V = (Q/\rho g)$ è la *stazza della nave,* cioè il volume dell'acqua spostata dal peso della nave.

5. Consideriamo ora un liquido contenuto in un recipiente in rotazione uniforme intorno ad un asse verticale ad una velocità angolare ω. Si suppone che il liquido ruoti insieme con il recipiente e che il recipiente presenti una simmetria assiale, di forma cilindrica, ad esempio. Questo problema si riduce al problema statico, se si passa ad un sistema di riferimento in rotazione nel quale il liquido si trovi a riposo. Allora la forza f che figura

nell'equazione (90.5) è la somma della forza di gravità $\rho \boldsymbol{g}$ e della forza centrifuga $\rho\omega^2\boldsymbol{r}$, dove $\boldsymbol{r}$ è il raggio vettore condotto dell'asse di rotazione al punto considerato, perpendicolarmente all'asse. Se si pone l'origine delle coordinate sull'asse di rotazione in modo che l'asse Z coincida con l'asse di rotazione, le equazioni (90.6) assumeranno la forma seguente

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \rho\omega^2 x, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \rho\omega^2 y, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g. \tag{91.5}$$

Considerando ρ costante ed integrando, si ottiene

$$P = \frac{1}{2}\rho\omega^2(x^2 + y^2) - \rho g z + P_0, \tag{91.6}$$

ossia

$$P = \frac{1}{2}\rho\omega^2 r^2 - \rho g z + P_0. \tag{91.6a}$$

L'equazione della superficie libera P = cost assume la forma $1/2\omega^2(x^2 + y^2) - gz$ = cost. È un paraboloide di rivoluzione orientato con la convessità verso il basso. Se si pone l'origine delle coordinate al vertice del paraboloide, la costante P_0 avrà il significato della pressione atmosferica esterna, e l'equazione della superficie libera del liquido sarà allora $1/2\omega^2(x^2 + y^2) = gz$.

È evidente che il problema in esame può anche essere considerato in modo puramente dinamico. Se il liquido ruota come un tutt'uno non compaiono in esso forze d'atrito interno. Le sole forze superficiali che agiscono nel liquido sono le forze di pressione normale. Si può perciò in questo caso utilizzare l'equazione d'Eulero (90.7) indipendentemente dal fatto che il liquido sia perfetto o viscoso. Se la rotazione è uniforme, la derivata $\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}$ si riduce all'accelerazione centripeta $-\omega^2\boldsymbol{r}$. Perciò ponendo $\boldsymbol{f} = \rho\boldsymbol{g}$ nell'equazione (90.7), si ottiene

$$-\rho\omega^2\boldsymbol{r} = \rho\boldsymbol{g} - \text{grad}\, P,$$

equazione vettoriale equivalente alle tre equazioni (91.5).

Se il recipiente ha fondo piatto, per calcolare la pressione sul fondo si deve porre nella formula (91.6a) $z = -h$, dove h è l'altezza del livello del liquido sopra il fondo sull'asse di rotazione (ricordiamo che l'asse Z è orientato verso l'alto). Si ottiene

$$P - P_0 = \rho g h + \frac{1}{2}\rho\omega^2 r^2. \tag{91.7}$$

Quindi al centro del recipiente la pressione è minima, ma cresce man mano che ci si avvicina alle pareti. A ciò è legato il seguente effetto. Se con un cucchiaino si mette in rotazione il tè contenuto in una tazza, le foglie di tè si raccolgono al centro sul fondo. Le foglie sono infatti più pesanti dell'acqua e scendono sul fondo dove la loro rotazione rallenta per l'attrito col fondo della tazza, a cause della differenza di pressioni idrostatiche le foglie si spostano verso il centro del fondo.

Calcoliamo ora la forza di pressione totale che agisce sul fondo della tazza. A questo scopo utilizzeremo l'equazione della superficie libera del liquido $1/2\omega^2 r^2 = gz$ e riscriveremo la formula (91.7) nella forma $P-P_0= =\rho g(h+z)$. Integrando sulla superficie del fondo, si ottiene la forza cercata

$$F = \rho g\int(h + z)dS = \rho gV, \tag{91.8}$$

dove V è il volume del liquido contenuto nella tazza. Come ci si poteva aspettare, la forza totale è uguale al peso del volume del liquido.

Problemi

1. Un liquido è versato in un recipiente a forma di parallelepipedo rettangolare. Si calcoli il momento delle forze di pressione idrostatica che agiscono su una parete laterale rispetto alla sua base.

Risposta. $M = \frac{1}{3}\rho g h^2 S$, dove h è l'altezza del livello del liquido rispetto al fondo del recipiente, S è la superficie della parete laterale considerata.

2. Il *paradosso idrostatico.* La forza di pressione che un liquido esercita sul fondo di un recipiente dipende non dalla forma, ma dalla superficie del fondo, dalla differenza di livello tra il fondo e la superficie libera nonché dalla densità del liquido. Questa forza sarà identica per tutti e tre i recipienti della figura 235 qualora la superficie del fondo e il livello del liquido siano uguali per tutti e tre i recipienti. Se si pesano i recipienti pieni, la bilancia deve indicare lo stesso peso per i tre contenitori dato che il peso è dato dalla forza con cui il fondo del recipiente preme sul piatto della bilancia. Si scopra l'errore di ragionamento commesso. Quali saranno le indicazioni reali forniteci dalla bilancia?

3. Si dimostri la validità della legge di Archimede mediante il calcolo diretto della risultante delle forze di pressione esercitate dal liquido sulla superficie di un corpo immerso e dei momenti di queste forze.

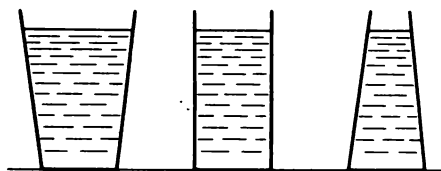
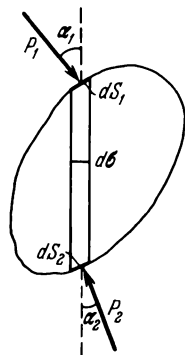



Fig. 235. Fig. 236.

Suluzione. Scomponiamo mentalmente il corpo immerso in colonnine verticali infinitamente sottili (fig.236). Supponiamo, per semplificare, che ogni colonnina intersechi la superficie del corpo soltanto due volte. (Il lettore è invitato ad esaminare il caso in cui questa condizione non sia rispettata.) Siano dS_1 e dS_2 le superfici elementari delimitate da una colonnina sulla superficie del corpo. Le forze che agiscono su queste superfici sono normali a queste ultime e uguali rispettivamente a $P_1 dS_1$ e $P_2 dS_2$. Le loro componenti verticali saranno $P_1 dS_1 \cos \alpha_1$

e $P_2 dS_2 \cos\alpha_2$, ossia $P_1 d\sigma$ e $P_2 d\sigma$, dove $d\sigma = dS_1 \cos\alpha_1 = dS_2 \cos\alpha_2$ è la superficie della sezione normale della colonnina. La risultante di queste due forze diretta verso l'alto è uguale a $dF_z = (P_2 - P_1)d\sigma = \rho g h d\sigma = \rho g dV$, dove h è l'altezza della colonnina e $dV = hd\sigma$ il suo volume. Estendendo l'integrazione a tutto il volume del corpo, si ottiene la forza di spinta $F_z = \rho g V$. Ora si deve calcolare il momento delle forze di spinta verticali che agiscono sulle colonnine rispetto all'asse arbitrario. Se l'asse è verticale, il momento sarà uguale a zero. È sufficiente quindi calcolare il momento rispetto ad un asse orizzontale qualunque. Prendiamo come tale l'asse delle coordinate X. Il momento cercato sarà $M_x = \int y\, dF_z = g\int \rho y\, dV = g\int y\, dm$, dove dm è la massa del liquido spostata dalla colonnina corrispondente del corpo. Per analogia, il momento rispetto all'asse Y è uguale a $M_y = g\int x\, dm$. Il momento si annullerà quando $\int x\, dm = \int y\, dm = 0$, cioè quando l'origine delle coordinate si trova sull'asse verticale che passa per il centro di galleggiamento. Con ciò si è dimostrato che la linea d'azione della forza di spinta passa per il centro di galleggiamento del corpo. Per concludere la dimostrazione, bisognerebbe determinare anche le forze di pressione orizzontali che agiscono sulla superficie del corpo immerso. Questo problema non esige però uno studio particolare. Se si tratta, ad esempio, di forze parallele all'asse X, è sufficiente suddividere il corpo in colonnine infinitesimali parallele a quest'asse e poi rifare gli stessi calcoli con l'unico accorgimento di porre la grandezza g uguale a zero. Ne segue che la risultante delle forze di pressione orizzontali che agisce sul corpo immerso ed i loro momenti sono uguali a zero.

4. Si determini la condizione di stabilità di un parallelepipedo rettangolare, omogeneo, galleggiante sulla superficie di un liquido in posizione tale che una delle basi sia orizzontale. I lati di questa base orizzontale hanno lunghezza A e B, altezza C(A > B). La densità del corpo galleggiante rispetto al liquido è $\rho < 1$.

Risposta. $B^2 > 6\rho(1 - \rho)C^2$.

5. Si risolva lo stesso problema di stabilità per un cilindro di raggio r e di altezza l, galleggiante in posizione verticale.

Risposta. $r^2 > 2\rho(1 - \rho)l^2$.

6. Si risolva lo stesso problema per un cilindro omogeneo, di raggio r e di lunghezza l, galleggiante in posizione orizzontale.

Risposta. $\frac{l}{r} > \left(2 \sin\frac{\alpha}{2}\right)^2$, dove l'angolo α è determinato dall'equazione trascendente $\alpha - \sin\alpha = 2\pi\rho$. Per $\rho = 1/2$, ad esempio, si ottiene $\alpha = \pi$ e la condizione di stabilità assume la forma $l > 4r$. Per altri valori di ρ l'equilibrio può essere stabile anche con lunghezze l più piccole. Così per $\alpha = \pi/2$ e $\alpha = 3\pi/2$ si ottiene rispettivamente $\rho = 1/4 - 1/(2\pi) \approx 0{,}091$ e $\rho = 3/4 + 1/(2\pi) \approx 0.841$. Con tali valori di ρ l'equilibrio è stabile se $l > 2r$. Con $l > 4r$ l'equilibrio è stabile, purché ci sia $\rho < 1$.

7. Si determini la distribuzione della pressione all'interno del globo terrestre supponendo che sia costituito da un fluido omogeneo, incomprimibile, e ignorando la rotazione assiale della Terra. Si calcoli con la stessa approssimazione il valore delle pressione P_c al centro della Terra (si veda il problema 5 del § 55).

Risposta. $P = \frac{\rho g}{2R}(R^2 - r^2)$, $P_c = \frac{1}{2}\rho g R$, dove r è la distanza dal centro della Terra, R il raggio della Terra. Se il globo terrestre fosse costituito di acqua incomprimibile, avremmo ottenuto $P_c = \frac{1}{20}R$ (P_c in atmosfere, R in metri). Tenendo conto della densità della Terra ($\rho = 5{,}5$) si ha

$$P_c = 0{,}275\ \mathrm{R} \approx 1{,}75 \cdot 10^6\ \mathrm{atm}.$$

8. Si calcoli l'appiattimento del globo terrestre determinato dalla sua rotazione assiale considerando la Terra una sfera liquida incomprimibile.

Soluzione. Poiché la figura della Terra è pressappoco sferica, si può considerare l'accelerazione di gravità all'interno del globo terrestre come diretta al centro della Terra e proporzionale alla distanza dal centro (si veda il problema 5 nel § 55). In questa approssimazione tenen-

do conto della forza centrifuga, le equazioni (90.6) di idrostatica assumono la forma

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -\rho g \frac{x}{R_0} + \rho\omega^2 x,$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\rho g \frac{y}{R_0} + \rho\omega^2 y,$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g \frac{z}{R_0},$$

dove R_0 è il raggio della Terra, ω la velocità angolare di rotazione. Poniamo l'origine delle coordinate al centro della Terra e orientiamo l'asse Z lungo l'asse della rotazione. Integrando queste equazioni, si ottiene

$$P = \frac{\rho}{2}\left(\omega^2 - \frac{g}{R_0}\right)(x^2 + y^2) - \frac{\rho g}{2R_0} z^2 + C,$$

dove C è la costante d'integrazione che viene determinata dalla pressione P sulla superficie terrestre (che si può considerare uguale a zero, poiché la pressione atmosferica è trascurabilmente piccola). L'appiattimento del globo terrestre sarà determinato ipotizzando che la pressione sia uguale su tutta la superficie terrestre. Scegliendo dapprima un punto situato sull'equatore e poi un altro punto situato sul polo, si scrive $P(R_{eq}, 0, 0) = P(0, 0, R_p)$, dove R_{eq} e R_p sono i raggi equatoriale e polare della Terra. Tenuto conto della forma esplicita di P, otteniamo

$$\left(\omega^2 - \frac{g}{R_0}\right) R_{eq}^2 = -\frac{g}{R_0} R_p^2$$

da cui

$$R_{eq} - R_p = \frac{\omega^2}{g} \frac{R_{eq}^2 R_0}{R_{eq} + R_p} \approx \frac{\omega^2 R_0^2}{2g}.$$

Quindi il grado di appiattimento ε del globo è uguale a

$$\varepsilon \equiv \frac{R_{eq} - R_p}{R_0} = \frac{\omega^2 R_0}{2g} \approx \frac{1}{580}.$$

L'appiattimento reale della Terra è notevolmente più grande, cioè è uguale a 1/297. La divergenza è dovuta al fatto che il modello ipotizzato è rozzo e il metodo di calcolo imperfetto. Per un'impostazione rigorosa del problema è necessario tenere conto del fatto che il campo gravitazionale di una sfera appiattita non è centrale.[1] Con ciò il problema si complica dato che il campo gravitazionale, già ignoto a priori, dipende dalla forma non nota della superficie della Terra. Uno studio attento rivela che il problema, formulato in tal modo, non ha soluzione univoca. Sono possibili parecchie diverse forme di superficie d'equilibrio, compreso un ellissoide di rivoluzione di un certo grado di appiattimento.

§ 92. *Formula barometrica*

1. Passiamo ora all'idrostatica di *un liquido comprimibile*. Il problema più interessante è quello dell'equilibrio dell'atmosfera terrestre. Dato che le equazioni differenziali (90.5) e (91.1) sono state stabilite senza utilizzare la

---

[1] Tenendone conto, il calcolo dà

$$\varepsilon = \frac{5}{4}\frac{\omega^2 R_0}{g} \approx \frac{1}{232}.$$

condizione dell'incomprimibilità del liquido, ne approfittiamo adesso. Si possono trascurare le due prime equazioni del sistema (91.1), poiché ci dicono che la pressione P dipende soltanto da z. La terza equazione rimasta può essere riscritta nella forma

$$\frac{dP}{dz} = -\rho g, \tag{92.1}$$

poiché la derivata parziale $\frac{\partial P}{\partial z}$ e la derivata totale $\frac{dP}{dz}$ sono ora identiche. Ma l'equazione (92.1) non basta perché contiene due funzioni incognite, la pressione P e la densità ρ. Per risolvere il problema bisogna stabilire un rapporto supplementare tra P e ρ.

Supponiamo che la composizione dell'atmosfera sia uguale su tutta la sua estensione. La pressione P, la densità ρ e la temperatura T del gas essendo in equilibrio sono legate dall'equazione di stato. Se la densità del gas non è troppo consistente, allora si può utilizzare l'*equazione di Clapeyron* (1799-1864)

$$P = \frac{RT}{\mu}\rho, \tag{92.2}$$

dove μ è il peso molecolare del gas e R la costante universale dei gas il cui valore numerico aprossimativo è

$$R = 8{,}31 \cdot 10^7 \text{erg} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mole}^{-1} = 8{,}31\ \text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mole}^{-1}.$$

La relazione (92.2) permette di eliminare la densità ρ dall'equazione (92.1). Ne risulta che

$$\frac{dP}{dz} = -\frac{\mu g}{RT}P. \tag{92.3}$$

È evidente che così procedendo non si raggiunge lo scopo. Abbiamo introdotto invece della densità incognita ρ un'altra incognita, la temperatura T. Tuttavia quest'ultima è più facile da misurare a diverse altitudini. Se T è nota in quanto funzione di z, si può procedere all'integrazione dell'equazione (92.3). Quindi il problema del calcolo della pressione a diverse altitudini diventa risolvibile, se si conosce la legge di variazione della temperatura T rispetto all'altitudine.

2. Se non ci sono venti e correnti d'aria, cioè se l'atmosfera è immobile, si dice che l'atmosfera si trova in *equilibrio meccanico*. Però non si tratta ancora di uno stato di *equlibrio definitivo*, perché è necessario che l'atmosfera stessa si trovi in *equilibrio termico*, il che significa che su tutta l'estensione dell'atmosfera la temperatura T deve essere uguale. In questo caso l'atmosfera si chiama *isotermica*.

Sia ben chiaro che l'esistenza di un'atmosfera isotermica è solo un'ipotesi. Ciò nondimeno lo studio di tale ipotesi presenta un grande interesse.

Con $T = \text{cost}$ l'equazione (92.3) è facile da integrare. Perciò riscriviamola nella forma

$$\frac{dP}{P} = -\frac{\mu g}{RT}dz$$

e dopo l'integrazione si ottiene

$$\ln\frac{P}{P_0} = -\frac{\mu g z}{RT},$$

ossia

$$P = P_0 e^{-\frac{\mu g z}{RT}}. \tag{92.4}$$

Secondo la stessa legge varia anche la densità dell'aria, cioè

$$\rho = \rho_0 e^{-\frac{\mu g z}{RT}}. \tag{92.5}$$

Le relazioni (92.4) e (92.5) si chiamano *formule barometriche.* Le costanti d'integrazione P_0 e ρ_0 rappresentano la pressione e la densità dell'aria sulla superficie della Terra. La pressione e la densità dell'aria diminuiscono con l'altitudine secondo una legge esponenziale. Con l'aumento dell'altitudine

$$h = \frac{RT}{\mu g} \tag{92.6}$$

esse diminuiscono di e volte. La grandezza h si chiama *altitudine dell'atmosfera omogenea.* Il significato di questa denominazione risulta chiaro se ci si pone la domanda: quale altezza H dovrebbe avere un'atmosfera immaginaria di densità ρ_0 costante per produrre sulla superficie terrestre la stessa pressione P_0 dell'atmosfera reale? È evidente che la grandezza cercata H verrà determinata dalla condizione $P_0 = \rho_0 g H$. Ora se si applica l'equazione di stato (92.2) allo strato di aria adiacente alla superficie terrestre, si ottiene $P_0 = \frac{RT}{\mu}\rho_0$. Utilizzando questa relazione, si ottiene $H = \frac{RT}{\mu g}$, cioè $H = h$. Supponendo che il peso molecolare medio dell'aria sia $\mu = 28{,}8$, si ha per l'altezza dell'atmosfera omogenea a 0°C ($T = 273$ K)

$$h = \frac{8{,}31 \cdot 273}{28{,}8 \cdot 9{,}8} \approx 8000 \text{ m} = 8 \text{ km}.$$

Portando l'espressione di h nella formula barometrica (92.4), si può riscriverla

$$P = P_0 e^{-z/h}. \tag{92.7}$$

Sotto questa forma è facile determinare la differenza di altitudine tra due o parecchi punti della superficie terrestre. Per farlo basta conoscere la pressione e la temperatura di questi punti. Quest'ultima evidentemente deve essere la stessa nei limiti delle altitudini considerate.

3. Desideriamo fare un'osservazione a proposito della stabilità dell'equilibrio meccanico dell'atmosfera. Non vogliamo qui introdurre la

limitazione di una temperatura uniforme a tutte le altitudini, supponiamo invece che essa possa variare arbitrariamente con l'altitudine. Se lo stato di equilibrio meccanico è perturbato e se una certa massa d'aria sale ad un'altitudine maggiore, essa sarà sottoposta ad una pressione esterna minore. Come risultato la massa d'aria sollevatasi si espande, e la densità diminuisce, poiché a causa della debole conduttività termica dell'aria durante la salita la massa considerata praticamente non assorbe né restituisce calore. Se la sua densità risulterà in un nuovo stato più elevata di quella dell'aria vicina, essendo la massa considerata più pesante dell'aria vicina scenderà e l'equilibrio sarà ristabilito. Qualora invece la densità risulti minore di quella dell'aria vicina, la massa considerata salirà ancora più in alto e l'equilibrio meccanico risulterà instabile. Considerazioni analoghe sono valide ugualmente per il caso in cui il perturbamento dell'equilibrio meccanico si verifichi in seguito all'abbassamento di una certa massa d'aria. La massa abbassata sarà compressa dalla pressione esterna se la densità nel nuovo stato è minore della densità dell'aria vicina, la massa considerata salirà e l'equilibrio si ristabilirà. Al contrario, qualora la densità risulti maggiore dell'aria vicina, la massa considerata scenderà più in basso, cioè l'equilibrio risulterà instabile. Queste considerazioni, si intende, sono valide non soltanto per l'atmosfera, ma per qualsiasi fluido comprimibile a termperatura non uniforme, che si trovi in equilibrio meccanico nel campo di gravità. Quanto all'atmosfera terrestre, le indagini hanno dimostrato che in queste condizioni l'atmosfera isotermica è stabile. Una maggiore stabilità si osserva quando la temperatura dell'aria aumenta con l'altitudine. Se invece la temperatura dell'aria diminuisce con l'altitudine, l'equilibrio meccanico dell'atmosfera sarà possibile soltanto se l'abbassamento della temperatura si verifica non troppo presto. Qualora la temperatura si abbassi di più di un grado ogni 100 metri, l'atmosfera perde la stabilità meccanica e compaiono correnti ascendenti e discendenti (correnti di convezione). Questi problemi saranno esaminati più dettagliatamente nel II volume.

Problema

Quale deve essere l'altitudine $H_{1/2}$ perché la pressione dell'atmosfera isotermica diminuisca di 2 volte?

Risposta. $H_{1/2} = h \ln 2 \approx 5{,}53$ km (a 0°C).

§ 93. *Descrizione cinematica del flusso di un fluido*

1. Si possono utilizzare due procedimenti per descrivere il flusso di un fluido. Si può studiare il flusso di *una singola particella di fluido*, cioè determinare la posizione e la velocità di questa particella in ogni istante. Quindi saranno definite anche le traiettorie di tutte le particelle del fluido. Ma si può fare altrimenti e studiare ciò che si verifica nel tempo in *diversi*

punti dello spazio, più esattamente, determinare le grandezze e le direzioni delle velocità di diverse particelle del fluido che passano in diversi istanti per un punto dato dello spazio. Se si considerano tutti i punti dello spazio in ogni istante t, questo secondo procedimento presenterà un'immagine istantanea della distribuzione delle velocità del fluido, detto *campo delle velocità*. In ogni punto dello spazio sarà indicato il vettore velocità che la particella possiede durante il passaggio nell'istante considerato per questo punto. La linea, la cui tangente indica la direzione della velocità della particella del fluido che passa nell'istante considerato per il punto di tangenza, si chiama *linea di corrente*. Se il campo delle velocità e, quindi, le linee di corrente corrispondenti non variano nel tempo, il flusso del fluido si chiama *stazionario* o *stabilizzato*. Se invece variano nel tempo, il flusso si chiama *non stazionario* o *non stabilizzato*. Nel caso di flusso non stazionario nella descrizione del secondo procedimento la velocità del fluido dipende evidentemente dalle coordinate e dal tempo: $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$. Nel caso di un flusso stazionario non c'è dipendenza evidente dal tempo, la velocità dipende soltanto dalle coordinate: $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r})$.

2. In caso di flusso non stazionario, le linee di corrente non coincidono generalmente con le traiettorie delle particelle del fluido. Infatti, la traiettoria caratterizza il moto di *una sola particella* del fluido rispetto a tutto il tempo del suo moto, mentre la linea della corrente caratterizza il moto di *un numero infinito di particelle* che si trovano su questa linea nell'istante considerato. Passando al caso di *un flusso stazionario le linee della corrente coincidono con le traiettorie delle particelle*. Per dimostrarlo prendiamo la traiettoria di una particella A qualunque (fig.237). Sia $A(t_1)$ la posizione

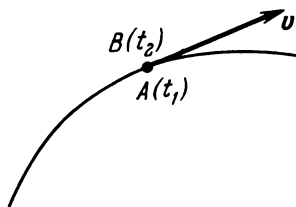
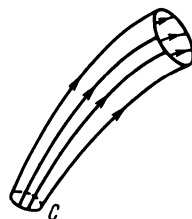



Fig. 237. Fig. 238.

di questa particella nell'istante t_1. Prendiamo un'altra particella B che nell'istante t_2 occupi la stessa posizione della particella A nell'istante t_1. Poiché il flusso è stazionario, la particella A passerà per il punto $A(t_1)$ alla medesima velocità con cui la particella B passerà per lo stesso punto nell'istante t_2. Ne risulta che la velocità della particella B nel punto $A(t_1)$ è diretta lungo la tangente alla traiettoria della particella A. Dato che l'istante t_2 può essere scelto arbitrariamente, ne segue che la traiettoria della particella A coincide con la linea di corrente.

3. Prendiamo un contorno chiuso C e nello stesso istante facciamo passare per ciascuno dei suoi punti le linee di corrente (fig.238). Esse si dispor-

ranno su una superficie tubolare, detta *tubo di corrente*. Poiché le velocità delle particelle del fluido sono dirette lungo la tangente alle linee di corrente, durante il flusso il fluido non può attraversare la superficie laterale del tubo di corrente. Il tubo di corrente si comporta come la superficie laterale di un tubo rigido lungo la quale scorre il fluido. Tutto lo spazio occupato dal fluido può essere suddiviso in tubi di corrente. Se la sezione trasversale di un tubo di corrente è infinitamente piccola, si può considerare che la velocità del fluido sia la stessa in ogni punto della stessa sezione trasversale e diretta lungo l'asse del tubo di corrente. La massa del fluido che scorre nel tempo dt attraverso la sezione trasversale del tubo è

$$dm = \rho v S \, dt, \tag{93.1}$$

dove ρ è la densità del fluido e S l'area della sezione trasversale del tubo di corrente.

In caso di flusso stazionario la massa dm sarà la stessa in tutte le sezioni del tubo di corrente. Se si prendono due sezioni d'area S_1 e S_2 si può scrivere allora

$$\rho_1 v_1 S_1 = \rho_2 v_2 S_2. \tag{93.2}$$

Se quest'uguaglianza non fosse rispettata, la massa del fluido tra le sezioni S_1 e S_2 varierebbe nel tempo, il che è in contraddizione con la legge di conservazione della massa e la condizione di stazionarietà del flusso del fluido. Se il fluido è incomprimibile, si ha allora $\rho_1 = \rho_2$ e la relazione (93.2) assume la forma

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{S_2}{S_1} \tag{93.3}$$

La velocità del fluido in un tubo di corrente è tanto più grande quanto più è sottile la sezione trasversale del tubo. Essa è inversamente proporzionale all'area della sezione trasversale del tubo di corrente.

§ 94. *Flusso stazionario di un fluido perfetto. Equazione di Bernoulli.*

1. Lo studio del flusso dei liquidi reali e dei gas rappresenta un problema generalmente molto arduo. Per semplificarlo si ignorano dapprima le forze d'attrito interno. Si considera il caso di un fluido perfetto in cui per qualsiasi flusso non compaiano forze tangenziali e normali d'attrito interno (cfr. § 89, punto 6). Le sole forze superficiali che possono essere presenti in un fluido perfetto sono le forze di pressione normale P. La pressione P è univocamente determinata dalla densità e dalla temperatura del fluido. Per semplicità si considera il fluido incomprimibile.

2. Consideriamo il flusso stazionario di un fluido perfetto in un campo di forze conservative, nel campo di gravità, ad esempio. Applichiamo a questo flusso la legge di conservazione dell'energia. Si ignora completamente lo scambio di calore tra le diverse parti del fluido e il mezzo vicino. Delimitiamo nel fluido un tubo di corrente infinitamente sottile e consideriamo la parte del fluido che occupa il volume $MNDC$ (fig.239). Supponiamo che questa parte sia trasferita in una posizione infinitamente vicina $M_1N_1D_1C_1$ rispetto a quella iniziale e calcoliamo il lavoro A prodotto durante questo spostamento dalle forze di pressione. La pressione esercitata

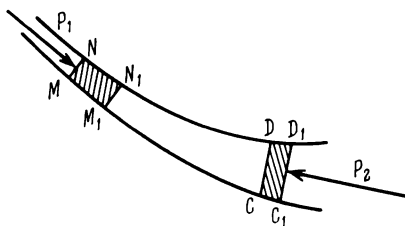



Fig. 239.

sulla superficie laterale del tubo di corrente, perpendicolarmente rispetto allo spostamento, non effettua nessun lavoro. Durante lo spostamento della sezione MN nella M_1N_1 viene effettuato il lavoro $A_1 = P_1S_1l_1$, dove $l_1 = MM_1$ è la quantità dello spostamento. Introducendo il volume $\Delta_1 V = S_1l_1$ si può rappresentarla nella forma $A_1 = P_1\Delta_1 V$ o $A_1 = P_1\frac{\Delta_1 m}{\rho_1}$, dove $\Delta_1 m$ è la massa del fluido contenuto nel volume MNN_1M_1. Durante lo spostamento della sezione CD alla posizione C_1D_1 il fluido effettua un lavoro contro la pressione P_2 (o la pressione P_2 effettua contro il fluido un lavoro negativo). Ragionando analogamente si ottiene per esso $A_2 = P_2\frac{\Delta_2 m}{\rho_2}$, dove $\Delta_2 m$ è la massa del fluido contenuta nel volume CDD_1C_1. Se il flusso è stazionario, la massa di fluido contenuta nel volume M_1N_1DC non varierà e quindi applicando la legge di conservazione dell'energia, si ottiene $\Delta_1 m = \Delta_2 m$. Tralasciando gli indici di Δm, per il lavoro prodotto dalla pressione esterna si ottiene infine

$$A = A_1 - A_2 = \left(\frac{P_1}{\rho_1} - \frac{P_2}{\rho_2}\right)\Delta m.$$

Questo lavoro deve essere uguale all'incremento ΔE dell'energia totale della parte del fluido considerata. A causa della stazionarietà del flusso l'energia del fluido contenuta nel volume M_1N_1DC non è cambiata. Perciò la grandezza ΔE è uguale alla differenza delle energie che possiede la massa Δm del fluido nelle posizioni CDD_1C_1 e MNN_1M_1. Indicando con ε l'energia totale per unità di massa, si ottiene $\Delta E = (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)\Delta m$. Uguagliando

questa espressione al lavoro A e dividendo per Δm si ottiene

$$\varepsilon_1 + \frac{P_1}{\rho_1} = \varepsilon_2 + \frac{P_2}{\rho_2}. \tag{94.1}$$

Ne segue che *se il flusso di un fluido perfetto è stazionario la grandezza $\varepsilon + P/\rho$ rimane costante lungo una stessa linea di corrente*

$$\varepsilon + \frac{P}{\rho} = B = \text{cost.} \tag{94.2}$$

Questa relazione si chiama *equazione di Bernoulli* (1700-1782) il quale la pubblicò nel 1738. Derivando l'equazione di Bernoulli, non abbiamo utilizzato l'ipotesi sull'incomprimibilità del fluido, quindi essa è valida anche per i fluidi comprimibili a condizione che il fluido sia perfetto e che il suo flusso sia stazionario. Per lo studio e l'applicazione dell'equazione di Bernoulli ai fluidi comprimibili e ai gas rimandiamo al II volume, poiché si deve conoscere la formula esplicita dell'energia ε. Qui ci limiteremo a studiare i fluidi incomprimibili in moto nel campo gravitazionale terrestre. Proprio partendo da questi presupposti Bernoulli ha stabilito l'equazione (94.2).

Se il fluido è incomprimibile, durante il suo flusso la parte di energia totale ε, che dipende dalla compressione del fluido, resta invariata. Si può dunque non considerare questa parte. L'energia totale ε si compone dell'energia cinetica dell'unità di massa del fluido $v^2/2$ e dell'energia potenziale del campo gravitazionale gh. In questo caso l'equazione di Bernoulli assume la forma

$$\frac{v^2}{2} + gh + \frac{P}{\rho} = B = \text{cost.} \tag{94.3}$$

3. Sottolineiamo ancora una volta che *lungo una stessa linea di corrente* la costante B di Bernoulli mantiene sempre lo stesso valore. Però essa in generale può variare nel caso di passaggio da una linea di corrente ad un'altra, ma ci possono essere anche dei casi in cui la costante di Bernoulli ha lo stesso valore per tutta la corrente del fluido. Notiamo un caso assai frequente in cui la costante rimane invariata. Supponiamo che tutte le linee di corrente comincino e finiscano in una zona in cui il fluido è praticamente a riposo. Scegliamo in questa zona uno dei punti della linea di corrente. Allora nell'equazione (94.3) si deve porre $v = 0$, dopo di che si ottiene $B = gh + + P/\rho$. Ma in tutta la zona in cui il fluido è a riposo viene rispettata la condizione d'equilibrio $gh + P/\rho = \text{cost}$. Ne segue che la costante B di Bernoulli nel caso considerato ha lo stesso valore in ogni punto della corrente. Un caso più generale si ha quando, in una certa zona dello spazio, un fluido perfetto, incomprimibile si muove su linee parallele, in qualsiasi direzione, ad una velocità costante v_0: poi questo flusso cessa di essere parallelo a causa degli ostacoli che incontra o a causa del restringimento o dell'espan-

sione di un condotto. In questo caso la costante B di Bernoulli ha lo stesso valore per tutte le linee di corrente. Per convincersene è sufficiente utilizzare un sistema di riferimento in moto uniforme con velocità v_0 rispetto al sistema di riferimento iniziale.

4. Supponiamo ora che un tubo sottile di corrente abbia una sezione trasversale variabile e che il suo asse sia orizzontale. (Come esempio può servire un tubo orizzontale di sezione variabile attraverso il quale scorre un fluido.) Si ha allora $h = \text{cost}$ e l'equazione di Bernoulli assume la forma

$$\frac{v^2}{2} + \frac{P}{\rho} = \text{cost}. \tag{94.4}$$

Ne risulta che la pressione è maggiore là dove la velocità v è minore e viceversa. D'altra parte, secondo la relazione (93.3), la velocità v è minore là dove la sezione del tubo è maggiore. Ciò significa che la pressione è maggiore nelle parti larghe del tubo e minore nelle parti strette. Tale risultato è una conseguenza diretta della seconda legge di Newton. Infatti, quando un fluido si muove da una parte larga ad una parte stretta (fig.240), la sua ve-

Fig. 240.

locità aumenta. Questo vuol dire che l'accelerazione è diretta nel senso della corrente, cioè sulla figura 240 da sinistra a destra. Questa accelerazione è dovuta alla differenza delle pressioni esercitate a sinistra e a destra sulla parte di fluido considerata. Quindi la pressione a sinistra, cioè nella parte più larga, deve essere più grande di quella esercitata a destra dove il tubo è più stretto.

5. Utilizzando l'equazione (94.4) si può rispondere alla domanda su quando un liquido o un gas in moto può essere considerato incomprimibile, sebbene una dimostrazione più rigorosa si debba basare sull'equazione di Bernoulli nella sua forma più generale (94.2). La pressione e la velocità del flusso in due punti 1 e 2 su una stessa linea di corrente sono legate dalla relazione

$$\Delta P \equiv P_2 - P_1 = \frac{\rho}{2}(v_1^2 - v_2^2).$$

D'altra parte

$$\Delta\rho = \frac{d\rho}{dP}\,\Delta P = \frac{1}{c^2}\,\Delta P,$$

dove c è la velocità del suono (cfr. § 85, punto 1). Perché un liquido in moto possa essere considerato incomprimibile è necessario che sia rispettata la relazione $|\Delta\rho| \ll \rho$ qualunque siano i punti 1 e 2 prescelti, il che porta alla

condizione

$$|v_2^2 - v_1^2| \ll c^2, \tag{94.5}$$

cioè la variazione del quadrato della velocità di flusso del fluido deve essere piccolo rispetto al quadrato della velocità del suono. Se si rapporta il flusso al sistema di riferimento in cui il fluido sarebbe a riposo in un punto qualunque di corrente, la condizione (94.5) si semplifica e assume la forma

$$v^2 \ll c^2, \tag{94.6}$$

cioè in qualisiasi punto della corrente di un fluido il quadrato della velocità del flusso del fluido deve essere piccolo rispetto al quadrato della velocità del suono.

Se l'altezza h varia durante il flusso, per mezzo dell'equazione (94.3) è facile dimostrare che oltre alla condizione (94.5) deve verificarsi la condizione supplementare

$$g\Delta h \ll c^2, \tag{94.7}$$

il cui rispetto è necessario perché un liquido o un gas possano essere considerati incomprimibili.

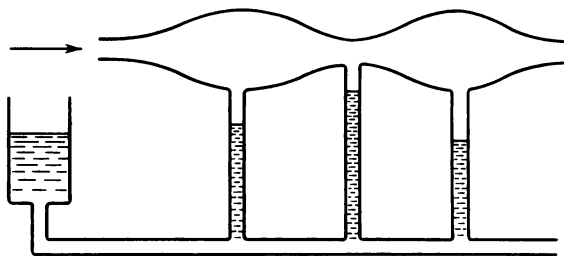



Fig. 241.

6. Per illustrare l'equazione di Bernoulli descriviamo qualche suggestivo esperimento. La figura 241 rappresenta un tubo di sezione variabile attraverso il quale si fa passare una corrente d'aria. Per calcolare la pressione dell'aria nelle diverse parti del tubo, si utilizzano tubi manometrici disposti come indicato sulla figura 241. Ne risulta che nei tubi collegati alle parti strette del tubo il livello dell'acqua è più alto che nei tubi collegati alle parti larghe. Ciò significa che nel primo caso la pressione dell'aria sulla corrente è minore che nel secondo. Il risultato è conforme all'equazione (94.4)

Questa dimostrazione può servire a spiegare il funzionamento del contatore di acqua che misura il consumo d'acqua, cioè la massa d'acqua Q che passa ogni secondo attraverso la sezione trasversale di un condotto. Si introduce nel condotto un tubo corto (detto tubo di Venturi) di sezione trasversale minore. Siano S_1 e S_2 le aree delle sezioni trasversali del tubo largo e stretto e P_1, P_2 le pressioni dell'acqua in questi settori misurate per mezzo del manometro. Allora secondo l'equazione di Bernoulli

$$\frac{v_1^2}{2} + \frac{P_1}{\rho} = \frac{v_2^2}{2} + \frac{P_2}{\rho}.$$

Inoltre $M_1 = \rho v_1 S_1 = \rho v_2 S_2$. Determinando da qui v_1 e v_2 e sostituendoli nella relazione precedente si ottiene

$$Q = S_1 S_2 \sqrt{\frac{2\rho(P_1 - P_2)}{S_1^2 - S_2^2}}. \tag{94.8}$$

7. Prendiamo un tubo di caucciù infilato su di un puntale di vetro conico e soffiamo aria attraverso il tubo (fig.242, vista dall'alto). La pressione dell'aria sulla parte sottile del puntale e sul getto che fuoriesce sarà minore di quella atmosferica. Se avviciniamo il getto d'aria ad una pallina cava di celluloide sospesa ad un filo, la pallina viene aspirata e trascinata dal getto

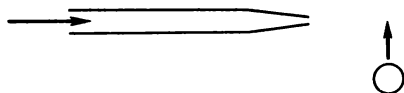



Fig. 242.

d'aria. Se si orienta il getto verticalmente, si può mantenere la pallina in equilibrio ad una certa altezza. Essa si comporta come se fosse stata posta in una buca. In questo caso non è necessario attaccare la pallina al filo.

8. Avviciniamo ora il getto d'aria all'estremità superiore sottile di un tubo di vetro, la cui altra estremità sia immersa nell'acqua (fig. 243,*a*). Nel tubo di vetro l'acqua si solleverà, e poi sarà polverizzata e trascinata dal getto d'aria. Su questo principio si basa il funzionamento dei *polverizzatori*. Se il tubo attraverso cui viene soffiata l'aria non è dotato di puntale (o non si assottiglia), ma possiede una sezione trasversale costante (fig.243,*b*), l'acqua non si solleva e non si polverizza. Se invece avviciniamo tale tubo al puntale del tubo di vetro immerso nell'acqua in modo che tra il tubo e il puntale rimanga un interstizio stretto (fig.243,*c*), l'acqua si solleverà e sarà polverizzata di nuovo. L'interstizio tra i tubi svolge la funzione del puntale diminuendo la pressione dell'aria sul getto.

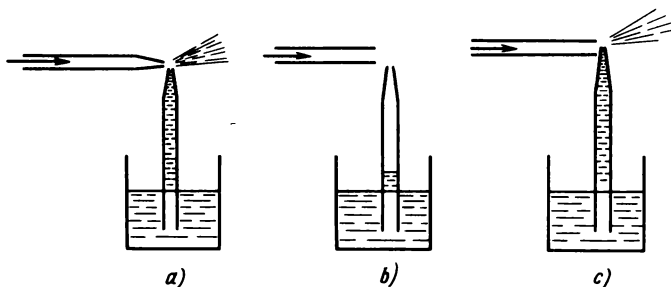



Fig. 243.

9. Se sospendiamo due fogli di carta lievemente incurvati (fig.244) a fili orizzontali e soffiamo aria tra di loro, essi si attirano l'uno l'altro. Il fatto è che laddove la distanza tra i fogli è minore la pressione dell'aria P è inferiore alla pressione atmosferica P_0, e perciò quest'ultima spinge i fogli l'uno contro l'altro. Si possono anche sospendere a piccola distanza l'uno dall'altro due matracci di vetro. Se si soffia aria tra di loro i matracci cominciano a battere l'uno contro l'altro. Lo stesso effetto d'attrazione si manifesta quando due battelli navigano paralleli a breve distanza l'uno dall'altro. È facile spiegare questo effetto passando ad un sistema di riferimento in cui i battelli siano a riposo, mentre l'acqua scorre tra di loro. L'effetto appena descritto è la causa di tante collisioni tra navi.

10. Sulla figura 245 è schematicamente rappresentato l'*apparecchio di Clément-Désormes* (1779-1841; 1777-1862). Esso è composto di un disco d'ottone forato al centro, cui è stato fissato un tubo d'ottone. Dentro questo tubo è stato infilato un altro tubo di caucciu attraverso cui si soffia aria. Se si avvicina il disco a un foglio di carta posto su di un tavolo, il foglio sarà attirato dal disco. Il fatto è che tra il disco e il foglio, nel breve spazio che li divide, si forma una corrente d'aria che si espande dal centro verso le estremità a mó di raggi. In questo spazio quindi la pressione diminuisce e il foglio di carta viene spinto contro il disco dalla pressione

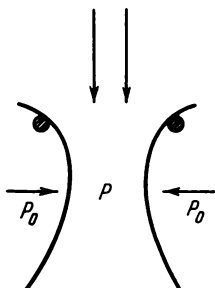



Fig. 244.

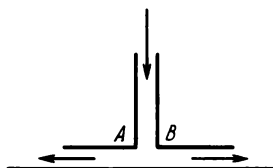



Fig. 245.

dell'aria esterna. Il foglio chiude così il foro AB, il flusso d'aria attraverso il tubo rallenta, la pressione aumenta e di nuovo si crea un interstizio attraverso cui si precipita la corrente d'aria. Il foglio di carta è attirato dal disco e tutto ricomincia di nuovo. In seguito il foglio comincia ad oscillare rapidamente producendo un rumore.

11. Supponiamo che un flusso di un liquido avvolge un corpo qualunque (fig.246). A partire dal punto A le linee di corrente deviano contornando il corpo. Nel punto A detto *critico* o

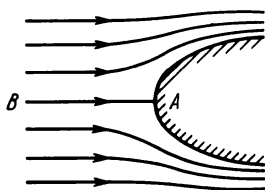



Fig. 246.

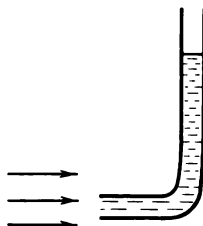



Fig. 247.

punto di arresto, la velocità del moto del fluido si annulla e la linea di corrente che arriva al punto A si interrompe. Applicando l'equazione di Bernoulli alla linea di corrente BA, si ottiene

$$P + \frac{\rho v^2}{2} = P_0, \qquad (94.9)$$

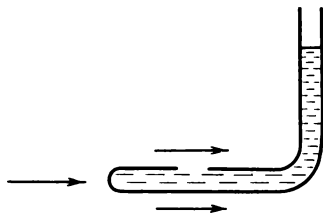
dove P_0 è la pressione nel punto critico (di arresto) e P la pressione all'« infinito », da dove scorre il liquido. La grandezza P_0 è la pressione massima che può avere un fluido sulla linea di corrente considerata. Ignoriamo qui la presenza delle forze di gravità e supponiamo che tutte le linee di corrente siano piatte e si trovino su piano orizzontale. La grandezza $1/2\rho v^2$ si chiama *pressione dinamica* o *rapida* e la somma $P + 1/2\rho v^2$ è la *pressione totale* del fluido sulla li-

nea di corrente considerata[1]. Se si misura separatamente la pressione totale e la pressione rapida del fluido in un punto dato dello spazio, è facile calcolare anche la velocità del fluido in questo stesso punto.

Per misurare la pressione totale si utilizza il *tubo di Pitot* (1695-1771). È un piccolo tubo manometrico ricurvo con l'apertura rivolta verso la corrente del fluido (fig.247). Le linee di corrente centrali dirette verso il tubo finiscono all'interno del tubo, in cui il fluido è a riposo. L'altezza della colonna del fluido che si stabilisce nel tubo è la misura della pressione massima e, quindi, la pressione totale del fluido sulla linea di corrente considerata.

Se si misura oltre alla pressione totale anche la pressione P, si può, dalla loro differenza, calcolare la pressione rapida $1/2\rho v^2$ e in seguito la velocità v. Il calcolo della pressione P sarebbe superfluo, se si trattasse di misurare la velocità v di un fluido su una superficie aperta, su un fiume, ad esempio. In questo caso la profondità di immersione del tubo di Pitot indiche-

Fig. 248. Fig. 249.

rebbe immediatamente il valore della pressione cercata. Ma questo procedimento non serve, quando il fluido è in moto in un tubo, ad esempio. Non serve neppure per calcolare la velocità degli aerei ecc. In questi casi per misurare la pressione P si può utilizzare *una sonda*. La sonda si distingue dal tubo di Pitot per il fatto che la sua parte anteriore rivolta verso la corrente è otturata, mentre nella parete laterale è praticato un piccolo foro come indicato sulla figura 248. Il tubo della sonda perturba la corrente soltanto in prossimità della sua parte anteriore rivolta alla corrente. La corrente che scorre lungo le pareti del tubo rimane praticamente inalterata. Perciò nelle immediate vicinanze del foro la velocità e la pressione del fluido sono identiche come in ogni altro punto della linea di corrente che passi vicino al foro. La pressione nel tubo della sonda misurata dal manometro coincide quindi con la pressione P del fluido che scorre lungo il tubo. In pratica il tubo di Pitot viene montato insieme con la sonda così come indicato, ad esempio, nella figura 249 (in sezione verticale). Tale tubo si chiama *tubo di Prandtl* (1875-1953).

§ 95. *Esempi d'applicazione dell'equazione di Bernoulli. Formula di Torricelli*

1. Consideriamo il flusso di un fluido perfetto incomprimibile attraverso un piccolo foro praticato nella parete laterale o nel fondo di un recipiente largo. Le particelle del fluido che s'avvicinano al foro hanno velocità tra-

[1]In idrodinamica tecnica si utilizza generalmente la seguente terminologia. La grandezza P è detta *pressione statica*, la grandezza $1/2\rho v^2$ *pressione dinamica* e la loro somma $P + 1/2\rho v^2$ *pressione totale*. Però questa terminologia come più volte è stato osservato da molti fisici è irrazionale e può soltanto trarre in errore. Perciò noi non la useremo. In tutti i fluidi esiste soltanto la pressione P determinata dal grado di compressione del fluido.

sversali (fig.250). Per inerzia si produce una compressione del getto che fuoriesce. Supponiamo che per evitare questo effetto si utilizzi un orificio dai bordi arrotondati (fig.251). Grazie a questo accorgimento, le linee di corrente prima di fuoriuscire variano man mano direzione diventando parallele all'asse del tubetto per cui l'effetto di compressione non compare.[1] Tutte le linee di corrente passano attraverso il tubetto prendendo origine vicino alla superficie libera del fluido dove la velocità v è trascurabilmente

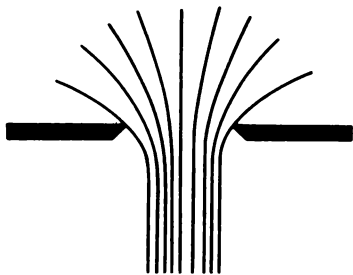
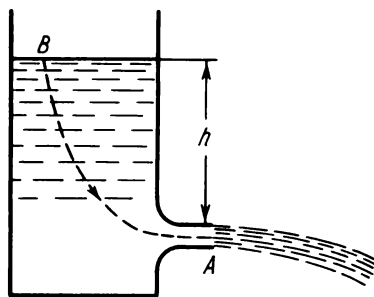



Fig. 250. Fig. 251.

piccola. Perciò la costante di Bernoulli ha il medesimo valore per tutte le linee di corrente. Applichiamo l'equazione di Bernoulli ai punti B e A di una linea di corrente (fig.251). Nel punto B la velocità è trascurabilmente piccola e si può considerarla uguale a zero; indichiamo con v la velocità nel punto A. L'equazione di Bernoulli dà

$$\frac{P_0}{\rho} + gh = \frac{P_0}{\rho} + \frac{v^2}{2},$$

dove P_0 è la pressione atmosferica e l'altezza h è misurata dal livello dell'orificio. Se ne ricava

$$v = \sqrt{2gh}. \tag{95.1}$$

È questa la *formula di Torricelli* (1608-1647). Essa dimostra che il fluido in moto acquista una velocità uguale a quella che acquisterebbe un corpo in caduta libera da una altezza h. Perciò se si incurva il tubetto in modo che la direzione del getto sia verticale o quasi, allora al suo punto più alto il getto raggiungerà un'altezza uguale al livello del fluido nel recipiente. In realtà, l'altezza del getto sarà lievemente minore, a causa dell'attrito e della resistenza dell'aria, di ciò l'equazione di Bernoulli non teneva conto.

2. Calcoliamo la portata del getto al secondo. Supponiamo che il getto scorra orizzontalmente attraverso un piccolo orificio praticato nella parete

---

[1] Non è proprio così, dato che sussiste una piccola compressione dovuta alle forze superficiali.

laterale del recipiente. Se S è l'area dell'orificio, la massa del fluido che fuoriesce al secondo è $\rho v S$. La portata è quindi $mv = \rho v^2 S$, o secondo la formula (95.1) $mv = 2\rho g h S$. In seguito a ciò il recipiente con il fluido riceve un contraccolpo $F = 2\rho g h S$. Se si chiude l'orificio con un tappo, il recipiente resterà immobile. Ciò significa che le forze di pressione orizzontale, che il fluido esercita sulle pareti del recipiente, si equilibrano. Se si apre di nuovo l'orificio, allora dalla parete laterale destra sarà evacuato un settore di area S. Se lo stato del fluido non variasse la forza di pressione sulla parete destra diminuirebbe di $PS = \rho g h S$. In realtà, la pressione diminuisce del doppio, cioè di $2\rho g h S$, a causa della *ridistribuzione della pressione* durante il passaggio dallo stato s di riposo allo stato di flusso stabilizzato. È evidente che questo passaggio non è istantaneo. Se si toglie il tappo rapidamente, la forza di pressione che si esercita su questa parete in un primo istante diminuisce soltanto di $\rho g h S$. In seguito per il processo di stabilizzazione del flusso la pressione diminuisce rapidamente, ma variando incessantemente da $\rho g h S$ a $2\rho g h S$.

Problemi

1. Un recipiente cilindrico in posizione verticale e riempito di fluido perfetto fino al livello H (rispetto al fondo del recipiente). L'area del fondo del recipiente è uguale a S. Si calcoli il tempo t durante il quale il livello del fluido nel recipiente si abbasserà fino all'altezza h (rispetto al fondo del recipiente) se si pratica nel fondo un piccolo orificio di area σ. Si calcoli anche il tempo T necessario perché dal recipiente fuoriesca tutto il fluido.

Risposta. $t = \frac{S}{\sigma}\sqrt{\frac{2}{g}}\,(\sqrt{H} - \sqrt{h}),\quad T = \frac{S}{\sigma}\sqrt{\frac{2H}{g}}.$

2. Una scatola rettangolare galleggia sulla superficie dell'acqua, ad una profondità h sotto l'azione del proprio peso. L'area del fondo della scatola è uguale a S e l'altezza a H. In quanto tempo la scatola affonderà, se nel suo centro si pratica un piccolo orificio d'area σ e se le si assicura un'orientazione invariabile per mezzo di un dispositivo laterale di guida?

Risposta. $t = \frac{S}{\sigma}\,\frac{H-h}{\sqrt{2gh}}.$

3. In quanto tempo un matraccio sferico di raggio R si riempirà di acqua se nel centro del suo fondo è praticato un piccolo orificio d'area σ? Il matraccio è immerso nell'acqua fino alla base inferiore del collo.

Risposta. $t = \frac{16\pi R^2}{15\sigma}\sqrt{\frac{R}{g}}.$

4. Un recipiente cilindrico che si trova sulla superficie orizzontale di un tavolo è riempito di acqua fino al livello H (rispetto alla superficie del tavolo). A quale altezza h (sempre rispetto alla superficie del tavolo) bisogna praticare un piccolo orificio nella parete laterale perché il getto d'acqua, che fuoriuscirà dal recipiente, cada sulla superficie del tavolo alla distanza massima dal recipiente? Si calcoli questa distanza massima x_{mass}.

Risposta. $h = \frac{H}{2},\quad x_{mass} = H.$

5. Si determini la forma che deve avere un recipiente perché il livello dell'acqua si abbassi a velocità costante se nel punto centrale del fondo si pratica un piccolo orificio.

Risposta. L'area della sezione trasversale orizzontale del recipiente deve essere proporzionale alla radice quadrata della distanza tra questa sezione orizzontale e l'orificio. Se il recipiente possiede una simmetria assiale, esso deve avere la forma di un paraboloide di rotazione di quarto grado.

6. Un largo recipiente a fondo piatto è riempito di fluido perfetto. Nel fondo è praticata una fessura lunga e stretta nella quale è introdotto un prolungamento costituito da due piani inclinati così da formare tra di loro un piccolo angolo (fig.252). La distanza inferiore è uguale a l_1, quella superiore a l_2. Si calcoli la distribuzione della pressione del fluido nel prolungamento se la pressione atmosferica è uguale a P_0. La lunghezza del prolungamento è uguale a h e la distanza tra l'estremità inferiore del prolungamento e il livello del fluido nel recipiente è H.

Risposta. $P = P_0 - \rho g x + \rho g H \left\{1 - \dfrac{h^2 l_1^2}{[hl_1 + x(l_2 - l_1)]^2}\right\}$, dove x è la distanza verticale dall'estremità inferiore del prolungamento.

7. L'acqua scorre da un largo serbatoio attraverso un tubo verticale conico introdotto sul fondo. La lunghezza del tubo è l, il diametro della sua base superiore è d_1 e quello della sua base inferiore è d_2 ($d_1 > d_2$). Quale deve essere il livello H dell'acqua nel serbatoio perché la pressione nella sezione superiore del tubo sia uguale a P, se la pressione atmosferica è uguale a P_0?

Risposta. $H = \dfrac{(P_0 - P)/\rho g - l(d_2/d_1)^4}{1 - (d_2/d_1)^4}$.

8. Si determini la velocità del flusso stazionario, attraverso un piccolo orificio, di un getto di fluido perfetto incomprimibile che si trovi sotto pressione in un recipiente chiuso (fig.253).

Risposta. $v = \sqrt{2(P - P_0)/\rho + 2gh}$, dove P_0 è la pressione atmosferica.

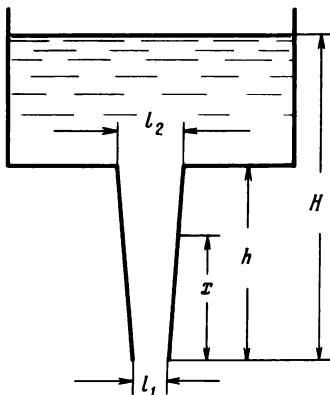



Fig. 252.

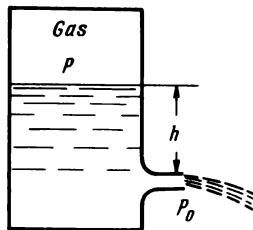



Fig. 253.

9. Per far sgorgare un getto d'acqua da un recipiente a velocità costante si utilizza il dispositivo rappresentato nella figura 254. Si calcoli la velocità del flusso v del liquido in questo caso.

Risposta. Finché il livello del liquido nel recipiente si trova al di sopra dell'estremità inferiore del tubetto AB, la velocità del flusso del liquido è costante e uguale a $v = \sqrt{2gh}$. Dopodiché la velocità del flusso comincerà a diminuire.

10. Un recipiente cilindrico riempito di un liquido perfetto incomprimibile ruota intorno al suo asse geometrico orientato verticalmente con una velocità angolare ω. Si calcoli la velocità del flusso del liquido attraverso un piccolo orificio praticato nella parete laterale del recipiente quando il flusso del liquido sia diventato stazionario rispetto al recipiente.

Soluzione. Passiamo ad un sistema di riferimento in cui il luquido sia a riposo. In questo sistema di riferimento si aggiungono due forze d'inerzia: la forza centrifuga e la forza di Coriolis. Quest'ultima non produce nessun lavoro, fa solo curvare le linee di corrente, senza modificare la forma dell'equazione generale di Bernoulli (94.2). La forza centrifuga aggiunge un nuovo termine all'espressione dell'energia potenziale. L'energia potenziale totale dell'unità di

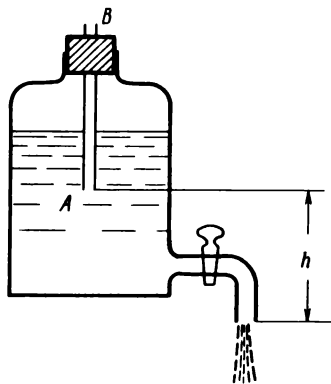
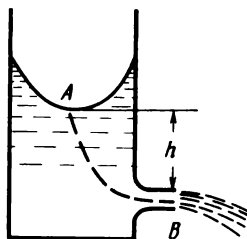



Fig. 254. Fig. 255.

massa del liquido sarà uguale a $u = gz - 1/2\omega^2 r^2$, tanto che l'equazione (94.2) si scriverà ora nella forma

$$\frac{v^2}{2} + gz - \frac{1}{2}\omega^2 r^2 + \frac{P}{\rho} = B = \text{cost}, \qquad (95.2)$$

dove v è una velocità relativa del liquido (cioè la velocità rispetto al sistema di riferimento in rotazione). La costante B di Bernoulli ha lo stesso valore per tutte le linee di corrente, poiché esse nascono in prossimità della superficie del liquido dove la velocità v è trascurabilmente piccola. Applichiamo l'equazione (95.2) alla linea di corrente AB, nata sulla superficie del liquido nel punto A (fig.255). Se si pone l'origine delle coordinate nel punto A, si avrà allora $z_A = r_A = v_A = 0$, $P_A = P_B = P_0$, $v_B = v$, $z_B = -h$, $r_B = R$, ed in seguito si ottiene

$$v = \sqrt{2(gh + \omega^2 R^2)}. \qquad (95.3)$$

Qui h indica l'altezza del punto A situato al centro della parte più bassa della superficie libera rispetto all'orificio e R il raggio del recipiente cilindrico. Il passaggio ad un sistema di riferimento immobile non presenta alcuna difficoltà.

§ 96. *La viscosità*

1. Nei liquidi reali, oltre alle forze di pressione normale, agiscono anche, alle frontiere degli elementi in moto del fluido, *forze tangenziali d'attrito* interno, dette anche *forze di viscosità*. Per convincersi dell'esistenza di tali forze si possono portare esempi semplicissimi. Così l'equazione di Bernoulli, stabilita nella supposizione che le forze di viscosità non esistino, ci permette di fare le seguenti conclusioni. Se il fluido scorre attraverso un

condotto rettilineo, orizzontale, di sezione trasversale costante la pressione del fluido deve essere uguale su tutta la lunghezza del condotto. In realtà la pressione diminuisce lungo il condotto nel senso del flusso. Perché il flusso sia stazionario, si deve mantenere tra le estremità del condotto una differenza di pressione costante che equilibri le forze d'attrito interno che compaiono durante il flusso del fluido.

Per il secondo esempio può servire il comportamento di un fluido in un recipiente in rotazione. Se un recipiente cilindrico verticale riempito di un fluido è messo in rotazione uniforme intorno al suo asse, anche il fluido a poco a poco si mette in rotazione. Dapprima cominciano a ruotare gli strati aderenti alle pareti del recipiente poi la rotazione si trasmette agli strati interni e così via finché tutto il fluido comincia a ruotare uniformemente come farebbe un corpo solido. Quindi, finché il moto non è ancora stabilito, si produce un trasferimento rotatorio costante dalle pareti del recipiente agli strati interni del fluido. Un tale trasferimento di moto sarebbe impossibile se non esistessero forze tangenziali tra il fluido e le pareti del recipiente, nonché tra gli strati del fluido stesso che sono in rotazione a velocità angolari diverse. Queste forze tangenziali si chiamano *forze d'attrito, interno*, se agiscono tra gli strati del fluido, *esterne* se sono forze di interazione tra il fluido e le pareti del recipiente. Sono particolarmente interessanti quelle forze d'attrito interno, dette *forze di viscosità*. Il problema dell'origine dell'attrito interno lo lasciamo per ora da parte. Lo riprenderemo nel II volume, quando si studierà la fisica molecolare.

2. Per determinare le leggi quantitative d'attrito interno conviene cominciare con un esempio particolarmente semplice. Consideriamo due piastre parallele infinitamente lunghe tra cui si trovi uno strato fluido. (Si considerano infinitamente lunghe, quelle piastre, la cui lunghezza e larghezza siano notevolmente più grandi della distanza tra le piastre). La piastra inferiore AB è immobile e quella superiore CD è in moto uniforme rispetto ad

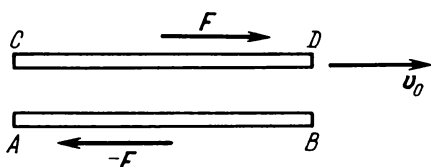
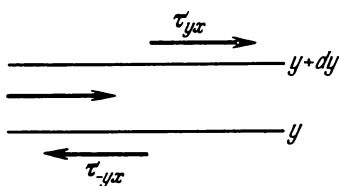



Fig. 256. Fig. 257.

AB con velocità v_0 (fig.256). Risulta che per mantenere in moto uniforme la piastra CD bisogna applicarle una forza costante F, diretta nel senso del moto. A sua volta la piastra AB deve essere sottoposta a una forza uguale e contraria, che la mantenga a riposo. La grandezza della forza F, come è già stato dimostrato sperimentalmente da Newton, è proporzionale alla velocità v_0, alla superficie della piastra S e indirettamente proporzionale alla di-

stanza h tra le piastre

$$F = \eta S \frac{v_0}{h} . \tag{96.1}$$

dove η è una costante, detta *coefficiente d'attrito interno* o *viscosità del fluido* (o, in breve, *viscosità*). Il valore del coefficiente non dipende dal materiale di cui sono fatte le piastre, ha diversi valori per i diversi fluidi. Per il fluido dato il coefficiente η dipende dai parametri che caratterizzano il suo stato interno e in primo luogo dalla temperatura.

Non è necessario che la piastra AB sia a riposo. Ambedue le piastre possono muoversi uniformemente e parallelamente l'una all'altra. Se la velocità della piastra AB è uguale a v_1 e quella della piastra CD è uguale a v_2 allora invece della formula (96.1) si può scrivere la formula più generale

$$F = \eta S \frac{v_2 - v_1}{h} . \tag{96.2}$$

Per convincersene è sufficiente passare ad un sistema di riferimento rispetto al quale la piastra AB risulti immobile.

Osserviamo anche che durante il moto uniforme della piastra CD il fluido deve agire su di essa con una forza $-\boldsymbol{F}$, affinché la forza risultante che agisce sulla piastra CD si annulli. Ne risulta che la piastra CD eserciterà sul fluido una forza $+\boldsymbol{F}$. Analogamente la piastra AB eserciterà sul fluido una forza $-\boldsymbol{F}$. Inoltre, gli esperimenti hanno dimostrato che il fluido viscoso aderisce alla superficie del corpo solido lungo il quale scorre. In altre parole, la velocità delle particelle del fluido è uguale a zero rispetto alla superficie del corpo solido su cui si trovano. Perciò nella formula (96.2) le forze $\boldsymbol{F}$ e $-\boldsymbol{F}$ si possono considerare applicate non alle piastre, ma alle frontiere dello strato fluido che esse delimitano. Anche v_1 e v_2 si possono identificare con le velocità di moto di queste stesse frontiere dello strato fluido. Quindi non è necessario ricorrere alle piastre, per introdurre la nozione di coefficiente di viscosità o, in breve, di viscosità.

3. Per generalizzare le formule (96.2) supponiamo che il flusso del fluido sia diretto lungo l'asse X e che la velocità del flusso dipenda soltanto dalla coordinata y

$$v_x = v_x(y), \quad v_y = v_z = 0.$$

Delimitiamo mentalmente uno strato fluido compreso tra due piani paralleli infinitamente ravvicinati, perpendicolari all'asse Y. Supponiamo che questi piani intersechino l'asse Y in punti di ordinate y e $y + dy$ (fig.257). Indichiamo con τ_{yx} la forza tangenziale che agisce sull'unità della superficie della frontiera superiore di questo strato di fluido che si trova al di sotto di quest'ultimo. Il primo indice y caratterizza la direzione della normale esterna alla frontiera superiore dello strato fluido, il secondo indice x caratterizza la direzione della forza applicata (cfr. § 74, punto 2). Generalizzando la

formula (92.2) per lo sforzo tangenziale τ_{yx}, scriveremo

$$\tau_{yx} = \eta \frac{\partial v_x}{\partial y}. \tag{96.3}$$

Ammettiamo, conformemente all'esperimento, che la formula (96.3) è valida non soltanto per un flusso uniforme, ma anche per flussi la cui velocità v_x vari rispetto al tempo. Lo sforzo tangenziale che si esercita sulla frontiera inferiore dello strato τ_{-yx} è diretto in senso opposto a τ_{yx}. Questi sforzi si differenziano soltanto per una grandezza infinitamente piccola, poiché lo spessore dello strato fluido dy è infinitamente piccolo ($\tau_{yx} = -\tau_{-yx}$).

4. Delimitiamo ora nello stesso flusso unidimensionale un parallelepipedo elementare $ABCD$ i cui lati sono paralleli agli assi delle coordinate (fig.258). Secondo l'equazione dei momenti il tensore degli sforzi deve esse-

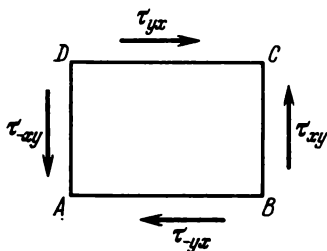



Fig. 258.

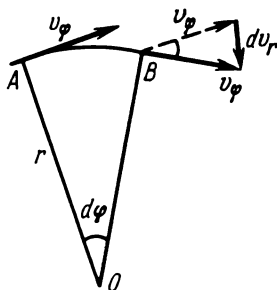



Fig. 259.

re simmetrico (cfr. § 74, punto 4). Perciò le basi BC e AD del parallelepipedo, che sono perpendicolari alla corrente, devono essere sottoposte agli sforzi tangenziali, inoltre $\tau_{xy} = \tau_{yx} = \eta\frac{\partial v_x}{\partial y}$. In questo modo gli *sforzi tangenziali si esercitano non soltanto nei piani paralleli alla corrente, ma anche nei piani perpendicolari alla corrente.*

Supponiamo ora che il fluido scorra non come flusso parallelo ma in modo arbitrario. Ammettiamo che le componenti tangenziali del tensore degli sforzi viscosi dipendano soltanto dalle velocità di deformazioni del fluido, ma non dalle deformazioni stesse o dalle loro derivate superiori rispetto al tempo. Limitiamoci ad *un'approssimazione lineare,* il che permetterà di ignorare le potenze uguali e superiori delle velocità di deformazioni. In quest'approssimazione gli sforzi tangenziali sono delle *funzioni lineari omogenee* delle velocità di deformazioni $\frac{\partial v_x}{\partial y}, \frac{\partial v_y}{\partial x}, \frac{\partial v_y}{\partial z}, \frac{\partial v_z}{\partial y}, \frac{\partial v_z}{\partial x}, \frac{\partial v_x}{\partial z}$. Se alla frontiera CD tra queste sei derivate la sola derivata $\frac{\partial v_x}{\partial y}$ non fosse nulla, lungo l'asse X su questa frontiera si eserciterebbe lo sforzo tangenziale

$\tau'_{yx} = \eta \frac{\partial v_x}{\partial y}$. Se fosse diversa da zero soltanto la derivata $\frac{\partial v_y}{\partial x}$, lo sforzo tan-*genziale avrebbe la stessa direzione e sarebbe uguale a* $\tau''_{yx} = \eta \frac{\partial v_y}{\partial x}$. E se fos-*sero diverse da zero le due derivate* $\frac{\partial v_x}{\partial y}$ e $\frac{\partial v_y}{\partial x}$, lo sforzo tangenziale sulla frontiera *CD* sarebbe uguale a $\tau_{yx} = \tau'_{yx} + \tau''_{yx} = \eta \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right)$. Questo risultato deriva direttamente dalla supposizione che tra gli sforzi tangenziali e le velocità di deformazioni del fluido esista una relazione lineare e omogenea. Ne deriva ancora che l'espressione ottenuta per τ_{yx} rimarrà valida qualsiasi siano i valori delle altre derivate $\frac{\partial v_y}{\partial z}$, $\frac{\partial v_z}{\partial y}$, ecc. Seguendo un ragionamento analogo otteniamo anche le espressioni di tutti gli altri sforzi tangenziali che agiscono sulle facce del parallelepipedo *ABCD*, cioè

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \eta \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right),$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \eta \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y}\right), \qquad (96.4)$$

$$\tau_{zx} = \tau_{xz} = \eta \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z}\right).$$

Se il fluido è incomprimibile, queste espressioni sono sufficienti per derivare le equazioni differenziali del flusso del fluido. Se invece il fluido è comprimibile, si dovrà aggiungere a queste espressioni ancora quelle per gli sforzi normali, che però non riportiamo poiché non ne avremo bisogno.

5. Consideriamo un caso particolare in cui un fluido viscoso ruota intorno ad un asse immobile con una velocità angolare ω. Le linee di corrente *h* hanno una forma circonferenziale. Sia *AB* un segmento infinitamente piccolo di lunghezza $r\,d\varphi$ di una linea di corrente (fig.259). Lo sforzo tangenziale sulla superficie cilindrica alla quale appartiene questo segmento è evidentemente diretto nel senso della rotazione, e si indica con $\tau_{r\varphi}$. Il primo indice *r* caratterizza il senso della normale esterna alla superficie cilindrica e il secondo indice φ il senso positivo dello sforzo tangenziale. Nel caso considerato *dr* sostituisce *dy* e *dx* la lunghezza dell'arco $AB = r d\varphi$. Perciò dalle formule (96.4) per lo sforzo tangenziale $\tau_{r\varphi}$ si ottiene

$$\tau_{r\varphi} = \eta \left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{r\partial\varphi}\right).$$

Nel punto *A* la componente radiale della velocità *v* è uguale a zero. Nel punto *B* compare la componente della velocità diretta lungo il raggio *OA*,

uguale a $dv_r = -v_\varphi d\varphi$, cosicché $\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} = -v_\varphi$, e perciò

$$\tau_{r\varphi} = \eta \left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r} \right). \qquad (96.5)$$

Sostituendovi $v_\varphi = \omega r$, si ottiene

$$\tau_{r\varphi} = \eta r \frac{\partial \omega}{\partial r}. \qquad (96.6)$$

Gli sforzi viscosi scompaiono se $\frac{\partial \omega}{\partial r} = 0$, cioè se il fluido ruota come un tutt'uno simile a un corpo solido. Non sarebbe così se non si fosse tenuto conto del secondo termine nella formula

$$\tau_{yx} = \eta \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right). \qquad (96.7)$$

6. Per illustrare l'applicazione della formula (96.5) consideriamo il flusso stazionario di un fluido compresso tra due cilindri coassiali in rotazione uniforme. Siano l l'altezza dei cilindri, R_1 e R_2 i loro raggi e Ω_1 e Ω_2 le loro velocità angolari. Supporremo la grandezza l molto grande rispetto allo spazio $R_2 - R_1$ tra i cilindri, si possono così considerare i cilindri infinitamente lunghi ed ignorare le complicazioni dovute ai bordi dei cilindri.

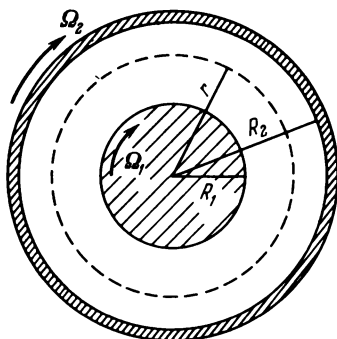



Fig. 260.

Tracciamo nel fluido una superficie cilindrica arbitraria di raggio r (fig.260). Il momento delle forze di viscosità che agiscono su questa superficie rispetto all'asse di rotazione è uguale a

$$M = 2\pi r^2 l \tau_{r\varphi} = 2\pi \eta l r^3 \frac{\partial \omega}{\partial r}.$$

In regime di rotazione stazionaria del fluido questo momento non deve dipendere dal raggio r. Solo a questa condizione il momento delle forze ap-

plicate al fluido contenuto tra due superfici cilindriche coassiali qualsiasi si annulla, mentre il momento cinetico del fluido si conserva. Quindi otteniamo l'equazione

$$r^3 \frac{\partial \omega}{\partial r} = \text{cost.}$$

Indicando la costante che fa parte dell'equazione con $-2A$ ed integrando, si ottiene

$$\omega = \frac{A}{r^2} + C,$$

dove C è una costante d'integrazione. Le costanti A e C vengono determinate dalle condizioni ai limiti. Poiché il fluido viscoso aderisce alla superficie del corpo lungo il quale esso scorre, la velocità angolare ω per $r = R_1$ deve diventare uguale a Ω_1, e per $r = R_2$ a Ω_2. Ciò conduce a due equazioni

$$\frac{A}{R_1^2} + C = \Omega_1, \quad \frac{A}{R_2^2} + C = \Omega_2,$$

risolvendo le quali si ottiene

$$A = \frac{R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} (\Omega_1 - \Omega_2), \quad C = \frac{R_2^2 \Omega_2 - R_1^2 \Omega_1}{R_2^2 - R_1^2}$$

e poi

$$\omega = \frac{R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \frac{\Omega_1 - \Omega_2}{r} + \frac{R_2^2 \Omega_2 - R_1^2 \Omega_1}{R_2^2 - R_1^2} \tag{96.8}$$

Il momento delle forze di viscosità che agiscono sul cilindro interno è uguale a

$$M = 2\pi\eta l(-2A) = 4\pi\eta l \frac{R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} (\Omega_1 - \Omega_2) \tag{96.9}$$

La formula (96.9) costituisce la base di un metodo pratico di misurazione dei coefficienti di viscosità dei liquidi e dei gas. Il cilindro interno viene sospeso nel fluido in esame in posizione verticale ad un filo sottile mentre il cilindro esterno si mette in rotazione uniforme con una velocità angolare $\Omega_2 = \Omega$. Si misura l'angolo di torsione φ del filo di sospensione grazie al quale il cilindro interno si trova in equilibrio, il che avviene quando il momento M degli sforzi di viscosità viene equilibrato dal momento $f\varphi$ del filo in torsione, dove f è il modulo di torsione. Il coefficiente di viscosità viene allora calcolato mediante la formula

$$\eta = \frac{f\varphi}{4\pi l} \frac{R_2^2 - R_1^2}{R_1^2 R_2^2 \Omega} . \tag{96.10}$$

Problemi

1. Utilizzando un sistema locale di coordinate con l'origine nel punto considerato dello spazio, si dimostri per derivazione diretta che la formula (96.7) si trasforma, quando il fluido è in rotazione, nella formula (96.5).

Soluzione. Facciamo passare per un punto A dello spazio una linea di corrente circolare. Poniamo l'origine delle coordinate locali nel punto A orientando gli assi di coordinate X e Y come indicato sulla figura 261. Per le coordinate e le componenti della velocità in un punto B si ottiene

$$x = r \sin \varphi, \qquad y = r \cos \varphi - r_0,$$
$$v_x = v_\varphi \cos \varphi, \ v_y = -v_\varphi \sin \varphi,$$

dove r_0 e r sono i raggi vettori dei punti A e B, v_φ è la velocità del fluido nel punto B. Derivando queste relazioni e ponendo nei risultati finali $\varphi = 0$ (punto A), si ottiene per il punto A

$$dx = r_0 d\varphi, \quad dy = dr,$$
$$dv_x = dv_\varphi, \quad dv_y = -v_\varphi d\varphi.$$

da cui

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{\partial v_\varphi}{\partial r}, \quad \frac{\partial v_y}{\partial x} = -\frac{v_\varphi}{r_0}.$$

Dopo la sostituzione nelle formula (96.7), si ottiene (96.5).

2. Come cambierà la formula (96.9) nel caso limite in cui lo spazio tra i cilindri $h = R_2 - R_1$ diventa trascurabilmente piccolo rispetto ai raggi R_1 e R_2?

Risposta.
$$M = \frac{2\pi\eta l R^3}{h}(\Omega_2 - \Omega_1). \tag{96.11}$$

Si può ottenere questa formula anche considerando lo strato di fluido compresso tra i cilindri come piano-parallelo e utilizzando la formula (96.2). Si invita il lettore ad effettuare il calcolo.

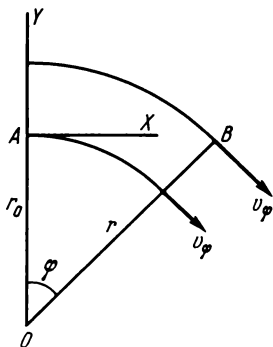
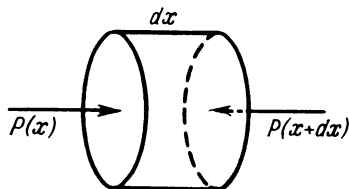



Fig. 261. Fig. 262.

§ 97. *Flusso stazionario di un fluido in un condotto rettilineo. Formula di Poiseuille*

1. Consideriamo il flusso di un fluido viscoso incomprimibile lungo un condotto cilindrico rettilineo di raggio R. Le linee di corrente siano parallele all'asse del condotto. Se delimitiamo un segmento di corrente qualunque

infinitamente sottile, dalla condizione di incomprimibilità deriva che la velocità del flusso v sarà uguale lungo tutto il percorso cioè la velocità del fluido non può variare lungo il condotto. Però può certamente cambiare con il variare della distanza r dall'asse del condotto. Quindi la velocità v del fluido è funzione del raggio r del condotto.

Facciamo coincidere l'asse del condotto con l'asse X orientandolo nel senso del flusso. Delimitiamo nel condotto un segmento cilindrico qualunque infinitamente corto di raggio r e di lunghezza dx (fig.262). Sulla sua superficie laterale nel senso del flusso agisce la forza tangenziale d'attrito interno $dF = 2\pi r\eta \frac{dv}{dr} dx$. Inoltre sulle basi del cilindro nel medesimo senso agisce una forza di differenza delle pressioni $dF_1 = \pi r^2 [P(x) - P(x+dx)] = -\pi r^2 \frac{dP}{dx} dx$. In caso di flusso stazionario la somma di queste due forze deve annullarsi e perciò

$$2\eta \frac{dv}{dr} = r \frac{dP}{dx}.$$

La velocità $v(r)$ e la derivata $\frac{dv}{dr}$ non variano con il variare di x. Di conseguenza deve essere costante anche la derivata $\frac{dP}{dx}$ e deve esere uguale a $(P_2 - P_1)/l$, dove P_1 è la pressione all'entrata del condotto, P_2 la pressione all'uscita e l la lunghezza del condotto. Come risultato si avrà l'equazione

$$\frac{dv}{dr} = -\frac{P_1 - P_2}{2\eta l} r. \qquad (97.1)$$

Integrandola, si ottiene

$$v = -\frac{P_1 - P_2}{4\eta l} r^2 + C.$$

La costante d'integrazione C sarà determinata dalla condizione che sulla parete del condotto, cioè con $r = R$, la velocità v deve tendere a zero. Questo dà

$$v = \frac{P_1 - P_2}{4\eta l} (R^2 - r^2). \qquad (97.2)$$

La velocità è *massima sull'asse del condotto, dove il suo valore raggiunge un valore uguale a*

$$v_0 = \frac{P_1 - P_2}{4\eta l} R^2. \qquad (97.3)$$

Quando ci si allontana dall'asse del condotto la velocità v varia secondo una legge parabolica.

2. Calcoliamo il *consumo del liquido,* cioè la quantità di fluido che scorre al secondo attraverso la sezione trasversale del condotto. La massa di fluido, che scorre ogni secondo attraverso un'area circolare con raggio r

interno e raggio $r + dr$ esterno, è uguale a $dQ = 2\pi r dr \cdot \rho v$. Portandovi l'espressione per v ed integrando, si ottiene il consumo cercato del fluido

$$Q = \pi\rho \frac{P_1 - P_2}{2\eta l} \int_0^R (R^2 - r^2) r\, dr,$$

ossia

$$Q = \pi\rho \frac{P_1 - P_2}{8\eta l} R^4. \qquad (97.4)$$

Il *consumo del fluido è proporzionale alla differenza di pressioni $P_1 - P_2$*, al quarto grado del raggio del condotto e indirettamente proporzionale alla sua lunghezza e al coefficiente di viscosità del fluido. Queste proporzioni sono state fissate da Hagen nel 1839 e nel 1840 da Poiseuille (1799-1869) che avevano lavorato senza contatti fra loro. Hagen aveva studiato il flusso dell'acqua nei condotti e Poiseuille il flusso dei liquidi nei tubi capillari. La formula (97.4) si chiama formula di Poiseuille, benché Poiseuille stesso non l'abbia ottenuta ma si sia limitato a studiare il problema solo in via sperimentale. La formula di Poiseuille è alla base di un metodo sperimentale di misurazione dei coefficienti di viscosità dei liquidi.

La formula (97.4) può avere la forma $Q = \pi\rho R^2 \cdot v_0/2$. D'altra parte, si può introdurre la velocità di flusso media $\bar{v}$ definendola dalla relazione $Q = \rho\pi R^2 \bar{v}$. Mettendo a confronto queste due espressioni si ottiene

$$\bar{v} = \frac{1}{2} v_0. \qquad (97.5)$$

La formula di Poiseuille è valida soltanto per i *flussi laminari*. Un flusso si chiama *laminare* se le particelle del fluido si muovono lungo traiettorie rettilinee parallele all'asse del condotto. (Una definizione più generale applicabile a qualunque flusso si dà nel § 98). In caso di grandi velocità il flusso laminare diventa instabile e si trasforma in *flusso turbolento* che studieremo nel §98. A questi ultimi la formula di Poiseuille non è applicabile.

3. L'energia cinetica trasportata al secondo dal flusso di un fluido attraverso la sezione trasversale di un condotto è determinata dall'espressione

$$K = \int_0^R \frac{\rho v^2}{2} \cdot 2\pi r v\, dr.$$

Sostituendovi il valore per v si ottiene dopo aver integrato

$$K = \frac{1}{4} Q v_0^2 = Q(\bar{v})^2. \qquad (97.6)$$

Il lavoro che ogni secondo effettua sul fluido la differenza di pressione $P_1 - P_2$ è determinato dall'espressione $A = \int v(P_1 - P_2) 2\pi r\, dr$, ossia

$$A = \frac{P_1 - P_2}{\rho} Q. \qquad (97.7)$$

Un lavoro uguale ma di segno opposto è prodotto dalle forze d'attrito interno, perché in regime stazionario l'energia cinetica del fluido rimane costante: $A' = -A$. Per mezzo della formula (97.3) si può escludere la differenza di pressioni $P_1 - P_2$, allora si avrà

$$A' = -\frac{4\eta v_0 l}{\rho R^2} Q. \tag{97.8}$$

Le formule ottenute permettono di rispondere alla domanda, quando si possono ignorare le forze di viscosità e applicare quindi l'equazione di Bernoulli. Per questo è necessario ovviamente che la perdita di energia cinetica del fluido, dovuta all'azione delle forze di viscosità, sia trascurabilmente piccola in confronto all'energia cinetica del fluido stesso, cioè $|A'| \ll K$. Ciò presuppone la condizione

$$\frac{v_0 R^2}{16\nu l} \gg 1. \tag{97.9}$$

Con la lettera ν è indicata qui la cosiddetta *viscosità cinematica*, cioè il rapporto

$$\nu = \frac{\eta}{\rho}. \tag{97.10}$$

La grandezza η, per distinguerla da ν, viene chiamata *viscosita dinamica*.

4. Le leggi stabilite da Poiseuille possono essere ottenute, nella forma generale mediante il metodo delle dimensioni. Il vantaggio di questo metodo consiste nel fatto che esso è applicabile ai condotti rettilinei di sezione trasversale arbitraria e non soltanto ai condotti cilindrici. Si chiede solo che le sezioni trasversali dei condotti siano geometricamente omogenei. Queste sezioni possono distinguersi una dall'altra soltanto per le loro dimensioni. Per ogni sezione trasversale si può stabilire una dimensione caratteristica, che può essere, ad esempio, il suo perimetro o la radice quadrata della sua area. Si possono anche tagliare in due parti le sezioni trasversali di tutti i condotti per mezzo di segmenti rettilinei in modo da assicurare la similitudine geometrica delle figure risultanti. Anche le lunghezze di questi segmenti possono essere assunte come *dimensioni caratteristiche*. Nel caso di un condotto di sezione ellittica, ad esempio, si può prendere come dimensione caratteristica la lunghezza dell'asse grande o piccolo della sezione ellittica corrispondente. Ma si possono scegliere anche altri segmenti che caratterizzano le dimensioni dell'ellisse. Tutte le altre dimensioni della sezione trasversale di un condotto sono definite dalla dimensione caratteristica scelta.

Come in tutte le altre applicazioni del metodo delle dimensioni, per stabilire le leggi di Poiseuille basta prima di tutto determinare le grandezze fisiche legate tra di loro da una relazione funzionale. Nel caso di un flusso stazionario laminare in un condotto le forze di viscosità vengono equilibrate dai gradienti di pressione. Dato che i gradienti figurano nell'equazione di

moto, la differenza di pressione $P_1 - P_2$ e la lunghezza l del condotto possono presentarsi soltanto nella combinazione $(P_1 - P_2)/l$. Poiché il fluido scorre senza accelerazione, il carattere del flusso non può dipendere dalla densità del fluido. La densità ρ e il consumo del fluido Q possono presentarsi soltanto nella combinazione Q/ρ, perché quest'ultima è una grandezza puramente geometrica ed è uguale al volume del fluido che scorre ogni secondo attraverso la sezione trasversale del condotto. Aggiungendovi ancora la viscosità η del fluido e la dimensione caratteristica trasversale a del condotto, si ottiengono quattro grandezze

$$\frac{Q}{\rho}, \frac{P_1 - P_2}{l}, a, \eta.$$

che devono essere legate da una relazione funzionale. Al posto di a si può prendere l'area S della sezione trasversale del condotto. Applicando il metodo generale di determinazione delle combinazioni adimensionali (cfr. § 87, punto 6) è facile convincersi che con le grandezze in esame si può formare soltanto una combinazione indipendente adimensionale, e cioè

$$\frac{Q}{\rho} \cdot \frac{l}{P_1 - P_2} \cdot \frac{\eta}{S^2}.$$

Quindi una tale combinazione deve essere costante. Indicando qusta costante con C, si ottiene

$$Q = C \frac{P_1 - P_2}{l\eta} \rho S^2. \qquad (97.11)$$

Questa formula esprime tutte le leggi di Poiseuille. Essa costituisce una generalizzazione della formula (97.4) per il caso di condotti rettilinei di sezione trasversale arbitraria. Il valore della costante C dipende dalla forma della sezione trasversale e non può essere calcolato in base ai metodi della teoria delle dimensioni.

Si deve ricorrere a prove sperimentali oppure ai metodi dinamici, cioè all'integrazione delle equazioni di moto.

Problemi

1. Calcolare il flusso stazionario di un liquido incomprimibile parallelo all'asse di un sistema di due cilindri coassiali di raggio interno R_1 ed esterno R_2, di lunghezza l, nonché il consumo del liquido.

Soluzione. Consideriamo uno strato circolare di liquido di raggio interno r ed esterno $r+dr$. La forza d'attrito interna che agisce su di esso nel senso del flusso è uguale a

$$2\pi l\eta\left[\left(r\frac{dv}{dr}\right)_{r+dr} - \left(r\frac{dv}{dr}\right)_r\right] = 2\pi l\eta\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv}{dr}\right) dr.$$

(Gli indici r e $r+dr$ indicano che le grandezze tra parentesi tonde devono essere calcolate rispettivamente per i valori dei raggi r e $r+dr$. Nel medesimo senso agisce la forza dovuta alla differenza di pressione $(P_1 - P_2)2\pi r\, dr$. In caso di flusso stazionario la somma delle due forze

si annulla, il che viene espresso dall'equazione

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv}{dr}\right) = -\frac{P_1 - P_2}{l\eta}r. \qquad (97.12)$$

La soluzione di quest'equazione, che si annulla per $r=R_1$ e $r=R_2$, è

$$v = \frac{P_1 - P_2}{4l\eta}\left\{R_2^2 - r^2 + \frac{R_2^2 - R_1^2}{\ln(R_2/R_1)}\ln\frac{r}{R_2}\right\}.$$

Il consumo del liquido è

$$Q = \frac{\pi\rho(P_1 - P_2)}{8\eta l}\left\{R_2^4 - R_1^4 - \frac{(R_2^2 - R_1^2)^2}{\ln(R_2/R_1)}\right\}.$$

2. Si dimostri che in caso di flusso laminare stazionario di un liquido incomprimibile lungo un condotto rettilineo di sezione trasversale arbitraria e di lunghezza l, la velocità v del liquido soddisfa l'equazione

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{P_1 - P_2}{l\eta} = 0. \qquad (97.13)$$

(Il piano di coordinate YZ è perpendicolare all'asse del condotto, gli assi Y e Z sono reciprocamente perpendicolari e orientati arbitrariamente).

Suggerimento. Si prenda un parallelepipedo rettangolare arbitrario di liquido, infinitamente sottile di lunghezza l i cui spigoli siano paralleli agli assi di coordinate, e si formuli la condizione d'annullamento delle forze di viscosità e della differenza di pressione che gli sono applicate così come è stato fatto nel derivare l'equazione (97.12).

3. Si calcoli la velocità del flusso e il consumo del liquido in un condotto di sezione ellittica.

Soluzione. Questo problema è uno di quelli che si risolvono per mezzo del *metodo intuitivo*. Si sceglie intuitivamente la soluzione dell'equazione differenziale (97.13), poi vengono scelti i coefficienti che figurano in questa soluzione in modo che sia soddisfatta la condizione limite sulla parete del condotto: $v=0$. Orientiamo gli assi Y e Z lungo gli assi principali della sezione trasversale ellittica normale e cerchiamo una soluzione che abbia la forma $v = Ay^2 + Bz^2 + v_0$. Quest'espressione soddisfa l'equazione (97.13), a condizione che

$$2A + 2B = -\frac{P_1 - P_2}{l\eta}.$$

Sulla parete interna del condotto ellittico $v=0$, cioè $Ay^2 + Bz^2 + v_0 = 0$. Quest'equazione deve diventare l'equazione della sezione ellittica del condotto $\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} - 1 = 0$, e perciò

$$A = -\frac{v_0}{a^2}, \quad B = -\frac{v_0}{b^2}.$$

Per calcolare le costanti A, B e v_0 disponiamo di tre equazioni lineari. Risolvendole, si ottiene

$$v_0 = \frac{P_1 - P_2}{2l\eta}\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}, \qquad (97.14)$$

$$v = v_0\left(1 - \frac{y_2}{a^2} - \frac{z_2}{b^2}\right). \qquad (97.15)$$

La costante v_0 è evidentemente la velocità del flusso sull'asse del condotto.

Calcoliamo ora il consumo del liquido. Le superfici sulle quali la velocità v è costante sono in sostanza dei cilindri ellittici

$$\frac{y^2}{a'^2} + \frac{z^2}{b'^2} = 1,$$

i cui semiassi sono determinati dalle relazioni

$$a'^2 = a^2\frac{v_0 - v}{v_0}, \quad b'^2 = b^2\frac{v_0 - v}{v_0}.$$

Prendiamo due di tali cilindri ellittici, i cui valori del paramentro v siano infinitamente vicini. L'area della sezione normale tra questi cilindri è $dS = d(\pi a'b') = -\pi\frac{ab}{v_0}\,dv$. Il consumo del liquido è

$$Q = \rho\int v\,dS = -\rho\frac{\pi ab}{v_0}\int_{v_0}^{0} v\,dv,$$

ossia

$$Q = \frac{\rho\pi ab}{2}v_0. \tag{97.16}$$

§ 98. *Leggi della similitudine idrodinamica*

1. Consideriamo un flusso di fluido che scorre lungo un corpo o un sistema di corpi. Allo stesso modo si possono introdurre un'infinità di corpi *simili* o di *corpi disposti similmente* che sono bagnati da altri fluidi. A quali condizioni devono soddisfare i parametri del flusso e le costanti che caratterizzano le proprietà dei fluidi (la densità, la viscosità, ecc.) perché i due flussi siano *meccanicamente simili*? Se esiste similitudine, allora si può, conoscendo il quadro del flusso del primo sistema di corpi, prevedere senza possibilità d'errore il flusso del fluido in un altro sistema di corpi geometricamente simili. Questo ha una grande importanza nelle costruzioni navali e aeronautiche. Invece delle navi e degli aerei reali si collaudano i loro modelli *ridotti geometricamente simili*, poi si determina con un nuovo calcolo il comportamento dei sistemi reali. Il metodo più semplice per risolvere il problema posto è dato dalla teoria delle dimensioni.

Esaminiamo il problema da un punto di vista generale. Siano $\boldsymbol{r}$ e $\boldsymbol{v}$ rispettivamente il raggio vettore e la velocità del fluido in punti disposti in modo analogo, l la *dimensione caratteristica* e v_0 la *velocità caratteristica del flusso,* la velocità del fluido, ad esempio, con la quale scorre dall'« infinito » sul sistema di corpi considerato. Le proprietà del fluido sono caratterizzate dalla viscosità η, dalla densità ρ e dalla comprimibilità. Al posto della comprimibilità si può utilizzare la velocità del suono nel fluido in esame. Se è essenziale la forza di gravità, allora quest'ultima è caratterizzata dall'accelerazione di caduta libera g. Se il flusso non è stazionario, si deve introdurre un certo *tempo caratteristico* τ durante il quale avviene un note-

vole cambiamento del flusso. Secondo le equazioni di moto deve esistere una relazione funzionale tra le grandezze

$$v,\ v_0,\ r,\ l,\ \rho,\ \eta,\ c,\ g,\ \tau.$$

Si possono formarne sei combinazioni adimensionali indipendenti, cui si riferiscono i due rapporti v/v_0, r/l e in più i quattro numeri adimensionali

$$\mathbf{Re} = \frac{\rho l v_0}{\eta} = \frac{l v_0}{\nu}, \tag{98.1}$$

$$\mathbf{F} = \frac{v_0^2}{gl}, \tag{98.2}$$

$$\mathbf{M} = \frac{v_0}{c}, \tag{98.3}$$

$$\mathbf{S} = \frac{v_0 \tau}{l}. \tag{98.4}$$

Secondo la regola delle dimensioni una di queste combinazioni adimensionali è funzione di tutte le altre, ad esempio

$$\frac{v}{v_0} = f\left(\frac{r}{l}, \mathbf{Re}, \mathbf{F}, \mathbf{M}, \mathbf{S}\right), \tag{98.5}$$

ossia

$$v = v_0 f\left(\frac{r}{l}, \mathbf{Re}, \mathbf{F}, \mathbf{M}, \mathbf{S}\right). \tag{98.6}$$

Se cinque delle sei combinazioni adimensionali sopra indicate coincidono per due flussi, allora deve coindicere anche la sesta. È questa l'espressione della *legge generale della similitudine dei flussi* ; si dice allora che i flussi presentano tra loro una *similitudine meccanica* o *idrodinamica*.

2. La grandezza (98.1) si chiama *numero di Reynolds* (1842-1912), la grandezza (98.2)-*numero di Froude*, la grandezza (98.3)-*numero di Mach* e la grandezza (98.4)-*numero di Strouhal.*

Il significato fisico dei numeri di Mach e di Strouhal non richiede nessun chiarimento, mentre quello dei numeri di Reynolds e di Froude deve essere precisato. Prima di tutto è chiaro di per sè che i due numeri sono adimensionali. *Secondo il suo ordine di grandezza, il numero di Reynolds è il rapporto tra l'energia cinetica del fluido e la perdita di energia cinetica condizionata dal lavoro delle forze di viscosità su una lunghezza stabilita.* Infatti, l'energia cinetica di un fluido è $K \sim 1/2\rho v_0^2 l^3$. La forza di viscosità si ottiene moltiplicando la grandezza dello sforzo viscoso $\eta v_0/l$ per l'area caratteristica l^2, ciò che conduce a $\eta v_0 l$. Il prodotto di questa forza per la lunghezza caratteristica dà l'ordine di grandezza del lavoro delle forze di viscosità $A \sim \eta v_0 l^2$. Il rapporto tra energia cinetica K e lavoro A sarà

$$\frac{K}{A} \sim \frac{\rho l v_0}{\eta},$$

è questo il numero di Reynolds. Il *numero di Reynolds caratterizza* quindi il *ruolo relativo dell'inerzia e della viscosità del fluido durante il flusso. Nel caso in cui il numero di Reynolds è grande è l'energia che ha maggiore importanza e nel caso in cui è piccolo è la viscosità che ha il ruolo principale.*

È evidente che il numero di Reynolds non è del tutto definito, poiché contiene una lunghezza e una velocità caratteristiche che anch'esse non sono ugualmente definite. Questo numero, come tutti gli altri numeri adimensionali che figurano nella legge di similitudine, è caratterizzato soltanto secondo un ordine di grandezza. Se le dimensioni del corpo sono pressappoco identiche in diverse direzioni, non si ha un'indeterminatezza notevole, altrimenti possono essere scelte come lunghezza caratteristica grandezze che possono distinguersi notevolmente le une dalle altre. Nel caso di un liquido che scorre ad esempio attraverso un condotto, si può prendere per lunghezza caratteristica la sua lunghezza, il suo raggio o qualunque grandezza intermedia. I numeri di Reynolds corrispondenti possono distinguersi per molti ordini di grandezza. La scelta di uno di questi numeri dipende da come è stato impostato il problema. In questo modo è stata dedotta nel paragrafo precedente la condizione (97.9) che implica che si possono ignorare le forze di viscosità. La grandezza che figura nel primo membro della formula (97.9) può essere considerata come un numero di Reynolds se si prende per lunghezza caratteristica $\frac{1}{16}\frac{R^2}{l}$. In questo caso la dimensione caratteristica dipende sia dalla lunghezza del condotto che dal suo raggio. In tal caso la condizione (97.9) è valida per tutti i condotti e non soltanto per quelli circolari geometricamente simili (cioè per condotti caratterizzati da un rapporto costante R/l). Se il condotto è lungo ($l \gg 16R$) la condizione sufficiente può essere espressa nella forma

$$\frac{v_0 R}{\nu} \gg 1, \qquad (98.7)$$

cioè come lunghezza caratteristica si può prendere il raggio R. Ma avremmo commesso un errore se al posto della formula (98.7) avessimo scelto la condizione $v_0 l/\nu \gg 1$.

Un significato analogo ha il *numero di Froude* **F**. *Secondo il suo ordine di grandezza esso definisce il rapporto tra l'energia cinetica del fluido e l'incremento di energia cinetica determinato dal lavoro prodotto dalla forza di gravità su una distanza uguale alla lunghezza caratteristica. Più grande è il numero di Froude, più grande è il ruolo dell'inerzia in confronto alla gravità e viceversa.*

3. Per un flusso stazionario il tempo caratteristico τ e il numero di Strouhal diventano infiniti. Perciò questo numero scompare nella relazione (98.6). Lo stesso accade con il numero di Mach nel caso di fluidi incomprimibili per i quali esso diventa uguale a zero. Quindi per un flusso stazionario di fluidi incomprimibili la relazione (98.6) si trasforma in

$$v = v_0 f\left(\frac{r}{l}, \mathbf{Re}, \mathbf{F}\right). \tag{98.8}$$

I *flussi sono simili se i loro numeri di Reynolds e di Froude sono uguali.*

Si deve comunque osservare che se negli esperimenti si utilizza lo stesso fluido in cui deve muoversi l'oggetto reale, i criteri di similitudine di Reynolds e di Froude diventano incompatibili. Infatti, scriviamo questi criteri nella forma

$$\frac{l_1 v_1}{\nu_1} = \frac{l_2 v_2}{\nu_2}, \quad \frac{v_1^2}{l_1 g_1} = \frac{v_2^2}{l_2 g_2},$$

dove l'indice 1 si riferisce al sistema reale e l'indice 2 al suo modello ridotto o ingrandito. Moltiplicando queste relazioni numero per numero si ottiene

$$\frac{\nu_2}{\nu_1} = \frac{g_1}{g_2}\left(\frac{v_2}{v_1}\right)^3 = \left(\frac{g_2}{g_1}\right)^{1/2}\left(\frac{l_2}{l_1}\right)^{3/2}. \tag{98.9}$$

In teoria la variazione di caduta libera g è possibile, ma non è praticamente realizzabile. Del resto anche se i valori di g sono identici si potrebbe in teoria soddisfare entrambi i criteri di similitudine. Per questo bisogna adottare fluidi di viscosità cinematiche differenti che soddisfino la relazione (98.9), il che nella maggior parte dei casi è quasi impossibile. Negli esperimenti su modelli può praticamente essere rispettato soltanto un criterio di similitudine, o quello di Reynolds o quello di Froude. In certi casi questo può essere sufficiente. Supponiamo, ad esempio, che il numero di Reynolds sia grande e il numero di Froude piccolo o dell'ordine dell'untià. Allora il flusso del fluido sarà in sostanza determinato dall'inerzia e dalla gravità. Le variazioni del numero di Reynolds lo influenzeranno poco. In questo caso la similitudine del flusso sarà caratterizzata soltanto dal *criterio di Froude.* Al contrario, nel caso in cui il numero di Reynolds sia piccolo e quello di Froude grande, il ruolo determinante spetta all'inerzia e alla viscosità; e l'influenza della gravità sarà insignificante. La similitudine avrà luogo se sarà rispettata l'*uguaglianza dei numeri di Reynolds.*

4. Per studiare il comportamento di un aereo in volo, per determinare le forze che agiscono sull'aereo, ad esempio, si fissa un modello dell'aereo in *una galleria aerodinamica* in cui si crea un flusso uniforme d'aria. Alla base di questo procedimento c'è il *principio di relatività* secondo cui l'effetto può dipendere anche soltanto dal moto relativo dell'aereo o dell'aria. Le gallerie aerodinamiche moderne sono delle installazioni grandiose in cui la velocità dell'aria può essere portata a centinaia di metri al secondo. Una riduzione notevole delle dimensioni del modello è impossibile per la seguente ragione. Per conservare la similitudine aerodinamica è necessario che sia rispettata l'uguaglianza dei numeri di Reynolds $\mathbf{Re} = vl/\nu$, il che implica che la velocità del flusso dell'aria deve essere aumentata di tante volte di quante l'aereo reale è più grande del suo modello. Ma a grandi velocità comincia a manifestarsi notevolmente la comprimibilità dell'aria che altera la similitudine aerodinamica. Per questo per le grandi velocità che interessano l'aviazione moderna si devono adottare modelli di grandezza naturale o ridotti di poco. Ecco perché le sezioni delle gallerie aerodinamiche devono essere molto grandi perché possano contenere singole parti dell'aereo o persino un aereo intero. Per superare queste diffi-

coltà si potrebbe in teoria aumentare la densità dell'aria chiudendo le gallerie aerodinamiche ermeticamente. Il fatto è che la viscosità dinamica η di un gas non dipende praticamente dalla densità del gas (a temperatura data) per cui la viscosità cinematica $\nu = \eta/\rho$ è inversamente proporzionale alla densità. Aumentando la densità ρ si può conservare la similitudine aerodinamica anche per modelli fortemente ridotti senza aumentare notevolmente e persino senza cambiare la velocità del flusso d'aria v. Malgrado la difficoltà di costruire gallerie aerodinamiche ermetiche, questo procedimento è largamente utilizzato. Va da sé che questo metodo non elimina le difficoltà che sorgono quando la velocità del flusso d'aria s'avvicini alla velocità del suono o la superi perché in questo caso per conservare la similitudine aerodinamica si esige non soltanto l'uguaglianza dei numeri di Reynolds ma anche quella dei numeri di Mach.

Problemi

1. Un modello di nave di lunghezza $l_1 = 5$ m è messo in moto da un motore di potenza $P_1 = 5$ cav, che gli comunica una velocità $v_1 = 15$ km/h. Quale deve essere la potenza P del motore per mettere in moto una nave lunga 80 m, geometricamente simile al modello, se il suo moto è idrodinamicamente simile a quello del modello? Si calcoli la velocità della nave v in queste condizioni.

Soluzione. La viscosità cinematica dell'acqua è $\nu = 0{,}010\ \mathrm{cm^2/s}$. Calcolando i numeri di Reynolds e di Froude per il modello dato, si ottiene

$$\mathbf{Re} = \frac{l_1 v_1}{\nu_1} = 2{,}1 \cdot 10^7, \quad \mathbf{F} = \frac{v_1^2}{g l_1} = 0{,}022.$$

Un ruolo determinante spetta al numero di Froude, mentre l'influenza del numero di Reynolds non è sostanziale. Dall'uguaglianza dei numeri di Froude otteniamo $v = v_1 (l/l_1)^{1/2} =$ $= 60$ km/h. Poi sulla base dei criteri di dimensionalità si ottiene

$$P = \rho v^2 l^{5/2} g^{1/2} f(\mathbf{Re}, \mathbf{F}) = \rho \mathbf{F} l^{7/2} g^{3/2} f(\mathbf{Re}, \mathbf{F}).$$

Ignorando l'influenza dei numeri di Reynolds si ha

$$P = P_1 (l/l_1)^{7/2} \approx 80\,000\ \mathrm{CV}.$$

2. Di quanto si deve modificare la velocità angolare di rotazione dell'elica verticale di un'elicottero e la potenza del suo motore perché la forza ascensionale rimanga invariata se si sostituisce l'elica e il corpo stesso dell'elicottero con un'elica e un corpo geometricamente simili ma di dimensioni lineari ingranditi di α volte?

Soluzione. Dai criteri di dimensionalità deriva che la forza ascensionale deve essere espressa dalla formula

$$F = \rho l^4 \omega^2 f_1 \left(\frac{l^2 \omega \rho}{\eta} \right),$$

e la potenza dalla formula

$$P = \rho l^5 \omega^3 f_2 \left(\frac{l^2 \omega \rho}{\eta} \right),$$

Poiché la densità e la viscosità dell'aria sono uguali in ambedue casi, la forza ascensionale non cambierà se i valori della funzione f_1 e del coefficiente che le è inerente non cambieranno. Per questo bisogna rispettare la condizione $l_1^2 \omega_1 = l_2^2 \omega_2$, da cui

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \left(\frac{l_1}{l_2} \right)^2 = \frac{1}{\alpha^2}$$

e poi

$$\frac{P_1}{p_1} = \frac{l_2^5 \omega_2^3}{l_1^5 \omega_1^3} = \frac{l_2 \omega_2}{l_1 \omega_1} = \frac{l_1}{l_2} = \frac{1}{\alpha}.$$

§ 99. *Turbolenza e instabilità idrodinamica*

1. Fin qui ci siamo limitati allo studio dei cosiddetti flussi *laminari* (stratiformi). La particolarità del flusso laminare è la sua *regolarità*. Il flusso, conservando il carattere laminare, può cambiare se cambiano le forze che agiscono sul fluido o le condizioni esterne nelle quali esso si trova. Nel caso di un flusso laminare in un condotto rettilineo di sezione trasversale costante, le particelle del fluido si muovono lungo traiettorie rettilinee parallele all'asse del condotto. Tuttavia in casi velocità assai elevata il flusso laminare risulta *instabile* e si trasforma nel cosiddetto *flusso turbolento*. Un flusso turbolento è un flusso le cui caratteristiche idrodinamiche (la velocità, la pressione, e per i gas la densità e la temperatura) cambiano rapidamente ed irregolarmente rispetto al tempo (cioè fluttuano). Le particelle del fluido effettuano moti irregolari, instabili lungo le traiettorie complesse il che conduce ad un rimescolamento intenso tra gli strati del fluido in flusso. Come esempi possono servire il flusso dell'acqua in un torrente di montagna, in una cascata o dietro la scia di una nave veloce o anche il flusso del fumo di una ciminiera ecc. Tali variazioni rapide e irregolari sono dovute non alle variazioni delle vorze attive o delle condizioni esterne, ma all'instabilità dei flussi laminari in determinate condizioni. L'instabilità dei flussi laminari e la comparsa della turbolenza sono problemi assai complessi e molto lontani ancora da una soluzione definitiva. Lo studio di questi problemi esula dal programma del nostro corso, tuttavia possiamo riportare un esempio semplicissimo in cui il problema di stabilità del flusso laminare viene risolto facilmente.

2. Un tale esempio può essere il flusso laminare stazionario di un fluido tra due cilindri coassiali in rotazione, nel caso di grandi numeri di Reynolds (cfr. § 96). Quando si hanno grandi numeri di Reynolds si può ignorare la viscosità del fluido e considerarlo perfetto. A causa dell'assenza degli sforzi tangenziali nei liquidi perfetti, la dipendenza della velocità dalla distanza dall'asse di rotazione può essere qualunque: $v = v(r)$. Ma è sufficiente una viscosità molto piccola perché si instauri rapidamente dopo l'inizio del flusso una distribuzione ben determinata delle velocità lungo il raggio, che è espressa mediante la formula (96.8).

Va osservato però che la conoscenza della forma concreta della funzione $v = v(r)$ non ha importanza per le considerazioni che seguono. In un flusso non perturbato una particella di fluido si muove lungo traiettorie circolari con una velocità angolare $\omega(r) = v(r)/r$. Consideriamo una particella di fluido in moto lungo una circonferenza di raggio r_0. Essa è sottoposta alla forza centripeta $F_0 = m\omega^2(r_0)r_0$ dovuta alla differenza di pressione creata dal fluido circostante. Introducendo il momento della quantità di moto $L(r) = mr^2\omega$, questa forza si esprime con la formula $F_0 = L^2(r_0)/mr_0^3$. Supponiamo ora che sotto l'azione d'una scossa acci-

dentale infinitamente piccola una particella del fluido considerato venga a trovarsi alla distanza r dall'asse di rotazione. Si può supporre che questa scossa sia stata diretta sia verso l'asse di rotazione che in senso inverso, in quanto se il flusso è instabile rispetto ad un tipo concreto di perturbazione, allora lo è in generale. Il momento della forza di una tale scossa rispetto all'asse di rotazione è uguale a zero. Anche la forza risultante della pressione esercitata dal fluido circostante non produce nessun momento, perché è diretta verso l'asse di rotazione. Perciò il momento cinetico della particella in movimento si conserva, cioè anche in una nuova posizione rimane uguale a $L(r_0)$. Affinché una particella del fluido scorrendo possa effettuare una rotazione uniforme su una traiettoria circolare di raggio r, essa deve essere sottoposta alla forza centripeta $F_0' = \frac{L^2(r_0)}{mr^3}$. Invece, l'unica forza che agisce su di essa è la forza di pressione del fluido circostante che è uguale a $F = \frac{L^2(r)}{mr^3}$. Se questa forza non è uguale a F_0', la particella del fluido non potrà mantenersi sulla nuova orbita circolare: essa o ritornerà sulla sua orbita del fluido o si allontanerà da essa. Nel primo caso il flusso sarà stabile e nel secondo non lo sarà. Supponiamo, ad esempio, che $r > r_0$. Se $F > F_0'$, cioè $L^2(r) > L^2(r_0)$, la pressione esercitata dal fluido circostante è superiore a quella che ci vuole per trattenere la particella del fluido su un'orbita di raggio r. La particella ritornerà sulla sua orbita iniziale, il che vuol dire che il flusso è stabile. Se invece $F < F_0'$, cioè $L^2(r) < L^2(r_0)$, la forza di pressione esercitata dal fluido circostante non è sufficiente per trattenere la particella del fluido sull'orbita di raggio r; se questa tenderà a scorrere ancora più lontano, significa che il flusso è instabile. Se $r < r_0$, ragionando analogamente, si ottiene che per $L^2(r) < L^2(r_0)$ il flusso è stabile e per $L^2(r) > L^2(r_0)$ è instabile. In ambedue i casi il criterio di stabilità può essere espresso mediante la disuguaglianza

$$\frac{dL^2}{dr} > 0, \tag{99.1}$$

ossia

$$\frac{d}{dr}(r^4\omega^2) > 0 \tag{99.2}$$

3. Quindi, per avere stabilità è necessario che la grandezza $r^4\omega^2$ cresca in maniera costante durante l'allontanarsi dall'asse di rotazione. Se i cilindri ruotano in sensi inversi, questa condizione non può essere soddisfatta. Infatti in questo caso sulle superfici dei cilindri la velocità angolare ω ha segni opposti. Poiché la velocità ω è una funzione continua di r, essa deve annullarsi in un punto intermedio. Su questo punto la grandezza $r^4\omega^2$ s'annulla, cioè raggiunge il suo minimo. A partire da questo punto la derivata $\frac{d}{dr}(r^4\omega^2)$ ha segni opposti nelle due direzioni, cioè la condizione (99.2) non può essere soddisfatta. Ciò significa che quando i cilindri ruotano in sensi

inversi, il flusso del fluido è instabile. Esso sarà instabile anche quando il cilindro interno sia in rotazione e il cilindro esterno fermo. Infatti sulla superficie del cilindro esterno $r^4\omega^2 = 0$, mentre sulla superficie di quello interno $r^4\omega^2 > 0$. Perciò con l'aumento di r, la grandezza $r^4\omega^2$ non può crescere monotonamente e il flusso è instabile. Se invece ruota il cilindro esterno, mentre quello interno sta fermo, la rotazione del fluido sarà stabile. In questo caso con l'allontanarsi dall'asse di rotazione la velocità angolare ω aumenta con l'aumentare di $r^4\omega^2$. Diventa più evidente ora perché nel procedimento di misurazione del coefficiente d'attrito interno descritto alla fine del § 96 è il cilindro esterno che deve ruotare e non quello interno. Se si facesse ruotare il cilindro interno, la rotazione del fluido compreso tra i due cilindri sarebbe instabile.

4. Nel procedimento considerato non abbiamo tenuto conto della viscosità del fluido. Le forze di viscosità diminuendo l'energia cinetica del fluido si oppongono sempre allo sviluppo delle instabilità e il dominio d'instabilità del flusso laminare si restringe. Ci possiamo limitare a questa osservazione generale sul ruolo delle forze di viscosità del fluido, poiché il nostro scopo era soltanto quello di dimostrare con un esempio elementare che il flusso laminare non è sempre stabile.

5. Quando la velocità del flusso aumenta, il regime laminare si trasforma in regime turbolento. La velocità alla quale si produce questa transizione si chiama « *velocità critica* ». Nel caratterizzare questa transizione è preferibile utilizzare come velocità una grandezza adimensionale (numero di Reynolds) poiché le considerazionei sulla similitudine, esposte nel paragrafo precedente, si riferiscono ai flussi turbolenti, nonché al passaggio dal regime laminare al regime turbolento. *Perciò in sistemi geometricamente simili il passaggio dal regime di flusso laminare al regime di flusso turbolento si produce quando i valori del numero di Reynolds siano i medesimi.* Questa legge fu stabilita da Reynolds sulla base della teoria dimensionale. Il valore limite del numero di Reynolds in presenza del quale si produce la transizione si chiama « *numero critico di Reynolds* » e si indica con $\mathbf{Re}_{cr}$. Il valore di $\mathbf{Re}_{cr}$ dipende dalla configurazione dei corpi che il fluido deve bagnare, nonché dal grado di perturbazione del flusso laminare. Così, ad esempio, per il flusso di un fluido attraverso un condotto rettilineo di sezione circolare, se il condotto è direttamente legato ad un sistema di distribuzione d'acqua e non si prende nessuna misura per diminuire la perturbazione all'entrata del condotto, $\mathbf{Re}_{cr} = \bar{v}a/\nu \approx 1100$, (dove a è il raggio del condotto e $\bar{v}$ la velocità media del flusso). La perturbazione iniziale può essere ridotta utilizzando dei condotti con pareti lisce e bordi arrotondati. Inoltre è consigliabile attaccare i condotti ad un serbatoio d'acqua ed attendere finché l'acqua non si calmi. Si arriva così a prolungare notevolmente il regime laminare nei condotti rispetto a $\mathbf{Re}_{cr}$, ad esempio, fino a $\mathbf{Re}_{cr} \approx 25.000$.

6. Le leggi di Poiseuille, come si è già detto, si riferiscono soltanto ai flussi laminari del fluido nei condotti. L'ipotesi della laminarietà è stata

esplicitamente utilizzata per dedurre le formule (97.4) e (97.16), mentre non è così evidente dove utilizzare quest'ipotesi per dedurre la formula di Poiseuille (97.11) per mezzo della teoria dimensionale. Esaminiamo questo problema e chiariremo anche con quale formula deve essere sostituita la formula di Poiseuille per descrivere un flusso turbolento. Poiché nei casi di flusso turbolento le particelle di fluido si muovono con *accelerazione la densità* ρ *del fluido* deve esercitare un ruolo importante. Non è obbligatorio che la densità ρ figuri nelle combinazioni Q/ρ, come era nel caso del flusso laminare; anzi le grandezze Q e ρ possono figurare indipendentemente. Un legame funzionale deve esistere tra le seguenti cinque grandezze:

$$Q,\ \rho,\ \frac{P_1 - P_2}{l},\ S,\ \eta,$$

e non tra quattro soltanto come è stato nel caso del flusso laminare. Con queste cinque grandezze si possono costituire due combinazioni indipendenti adimensionali, ad esempio,

$$\frac{Q}{\rho} \cdot \frac{l}{P_1 - P_2} \cdot \frac{\eta}{S^2} \quad \text{e} \quad \mathbf{Re} \equiv \frac{\bar{v}a}{\nu},$$

dove $\bar{v}$ è la velocità media del flusso definita dalla relazione $Q = \rho\bar{v}S$, a è il raggio del condotto, $\nu = \eta/\rho$ la viscosità cinematica. Secondo la regola delle dimensioni una di queste combinazioni adimensionali è funzione dell'altra. Questo porta alla relazione

$$Q = C(\mathbf{Re})\frac{P_1 - P_2}{l\eta}\rho S^2. \tag{99.3}$$

In caso di flusso laminare il coefficiente C è una costante il cui valore dipende soltanto dalla forma della sezione trasversale del condotto. In caso di flusso turbolento questo coefficiente diventa una funzione del numero di Reynolds. Non è difficile trasformare la formula (99.3) nella seguente:

$$\frac{P_1 - P_2}{l} = \frac{\lambda(\mathbf{Re})}{a}\frac{\rho\bar{v}^2}{2}, \tag{99.4}$$

che è la forma utilizzata di solito in idraulica. Il coefficiente λ è legato al coefficiente C dalla relazione

$$\lambda(\mathbf{Re}) = \frac{2}{\pi C(\mathbf{Re})\mathbf{Re}}.$$

Il coefficiente λ si chiama *coefficiente di resistenza del condotto*. In caso di flusso laminare questo coefficiente è inversamente proporzionale al numero di Reynolds. In caso di flusso turbolento la forma della funzione $\lambda(\mathbf{Re})$ viene stabilita empiricamente.

È opportuno fare alcune osservazioni a proposito del procedimento di deduzione della formule (99.3) e (99.4). Il flusso turbolento non è staziona-

rio nel senso che ad un flusso regolare si sovrappongono delle oscillazioni e delle rotazioni irregolari dette *pulsazioni* che vengono caratterizzate da periodi di tempo determinati. Dunque, si tratta di un flusso non stazionario con *un tempo determinato* o piuttosto dei *tempi determinati caratteristici.* Ci si potrebbe quindi aspettare che nelle formule (99.3) e (99.4) i coefficienti C e λ dipendano non soltanto dal numero di Reynolds ma anche dal numero di Strouhal. Ma in regime turbolento lo stesso numero di Strouhal è funzione del numero di Reynolds e perciò inutile introdurlo nelle formule (99.3) e (99.4).

Problema

Poiché in un fluido perfetto, qualunque sia il suo flusso, non possono comparire forze tangenziali, è possibile che si creino *flussi discontinui* in cui le componenti tangenziali della velocità del flusso diventano discontinue su una certa superficie (fissa o mobile). Tali flussi si dicono *discontinuità tangenziali*. Si dimostri che in un fluido incomprimibile questi flussi sono idrodinamicamente instabili.

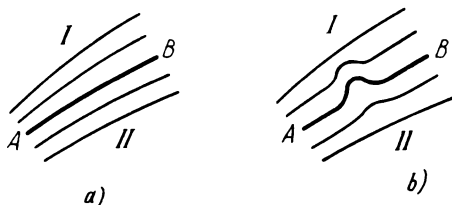



Fig. 263.

Soluzione. È evidente che la pressione su una superficie di discontinuità deve essere la stessa da entrambi i lati. In regime di flusso stazionario la superficie di discontinuità tangenziale è fissa e contiene quindi le linee di corrente. Sia AB una di queste linee di corrente (fig. 263, *a*). Supponiamo che in seguito ad una perturbazione infinitamente piccola sulla linea AB sia comparsa una gobba (fig. 263, *b*). Allora dal lato *I* l'intervallo tra le linee di corrente diminuisce e la velocità del fluido aumenta, mentre dal lato *II* la distanza tra le linee di corrente aumenta e la velocità del fluido diminuisce. Secondo la legge di Bernoulli la pressione deve aumentare dal lato *II* e diminuire dal lato *I*. Sotto l'azione di questa differenza di pressione la gobba sulla linea di corrente deve aumentare ancor più, cioè il flusso risulta idrodinamicamente instabile. Con tale tipo di instabilità si spiega lo sventolio delle bandiere al vento.

§ 100. *Paradosso di D'Alembert. Flusso discontinuo*

1. Gli ultimi paragrafi di questo capitolo saranno dedicati alle azioni di forza del flusso di un fluido applicate sui corpi che ci sono immersi. In virtù della relatività del moto, questo problema equivale a quello del calcolo delle forze che agiscono sui corpi in moto in un fluido immobile. È un problema vasto e complesso, che viene trattato con la dovuta ampiezza nei corsi di idro- ed aerodinamica. In un corso di fisica generale ci si può soffermare su questo problema brevemente, limitandosi allo studio qualitativo.

La forza esercitata su un corpo dal flusso del fluido può essere scomposta in due componenti, l'una F_x orientata nel senso del flusso e l'altra F_y che forma con la prima un angolo retto. La forza F_x si chiama *resistenza frontale* e la forza F_y si chiama *forza di portanza.* La forza di portanza che si esercita sulle ali di un aereo in volo si rappresenta come una forza orientata verso l'alto; ma la forza di portanza può essere diretta anche verso il basso, a seconda dell'orientamento dell'aereo rispetto alla sua direzione di volo. La forza di resistenza frontale F_x è composta da due forze differenti: la forza dovuta alla differenza di pressione che agisce sulla superficie anteriore e sulla superficie posteriore del corpo, e le forze d'attrito viscoso. In caso di velocità grande (o più esattamente in presenza di numeri di Reynolds grandi) il ruolo principale spetta alla differenza di pressione mentre in caso di numeri di Reynolds piccoli, questo ruolo spetta alle forze di viscosità.

2. Consideriamo dapprima il flusso stazionario di un fluido perfetto incomprimibile. Supponiamo che in assenza di corpi esterni il flusso del fluido sia composto da linee di corrente parellele. Immergendo un corpo K nel fluido (fig.264) quest'ultimo si deforma, ma a grande distanza dal corpo K (all'« infinito ») le linee di corrente resteranno parallele. Passato un certo periodo di tempo il flusso si stabilizza. Ed è a questo flusso stabilizzato che si riferiscono le ulteriori considerazioni. Supponiamo che il fluido scorra lungo un condotto rettilineo. A grande distanze dal corpo K le linee di corrente sono parallele alle pareti del condotto e, data l'incomprimibilità del fluido, la sua velocità in questi settori del condotto è sempre la stessa. Secondo l'equazione di Bernoulli anche la pressione P sarà dappertutto uguale. Consideriamo la parte $ABDC$ del fluido in cui si trova il corpo K. Si suppone che le sezioni AB e CD siano tanto lantane dal corpo K che il fluido scorra attraverso di esse con linee di corrente parallele. Poi la parte di fluido che abbiamo delimitato passa nella posizione $A'B'D'C'$ senza che il suo impulso sia cambiato. Infatti in posizione iniziale l'impulso del fluido è uguale alla somma

$$I_1 = \text{impulso del fluido contenuto nel volume } A'B'DC + \\ + \text{impulso del fluido contenuto nel volume } ABB'A',$$

e in posizione finale essa è

$$I_2 = \text{impulso del fluido nel volume } A'B'DC + \\ + \text{impulso del fluido nel volume } CDD'C.$$

Ma in virtù della stazionarietà del flusso, l'impulso del fluido nel volume $A'B'DC$ è lo stesso in ambedue i casi. E poiché la velocità del flusso all'infinito è identica, anche gli impulsi del fluido dei volumi $ABB'A'$ e $CDD'C'$ sono uguali. Quindi l'impulso del fluido non cambia quando esso scorre attorno al corpo K, e la forza totale che agisce sul volume del fluido considerato nel senso del flusso è uguale a zero. Ma questa forza è composta dalle forze di pressione applicate alle basi AB e CD e dalla forza F_x' *con la quale il corpo K* agisce sul fluido. (Si può ignorare la pressione delle pa-

reti poiché la sua componente lungo il flusso è uguale a zero). Le forze di pressione che si esercitano sulle basi AB e CD si compensano mutuamente e perciò $F'_x = 0$. Quindi si annulla anche la resistenza frontale.

Supponiamo ora che si utilizzino dei condotti di diamentro sempre più grande. La nostra conclusione rimane valida quale che sia il diamentro del condotto e anche nel caso limite in cui il condotto non ci sia e il flusso si espanda all'infinito in tutte le direzioni. Dunque, in caso di flusso stazionario di un fluido perfetto incomprimibile o in caso di moto uniforme di un corpo in questo fluido, la forza di resistenza frontale è uguale a zero. Questo risultato apparve a suo tempo stupefacente, e assunse il nome di *paradosso di D'Alembert* (1717-1783). L'esistenza del paradosso indica che nelle determinazioni della resistenza frontale alla quale è sottoposto un corpo in moto uniforme in un fluido, quest'ultimo non può essere condiserato perfetto.

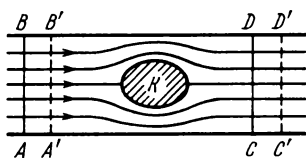



Fig. 264.

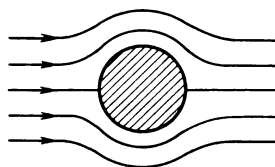



Fig. 265.

3. La nostra conclusione si riferisce alla resistenza frontale F_x e non alla forza di portanza F_y e al momento delle forze M che esercita il fluido sul corpo. Il momento M rispetto al centro di massa è uguale a zero nei casi in cui il corpo è simmetrico e disposto simmetricamente rispetto al flusso. Quando non è così, il momento M non è uguale a zero e il flusso che scorre attorno al corpo scorre nella direzione normale alla direzione del flusso non perturbato. Di conseguenza il momento cinetico del fluido varia e fa apparire il momento M applicato al corpo. Come risultato il momento M fa ruotare il corpo finché non si annulli e il flusso del fluido in prossimità del corpo K ritorna stazionario. Quanto al problema della forza di portanza F_y, esso sarà esaminato nel § 103.

4. Il paradosso di D'Alembert non ha luogo se il moto del corpo immerso non è uniforme. Il fatto è che quando un corpo si muove in un fluido, esso porta sempre con sé una massa di fluido che prende il nome di massa aggiunta. Quando il corpo acquista velocità anche *la massa aggiunta* del fluido subisce un'accelerazione. Perciò per comunicare al corpo un'accelerazione data gli si deve applicare una forza più grande che in assenza di fluido. Ciò significa che il fluido oppone una resistenza ai corpi in moto accelerato.

5. È facile comprendere il paradosso di D'Alembert se si considera il quadro delle linee di corrente. La figura 265 è una rappresentazione schematica delle linee di corrente del flusso stazionario di un fluido perfetto che

scorre attorno a un cilindro o a una sfera. Le linee di corrente sono *perfettamente simmetriche* in avanti e indietro (*simmetria a specchio*). Le velocità di particelle del fluido in punti omologhi davanti e dietro il corpo sono uguali in valore ma di senso opposto. Dato che nell'equazione di Bernoulli (94.4) la velocità v figura solo al quadrato, la distribuzione delle pressioni davanti e dietro il corpo è *assolutamente identica*. La pressione esercitata sulla superficie anteriore del corpo viene equilibrata dalla pressione sulla faccia posteriore e, di conseguenza, la forza di resistenza frontale è uguale a zero.

Se il corpo non è simmetrico e, di conseguenza, non lo è neanche il flusso, il ragionamento si complica. Anche in questo caso, però, poiché non ci sono perdite d'energia, il flusso stazionario di un fluido perfetto possiede le proprietà seguenti. Se in un istante dato si inverte la direzione del moto di tutte le particelle del fluido, esse si sposteranno lungo le stesse linee di corrente a velocità uguale ma di senso opposto. Poiché nell'equazione di Bernoulli la velocità del flusso figura al quadrato, una tale inversione di direzione del flusso non modificherà la distribuzione delle pressioni nel fluido. Non varieranno nemmeno il modulo e la direzione della forza F con cui il fluido agisce sul corpo. In particolare, non varierà la forza di resistenza frontale F_x. D'altra parte l'esperimento dimostra che la forza F_x è diretta sempre nel senso del flusso[1)], e perciò invertendo il senso del flusso, si deve invertire anche il senso della forza F_x. Ne segue direttamente che $F_x = 0$. Queste considerazioni non sono applicabili alla forza di portanza perché non ci sono ragioni per affermare che invertendo il senso del flusso anche la forza ascensionale deve cambiare la direzione.

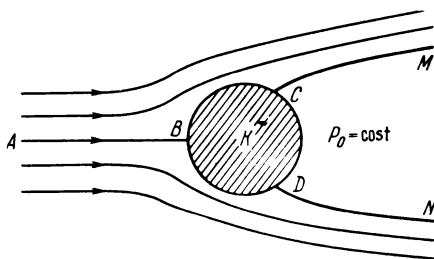



Fig. 266.

6. In tutti questi casi, si supponeva che il flusso fosse *continuo*. Però le equazioni dell'idrodinamica ammettono l'esistenza di un fluido stazionario la cui velocità è discontinua. Il primo ad attirare l'attenzione su questa possibilità è stato Kirchhoff (1824-1887). Immaginiamo che al copro K sia fissato un tramezzo elastico indefinitamente sottile $MCDN$ (fig.266). Supponiamo che lo spazio $MCDN$ sia limitato da questo tramezzo, riempito di

---

[1)] La teoria non implica necessariamente questo risultato (si veda la nota alla pagina 473). La forza F_x potrebbe essere orientata anche in senso contrario alla corrente. Questa possibilità ha però un interesse puramente astratto.

un fluido immobile sotto una pressione costante P_0. Supponiamo che questo sistema sia bagnato da un fluido perfetto incomprimibile. Allora in caso di flusso stazionario la frontiera *MCDN* si cpmporterà come superficie di un corpo solido e una parte delle linee di corrente si disporrà lungo questa superficie. La larghezza dei tubetti di corrente infinitamente sottili in prossimità della superficie *MCDN* varierà secondo una legge in modo da assicurare una stabilità alla velocità del fluido lungo tutta la superficie *MCDN*. Allora secondo l'equazione di Bernoulli sarà costante anche la pressione del fluido su questa superficie. Se si elimina ora il tramezzo elastico, *MCDN*, il carattere del flusso del fluido non varierà. In effetti, la superficie *MCDN* resterà una superficie di pressione normale costante e le forze tangenziali non potranno manifestarsi, perché il fluido è perfetto. Quidni, si è ottenuto un flusso stazionario del fluido che comporta una discontinuità tangenziale sulla superficie *MCDN* (si veda il problema nel § 98). Questo flusso è caratterizzato dal *distacco* lungo una linea del *flusso* rispetto *al corpo*. È evidente che ci si potrebbe immaginare un numero infinito di flussi di questo tipo, che si distinguono gli uni dagli altri per la posizione *della linea di distacco CD* e la forma della superficie di discontinuità tangenziale *MCDN*. *Nella zona di ristagno* (cioè nella zona in cui il fluido è a riposo) la pressione P_0 è evidentemente uguale alla pressione che viene esercitata sulla linea di distacco *CD*. Questa pressione è più piccola della pressione esercitata nel punto d'arresto *B*. Ne segue che la risultante delle forze di pressione che agiscono sulla superficie anteriore del corpo è più grande di quella corrispondente che si esercita sulla superficie posteriore del corpo. Come risultato compare una forza di resistenza frontale F_x [1].

7. Le discontinuità tangenziali sono idrodinamicamente instabili (si veda il problema nel § 98) e le superfici di discontinuità si disgregano in *vortici*. Ciò nondimeno i flussi discontinui perfetti che sono accompagnati da un distacco del corpo immerso non sono privi di interesse. In certo senso si può considerarli caso limite dei flussi reali di un fluido viscoso. Lontano dal corpo immerso, le forze di viscosità essendo deboli sono poco importanti. In generale esse si manifestano in uno *strato limite* sottile adiacente ai corpi immersi dove la loro influenza è notevole. Esse determinano il distacco del flusso dal corpo immerso e al posto di una zona di ristagno appare una zona di forte turbolenza dietro al corpo. La presenza di tale zona di turbolenza provoca la comparsa della resistenza frontale. Le forze di viscosità eliminano automaticamente la non univocità nella posizione della linea di distacco che è caratteristica dei flussi discontinui di fluidi perfetti. Più la zona di distacco è stretta, più la forza di resistenza frontale è piccola. Per ridurre la forza di resistenza frontale degli aerei, delle navi, delle automobili si cerca di imprimere ai veicoli semoventi un « profilo aerodinamico ».

---

[1] Se si inverte il senso di flusso, il modulo e la direzione della forza F_x non varieranno. In un flusso invertito, la forza F_x è diretta contro il flusso, cioè la forza di « resistenza frontale » è negativa. Questo caso è stato accennato nell'osservazione a piè della pagina 472 come teoricamente possibile.

§ 101. *Applicazione della teoria delle dimensioni*

1. Tralasciamo per momento i meccanismi per cui compare la forza F con la quale il flusso stazionario di un fluido incomprimibile agisce su un corpo immobile e applichiamo a questo problema la teoria delle dimensioni. La forza F dipende dalla forma e dalle dimensioni del corpo, dal suo orientamento rispetto al flusso, dalla velocità v (all'« infinito ») e dalle proprietà del fluido. Il profilo dell'ala di un aereo è generalmente caratterizzato dall'*angolo d'attacco,* cioè l'angolo tra il piano dell'ala e la direzione del volo. Non abbiamo bisogno di introdurre esplicitamente i parametri caratteristici di un'ala perché consideriamo dei corpi che si presentano non soltanto come geometricamente simili ma anche simili di posizione. Le proprietà del fluido vengono caratterizzate dalla sua densità ρ e dal suo coefficiente di viscosità η. Quindi deve esistere una relazione funzionale tra le grandezze F, v, ρ, η, S, dove S è l'area caratteristica della sezione trasversale del corpo. La sua radice quadrata $l = \sqrt{S}$ è la dimensione lineare caratteristica del corpo. Con queste cinque grandezze si possono formare due combinazioni adimensioneli indipendenti. Come tali si possono assumere il numero $\frac{F}{\rho v^2 S}$ e il numero di Reynolds $\mathbf{Re} = \frac{\rho l v}{\eta}$. Secondo la regola delle dimensioni una di queste combinazioni è funzione dell'altra. Come risultato avremo.

$$F = \frac{\rho v^2}{2} SC(\mathbf{Re}), \tag{101.1}$$

ossia

$$F_x = \frac{\rho v^2}{2} SC_x(\mathbf{Re}), \tag{101.2}$$

$$F_y = \frac{\rho v^2}{2} SC_y(\mathbf{Re}). \tag{101.3}$$

I coefficienti adimensionali $C_x(\mathbf{Re})$ e $C_y(\mathbf{Re})$ si chiamano rispettivamente coefficienti di *resistenza* e coefficiente *della forza ascensionale.* I due coefficienti dipendono dal numero di Reynolds, dal profilo del corpo e dal suo orientamento rispetto al flusso. Poiché il loro calcolo teorico è arduo, essi vengono determinati di solito con procedimenti pratici.

2. Nel caso di grandi numeri di Reynolds la forza di resistenza forntale F_x è pressoché esclusivamente determinata dalla differenza di pressione. Se i bordi posteriori del corpo immerso sono affilati, il distacco del flusso dietro il corpo si produce sempre nello stesso luogo quale che sia la velocità del flusso. (Da esempio può servire una piastra messa perpendicolarmente alla direzione del flusso. Il distacco si produce ai bordi della piastra). In questi casi il coefficiente di resistenza frontale è pressoché costante e la forza di resistenza frontale è proporzionale al quadrato della velocità v. Per una migliore comprensione si può utilizzare un modello perfezionato di un flusso

discontinuo (cfr. fig. 265). Infatti, se ad ogni velocità il distacco avviene ad uno stesso posto, l'area caratteristica S della sezione trasversale è indipendente dalla velocità. D'altra parte, secondo la legge di Bernoulli, la differenza di pressione davanti e dietro il corpo è uguale a $1/2\rho v^2$. Ne deriva la formula (101.2) in cui il coefficiente C_x è costante. In caso di velocità vicine o superiori alla velocità del suono i valori dei coefficienti C_x e C_y dipendono non soltanto dal numero di Reynolds, ma anche dal numero di Mach $\mathbf{M}$.

3. Consideriamo ora il caso di piccoli numeri di Reynolds. In questo caso è la forza di resistenza frontale F_x che presenta interesse maggiore. Non hanno importanza né l'inerzia né la densità del fluido; la forza F_x è determinata quasi esclusivamente dalla viscosità del fluido. Perciò la densità ρ viene eliminata dalla formula (101.2). Questo avviene solo quando il coefficiente di resistenza frontale è inversamente proporzionale al numero di Reynolds, cioè

$$C_x = \frac{A}{\mathbf{Re}},$$

dove A è la costante adimensionale. Sostituendovi l'espressione per $\mathbf{Re}$, si ottiene

$$F_x = A\eta l v. \tag{101.4}$$

Questa formula è valida per i piccoli numeri di Reynolds ($\mathbf{Re} \ll 1$), poiché essa corrisponde al caso in cui l'influenza del fluido è trascurabilmente piccola in confronto all'influenza della viscosità. Il valore del coefficiente A dipende dal profilo del corpo e dal suo orientamento rispetto al flusso. Il suo calcolo è assai arduo e richiede l'integrazione delle equazioni del flusso di un fluido viscoso. Il caso più semplice è quello della sfera. Stokes (1819-1903) ha dimostrato che in questo caso $A = 6\pi$ se per dimensione caratteristica l si prende il raggio a della sfera. Si ottiene così la *formula di Stokes*

$$F_x = 6\pi\eta a v \tag{101.5}$$

Dato che la formula (101.5) tròva numerose applicazioni in fisica sperimentale (la determinazione della carica dell'elettrone dal metodo di Millikan, il moto browniano, ecc.) è utile chiarire più dettagliatamente i suoi limiti di applicabilità con esempi concreti.

Negli esperimenti sulla misura della carica dell'elettrone, Millikan (1868-1953) applicava la formula di Stokes (101.5) a gocce d'olio in caduta libera nell'aria sotto l'azione della gravità. Se m è la massa di una goccia, durante la caduta stabilizzata uniforme il suo peso mg deve essere compensato dalla forza di viscosità $6\pi\eta a v$ e perciò $mg = 6\pi\eta a v$ (ignoriamo la forza di portanza d'Archimede). Se la densità dell'olio è ρ_0, la massa della goccia è $m = \frac{4\pi}{3} a^3\rho_0$. Sostituendo questo valore si ottiene prima la velocità di ca-

duta della goccia v, poi il numero di Reynolds

$$\mathbf{Re} = \frac{\rho a v}{\eta} = \frac{2}{9} \frac{a^3 \rho \rho_0 g}{\eta^2},$$

dove ρ è la sensità dell'aria. La condizione d'applicazione della formula di Stokes $\mathbf{Re} \ll 1$ conduce a

$$a^3 \ll \frac{9}{2} \frac{\eta^2}{\rho \rho_0 g}.$$

Sostituendo $\eta = 1{,}8 \cdot 10^{-4}$ g/(s·cm), $\rho = 1{,}29 \cdot 10^{-3}$ g/cm^3, $\rho_0 =$ $= 0{,}9$ g/cm^3, si ottiene che per poter applicare la formula di Stokes deve verificarsi la condizione $a \ll 0{,}05$ mm. La formula si applica anche a goccioline fine di nebbia, mentre la sua applicazione a gocce d'acqua, anche a più piccole, non è assolutamente possibile.

Un altro esempio è quello di gocce di mercurio in caduta libera sotto l'azione della gravità in un liquido. Misurando la velocità di caduta delle gocce, si può calcolare la viscosità del liquido, il che costituisce un metodo di misurazione della viscosità. Nel caso in esame si deve tener conto della forza d'Archimede. Se ρ_0 è la densità del mercurio, ρ e η sono rispettivamente la densità e la viscosità del liquido considerato, per l'applicabilità della formula di Stokes è necessario che sia verificata la condizione

$$a^3 \ll \frac{9}{2} \frac{\eta^2}{(\rho_0 - \rho)\rho g}.$$

Per l'acqua $\eta = 0{,}010$ g/(s·cm), e quidni $a \ll 0{,}15$ mm.

§ 102. *Flussi turbolenti e potenziali*

1. Tutti i flussi di fluidi si suddividono in flussi *potenziali* e *turbolenti*. Consideriamo il campo delle velocità $v(r)$ di un fluido in un istante dato. Tracciamo nel fluido un contorno chiuso C e fissiamo un senso positivo di circolazione lungo questo contorno (fig.267). Siano τ il vettore unitario della tangente e ds un segmento di lunghezza del contorno orientati in senso positivo. L'integrale

$$\Gamma = \oint_C v_\tau \, ds = \oint_C (v \, ds) \qquad (102.1)$$

si chiama *circolazione del vettore della velocità* lungo il contorno C. Se la circolazione della velocità su ogni contorno chiuso si annulla si dice che il flusso del fluido è potenziale. In caso contrario il flusso si chiama *turbolento*.

Si suppone inoltre che la zona dello spazio in cui scorre il fluido sia *a connessione semplice* il che significa che qualsiasi contorno di questa zona

può essere ridotto da deformazione continua ad un punto senza intersecare corpi immersi. Se invece la zona non è a connessione semplice (un fluido che bagna un corpo in forma di toro, ad esempio) alle definizioni riportate devono essere aggiunte le osservazione seguenti. In qualità di C si deve scegliere non un contorno qualsiasi ma soltanto quelli chiusi arbitrari che possono essere ridotti ad un punto dalla loro deformazione continua senza uscire dai limiti del fluido. Un caso importante può essere quello del cosiddetto *flusso piano* che è una ipotizzazione dei flussi reali. Supponiamo che

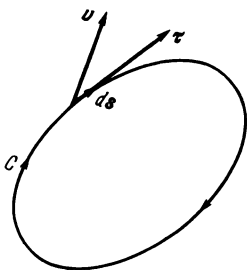



Fig. 267.

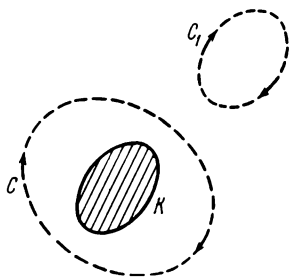



Fig. 268.

il corpo immerso sia un cilindro infinitamente lungo di sezione trasversale arbitraria e che il fluido scorra perpendicolarmente all'asse di questo cilindro. Allora è sufficiente limitarsi all'esame del flusso in uno dei piani perpendicolari allo stesso asse, ed è questo flusso che si chiama piano. Esso sarà potenziale se la circolazione della velocità si annulla lungo ogni contorno chiuso che *non abbraccia il cilindro immerso,* ad esempio, lungo il contorno C_1 (fig.268). Ma la circolazione lungo il contorno C che circonda il cilindro può non annullarsi. Si dimostra facilmente che in caso di flusso potenziale la circolazione Γ sarà uguale per tutti i contorni chiusi che girano intorno al cilindro una volta sola. Se $\Gamma \neq 0$, si dice che il *flusso è potenziale con circolazione.*

2. La definizione di flusso potenziale è assolutamente analoga a quella delle forze conservative (cfr.§25). Perciò in caso di un flusso potenziale l'integrale lineare $\int_{AB} (\mathbf{v}d\mathbf{s})$ preso lungo una curva non chiusa che congiunge i punti A e B dipende soltanto dalla posizione dei punti esterni di questa curva A e B e non dipende dalla forma della curva stessa AB. Ragionando come nel caso dell'energia potenziale, si può arrivare alla conclusione che si può introdurre una funzione delle coordinate φ attraverso la quale la velocità $\mathbf{v}$ è espressa dalla formula

$$\mathbf{v} = \operatorname{grad} \varphi \qquad (102.2)$$

(cfr.§ 29). La funzione φ si chiama *potenziale delle velocità.*

Come esempio di flusso potenziale può servire il flusso di un fluido lungo rette parallele con una velocità costante. Si può dimostrare che *ogni flusso di un fluido perfetto che risulta dall'applicazione di forze conservative al fluido inizialmente a riposo è un flusso potenziale.*

3. Come esempio di flusso turbolento può sevire il flusso piano di un fluido le cui particelle sono in rotazione su cerchi concentrici con la medesima velocità angolare ω (fig. 269). La circolazione della velocità su un cerchio di raggio r è in questo caso uguale a $\Gamma = 2\pi rv = 2\pi r^2\omega$. Il suo rapporto con l'area del contorno πr^2 sarà $\frac{\Gamma}{\pi r^2} = 2\omega$, cioè non dipende dal raggio r. Se la velocità angolare di rotazione dipende dal raggio r, al posto del rapporto $\Gamma/(\pi r^2)$ si prende il limite di questo rapporto per $r \to 0$. È chiaro che

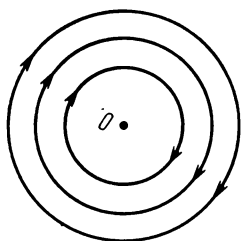



Fig. 269.

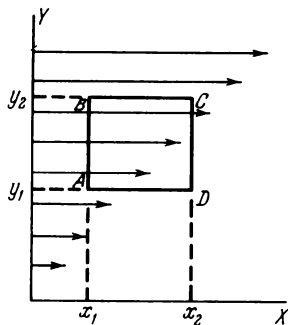



Fig. 270.

questo limite è uguale al doppio valore della velocità angolare con la quale ruotano le particelle del fluido in prossimità immediata dell'asse O. Questo limite si chiama *vortice* o *rotore* della velocità v, o più esattamente, proiezione del rotore su una direzione perpendicolare al piano del contorno. In generale, per un moto arbitrario del fluido il rotore della velocità v è definito dalle sue proiezioni su una direzione arbitraria nel modo seguente. Si prende un contorno arbitrario di area infinitamente piccola ΔS. Sia $\boldsymbol{n}$ la sua normale esterna. La proiezione del vettore rot v sulla direzione della normale $\boldsymbol{n}$ è determinata dalla relazione

$$\mathrm{rot}_n\, v = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Gamma}{\Delta S}, \tag{102.3}$$

dove Γ è la circolazione del vettore v lungo il contorno considerato.

4. Come secondo esempio consideriamo un flusso piano del fluido parallelo all'asse X, quando la velocità del flusso varia lungo una direzione trasversale secondo la legge lineare $v_x = ay$ (fig.270). Per convincersi del carattere turbolento del flusso, consideriamo il contorno rettangolare $ABCD$ i cui lati sono paralleli agli assi coordinati. La circolazione della ve-

locità lungo questo contorno sarà

$$\Gamma = (x_2 - x_1)(v_1 - v_2) = -a(x_2 - x_1)(y_2 - y_1).$$

Il rapporto di Γ all'area del contorno $\Delta S = (x_2 - x_1)(y_2 - y_1)$, o, il chè è lo stesso il rotore della velocità v è

$$\mathrm{rot}_z\, v = -a,$$

ossia

$$\mathrm{rot}_z\, v = -\frac{\partial v_x}{\partial y}. \qquad (102.4)$$

Se v_x varia con y non secondo la legge lineare ma arbitrariamente, la formula (102.4) resta valida, però $\mathrm{rot}_z v$ diventa funzione della coordinata y.

Osserviamo ancora che nel caso considerato la velocità v può essere rappresentata sotto forma di una somma vettoriale di due vettori v_1 e v_2 le cui componenti sono

$$v_{1x} = \frac{v_x}{2} = \frac{a}{2}y, \quad v_{2x} = \frac{v_x}{2} = \frac{a}{2}y,$$

$$v_{1y} = -\frac{a}{2}x, \quad v_{2y} = \frac{a}{2}x.$$

Il vettore v_1 è rappresentato dal prodotto vettoriale

$$v_1 = -\frac{a}{2}[kr] = \frac{a}{2}yi - \frac{a}{2}xj.$$

Perciò il flusso alla velocità v_1 può esser trattato come una rotazione intorno all'asse Z con una velocità angolare $\omega = -\frac{a}{2}k$. Le componenti del vettore v_2 si deducono dal potenziale delle velocità $\varphi = \frac{a}{2}xy$ secondo le formule

$$v_{2x} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad v_{2y} = \frac{\partial\varphi}{\partial y}.$$

Il che significa che il flusso di velocità v_2 è un flusso potenziale. Si può dimostrare come caso generale che il flusso arbitrario di un fluido può essere scomposto in *un flusso di rotazione* e in *un flusso potenziale,* mentre la velocità angolare di rotazione e la sua direzione nello spazio possono variare continuamente da un punto all'altro.

La discontinuità tangenziale può essere considerata come esempio di flusso turbolento. Del carattere turbolento del flusso in quest'ultimo caso ci si può convincere ragionando come nell'esempio precedente. Scomponendosi la discontinuità tangenziale porta alla comparsa di un flusso turbolento a vortici.

§ 103. *Strato limite ed effetto di scollamento*

1. In caso di grandi numeri di Reynolds le forze di viscosità non hanno un ruolo determinante a grande distanza dal corpo intorno al quale si effettua il flusso. Esse sono piccole in confronto alle forze dovute alle differenze di pressioni e trascurandole, si può considerare il fluido come un fluido perfetto. Le cose stanno diversamente però in prossimità della superficie del corpo immerso nel fluido. Le forze d'attrito viscoso provocano l'*adesione del fluido* alla superficie del corpo contornato, cioè mantengono le particelle del fluido in stato di riposo, malgrado l'esistenza di un gradiente di pressione diretto nel senso del flusso. Ne segue che in prossimità della superficie del corpo immerso le forze d'attrito viscoso sono dello *stesso ordine* delle forze provocate dalla differenza di pressione. Perché sia così, la velocità del fluido deve aumentare rapidamente durante l'allontanamento dalla superficie del corpo. Questo aumento rapido della velocità avviene in un strato sottile vicino alla superficie del fluido, detto *strato limite*. La teoria dello strato limite fu elaborata essenzialmente da L. Prandtl. Diamo l'idea qualitativa di alcune delle sue conclusioni di questa teoria.

2. Lo spessore δ dello strato limite è una nozione definita in modo insufficientemente preciso poiché la frontiera esterna dello strato limite è fluida e non sufficientemente delineata. Lo spessore dello strato limite dipende non soltanto dalle proprietà del fluido, ma anche dalla forma della superficie del corpo immerso nel fluido. Essa non rimane costante lungo il corpo, ma aumenta nel senso del flusso dalla parte anteriore del corpo verso quella posteriore. Non si può quindi definire in modo esatto lo spessore dello strato limite; si può darne soltanto un giudizio generico. È facile descrivere lo spessore dello strato limite osservando che all'interno dello strato limite le forze di viscosità e le forze determinate dalle differenze di pressione sono dello stesso ordine di grandezza. Descriviamo dapprima la forza d'attrito viscoso f_{att} che agisce sull'unità di volume del fluido nello strato limite. Il grandiente della velocità del fluido all'interno dello strato limite lungo la direzione trasversale a quello del flusso è dell'ordine di v/δ. La forza di viscosità che agisce su un'area S dello strato limite è dell'ordine di $\sim \eta S v/\delta$ e la forza che agisce sull'unità di volume sarà

$$f_{att} \sim \frac{\eta S v/\delta}{S\delta} = \eta \frac{v}{\delta^2} .$$

Descriviamo ora la forza determinata dalla differenza di pressioni f_{press} che è anche rapportata all'unità di volume del fluido. Essa è uguale a $f_{press} = -\operatorname{grad} P$ (cfr. § 90). Le variazioni di pressione in direzione trasversale allo strato limite sono piccole e, in generale, non svolgono alcun ruolo; a noi interessa soltanto il gradiente di pressione *lungo la direzione del flusso*. Si può descriverlo considerando il flusso esterno del liquido, cioè il flus-

so fuori dello strato limite. A questo flusso è applicabile l'equazione di Bernoulli $P = P_0 - 1/2\rho v^2$ da cui si ottiene che grad $P = -(\rho/2)$grad v^2, il che significa che la forza $f_{press} \sim \rho v^2/l$, dove l è la dimensione lineare caratteristica del corpo immerso. Uguagliando le due forze f_{att} e f_{press} dopo trasformazioni aritmetiche elementari si ottiene:

$$\delta \sim \sqrt{\frac{\eta l}{\rho v}}, \tag{103.1}$$

ossia

$$\delta \sim \frac{l}{\sqrt{\mathbf{Re}}}. \tag{103.2}$$

Per una sfera, ad esempio, di diametro $D = 10$ cm che si sposta in una corrente d'aria con velocità $v = 30$ m/s, il numero di Reynolds è uguale a $\mathbf{Re} = vD/\nu = 2 \cdot 10^5$ (la viscosità cinematica dell'aria a 20°C $\nu = 0{,}15$ cm²/s) e lo spessore dello strato limite è uguale a $\delta \approx D/\sqrt{\mathbf{Re}} \approx 0{,}2$ mm.

3. In caso di valori piccoli del numero di Reynolds di ordine dell'unità e meno, non si può più ricorrere ai ragionamenti che ci sono serviti per derivare la formula (103.2). Ciò nondimeno anche in questi casi l'uso della formula (103.2) porta ad una conclusione qualitativamente corretta secondo la quale lo spessore dello strato limite diventa dell'ordine delle dimensioni del corpo immerso nel fluido. In questi casi non c'è nessuna ragione di utilizzare la nozione di strato limite. Questa nozione è anche inapplicabile al flusso stazionario laminare in un tubo, perché le forze di viscosità in questo caso sono equilibrate dai gradienti di pressione non soltanto in prossimità delle pareti del tubo, ma anche *in tutto il volume del fluido*. Infatti, secondo le formule (97.2) e (97.3) la velocità del fluido che scorre attraverso un tubo di sezione circolare è

$$v = v_0\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right).$$

Il profilo della velocità non essendo funzione della viscosità del fluido non dipende assolutamente dalla viscosità del fluido e, quindi, dal numero di Reynolds. Se si ricorre in questo caso alla nozione di strato limite, si dovrebbe dire che lo strato limite riempie tutto il tubo, qualsiasi siano i valori del numero di Reynolds. Ma in tali condizioni la nozione di strato limite non ha più senso. Perciò eviteremo di esaminare casi simili e tratteremo di un flusso del fluido che scorra attorno al corpo, e solo nel caso che il numero di Reynolds sia grande.

4. Poiché all'interno dello strato limite la velocità varia lungo la direzione perpendicolare allo strato, il flusso del fluido nello strato limite è turbolento. E ogni flusso turbolento comporta una rotazione alla quale è legato il momento della quantità di moto (cfr. § 102, punto 4).

5. Se lo strato limite dovuto all'azione delle forze di viscosità non si scollasse dal corpo, lo studio del flusso del fluido sarebbe possibile supponendo che il fluido sia perfetto. L'influenza dello strato limite si ridurrebbe allora ad un semplice aumento delle dimensioni efficaci del corpo. Proprio così si comporta lo strato limite sulla parte anteriore del corpo orientato verso il flusso del fluido. Ma sulla parte posteriore del corpo, lo strato limite nella maggioranza dei casi *si scolla* di tanto in tanto dalla superficie del corpo immerso. In questi casi la supposizione di una assoluta assenza delle forze di viscosità porta a dei risultati del tutto in contraddizione con la realtà. Lo scollamento dello strato limite porta a modificazioni qualitative di tutto il quadro di flusso attorno al corpo immerso.

Quali sono allora le cause e le conseguenze dello scollamento dello strato limite? Sotto l'azione delle forze di viscosità le particelle del fluido si muovono più lentamente nello strato limite che nel flusso esterno. In quest'ultimo esiste una differenza di pressione che provoca un'accelerazione o un rallentamento del flusso. La stessa differenza di pressione deve esistere anche nello strato limite poiché la differenza di pressione tra le frontiere dello strato è trascurabilmente piccola (in caso contrario le particelle del fluido nello strato limite avrebbero avuto accelerazioni perpendicolari alla superficie del corpo). Nel flusso esterno che scorre attorno alla parte anteriore del corpo la pressione diminuisce nel senso del flusso del fluido. Quindi, sarà lo stesso anche nello strato limite. La forza provocata dalla differenza di pressione è diretta nel senso del flusso. Perciò la velocità delle particelle del fluido aumentano sia nel flusso esterno che nello strato limite, il che permette alle particelle di continuare il loro moto sulla superficie del corpo malgrado la comparsa delle forze d'attrito. Nella parte del flusso che scorre attrono alla parte posteriore del corpo, la pressione aumenta nel senso del flusso. La velocità del moto si arresta sia nel flusso esterno che nello strato limite. Dato che nello strato limite la velocità delle particelle del fluido è minore che nel flusso esterno, un sufficiente rallentamento di quest'ultimo può condurre all'arresto o addirittura ad *un inversione di moto* delle particelle nello strato limite. Come risultato comparirà, in prossimità della superficie del corpo immerso, un flusso di ritorno del fluido, malgrado il fatto che il flusso esterno continua il suo moto in avanti. Nuove masse di fluido che pervengono al punto in cui nasce il flusso di ritorno prima si arrestano e poi cominciano esse stesse il moto di ritorno. (Se il rallentamento del flusso esterno non è sufficientemente grande, il moto di ritorno dello strato limite non si produce). La quantità di fluido frenato che si trova tra la superficie del corpo e la corrente esterna aumenta rapidamente, il moto di ritorno si diffonde sempre più e infine separa definitivamente dalla superficie del corpo la corrente esterna. Si produce così uno scollamento del flusso. Poiché la superficie di discontinuità così formatasi è instabile, essa si trasforma in turbinio. Una parte di fluido rallentato risulta coinvolta nei vortici e trascinata dal flusso.

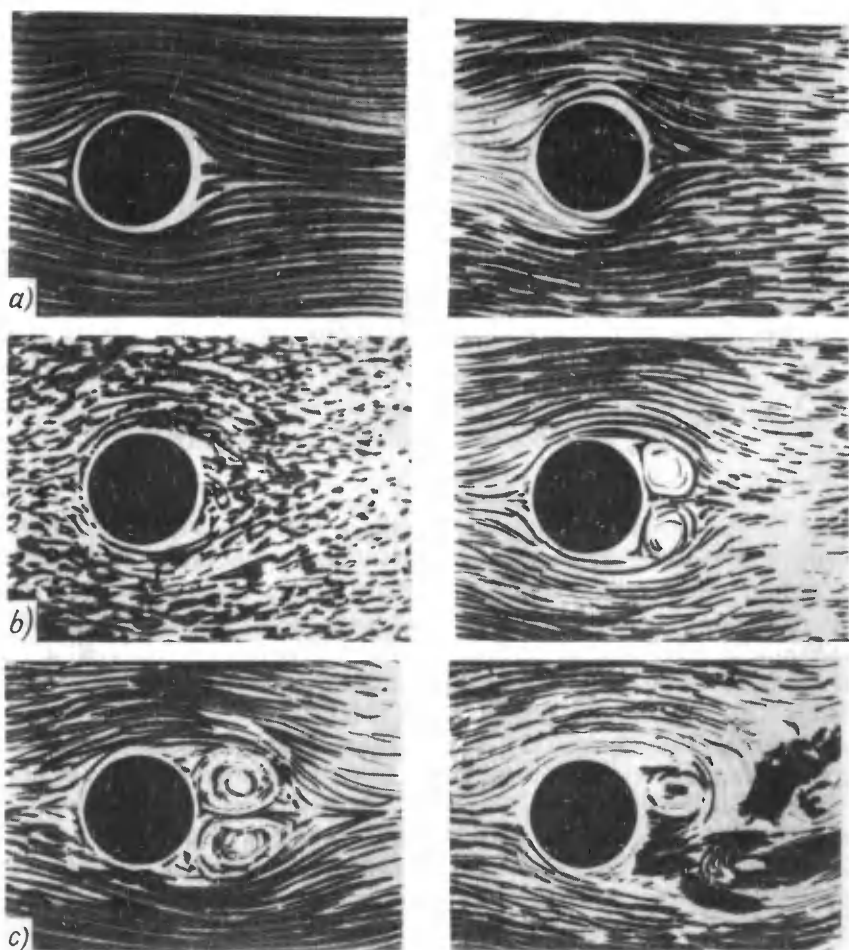



Fig. 271.

6. Tutti questi stadi di formazione del vortice sono illustrati nella figura 271, *a, b, c* dove sei fotografie consecutive mostrano un flusso d'acqua che scorre attrono ad un cilindro immerso[1] immobile. Per rendere visibili le linee di corrente si sparge sulla superficie dell'acqua in movimento polvere d'alluminio. Nel primo istante si forma attorno al cilindro un flusso potenziale, le cui linee di corrente prima si aprono di fronte al cilindro poi si richiudono dietro di lui. Le altre fotografie mostrano i successivi cambia-

[1]Le fotografie delle figure 271, 272, 273, 279, 280, 281 sono riprodotte dal libro di L. Prandtl, O. Tietjens, *Idro-e Aerodinamica,* Berlin, Verlag von Julius S. Springer, zweiter Band, 1931. Nella figura 271 il flusso è diretto da sinistra a destra.

Fig. 272.

menti del flusso. Sulle tre ultime fotografie si vede che dietro il cilindro si formano due vortici che uno dopo l'altro si staccano dal cilindro e si lasciano portare dal flusso del fluido. I vortici staccatisi vengono sostituiti da alrti che compaiono alternativamente in ciascuno dei flussi, si staccano successivamente dalla superficie superiore ed inferiore del cilindro. Tutti questi vortici si staccano dal corpo con la stessa velocità. Un tale sistema di vortici si chiama *solco di Karman* (1881-1963) dal nome dello studioso. È rappresentato nelle figure 272 e 273. La figura 272 rappresenta un quadro di flusso in un sistema di riferimento nel quale il cilindro è immobile e l'acqua scorre da sinistra a destra; la figura 273 si riferisce ad un sistema di riferimento in cui l'acqua non perturbata è immobile e il cilindro si sposta da destra a sinistra. La velocità di flusso dei vortici è più piccola della velocità di flusso dell'acqua poiché nei vortici si raccolgono le particelle d'acqua rallentate dal corpo durante il moto attorno ad esso. Perciò l'impulso portato dal flusso del fluido insieme ai vortici in moto all'interno del fluido è più piccolo dell'impulso che porta con sé il flusso che circonda il corpo. Tale diminuzione dell'impulso del flusso del fluido si rivela nella comparsa di una forza di resistenza frontale che agisce sul corpo nel senso del flusso.

7. Dalle considerazioni esposte risulta che la nozione di strato limite può essere applicata soltanto alla parte anteriore del corpo fino al punto di stacco del flusso dalla superficie del corpo (si chiama *linea di stacco*). A partire dalla linea di stacco si crea dietro il corpo una zona di flusso la cui lunghezza è di solito molto più grande delle dimensioni lineari caratteristiche del corpo stesso (fig.274). Poiché in questa zona penetrano le particelle provenienti dallo strato limite, la velocità media della corrente in questa zona è minore della velocità del flusso in arrivo e la corrente stessa è turbolenta. Questa zona si chiama *solco*. È la presenza del solco che determina la forza di resistenza frontale dovuta alla differenza di pressione tra lato ante-

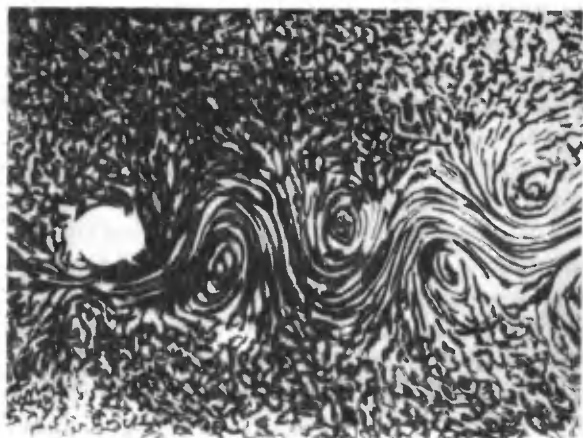



Fig. 273.

riore e posteriore del corpo. Più estesa è la zona di stacco, cioè più largo è il solco, più la resistenza frontale è grande, ferme restanti le altre condizioni. Vedremo nel paragrafo seguente che è proprio all'esistenza del solco si deve la comparsa della forza di portanza.

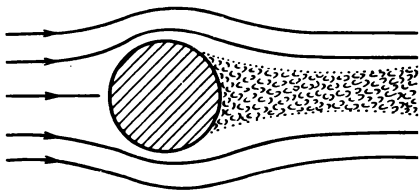



Fig. 274.

8. Nel caso che il numero di Reynolds non sia molto grande, il flusso nello strato limite sarà laminare. Quando il numero di Reynolds cresce, il flusso laminare diventa instabile e nello strato limite compare turbolenza. Essa prende inizio nella parte posteriore dello strato limite adiacente alla linea di stacco e di là si propaga man mano verso la parte anteriore dello strato limite. Quindi, nella parte anteriore lo strato limite è laminare, esso si trasforma poi in un flusso turbolento e dopo la linea di stacco si forma il solco. In una sfera il regime turbolento compare quando il numero di Reynolds raggiunge $\sim 3 \cdot 10^5$. A causa della turbolenza dello strato limite avviene uno spostamento della linea di stacco verso la parte posteriore del corpo e quindi il restringimento del solco. Come risultato diminuiscono il coefficiente di resistenza forntale C_x e perfino la forza stessa di resistenza frontale F_x. Questo fenomeno si chiama *crisi di resistenza.* La crisi di resistenza non si manifesta se con l'aumento della velocità di flusso la linea di stacco

non si sposta. Allora il coefficiente di resistenza C_x diventa indipendente dal numero di Reynolds. Così avviene, ad esempio, nel caso di una piastra dai bordi netti immersa in un fluido, perpendicolarmente al flusso. Qui la linea di stacco è determinata da considerazioni puramente geometriche e coincide con i bordi della piastra.

§ 104. *Portanza di un'ala di aereo*

1. Il fenomeno di stacco è legato alla comparsa della forza di portanza. Ci occuperemo, in sostanza, della forza di portanza che agisce sull'ala di un aereo, benché il meccanismo di comparsa di questa forza sia lo stesso qualsiasi sia la forma del corpo. A velocità costante l'orientamento di un aereo nello spazio resta invariabile, il che significa che, date queste condizioni di volo, i momenti di tutte le forze esterne che agiscono sull'aereo si equilibrano e che il suo momento cinetico è costante. Per semplicità, considereremo un'ala isolata in moto uniforme nell'aria ed orientata perpendicolarmente al piano della figura (fig.275). Consideriamo la lunghezza

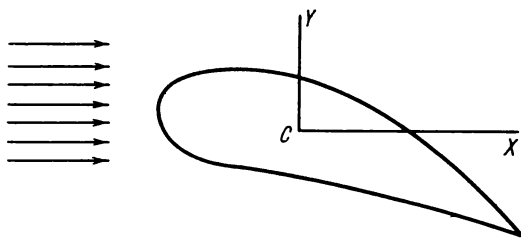



Fig. 275.

dell'ala infinita. Una tale ala si chiama *ala di ampiezza infinita.* Per comodità, passiamo ad un sistema di riferimento legato all'ala ponendo l'origine delle coordinate, ad esempio, nel centro di massa C dell'ala. È evidente che questo sistema di riferimento è inerziale.

Quindi, supponiamo che l'ala sia immobile e che il flusso d'aria sia piano. Il flusso non perturbato è naturalmente uniforme. A scanso di equivoci considereremo tutti i momenti cinetici, che tratteremo più tardi, rispetto al punto C. Il momento della quantità di moto dell'ala stessa è uguale a zero, e perciò non ne parleremo più.

2. Perché compaia la forza di portanza, bisogna che l'ala sia di *forma asimmetrica* o che sia *disposta asimmetricamente* rispetto al piano orizzontale nel quale essa si sposta. Nessuna forza di portanza può comparire, ad esempio, durante il moto di un cilindro rotondo che non ruoti attorno al suo asse. Perciò supponiamo che la simmetria indicata non ci sia. Ricordiamo ora che nello strato limite la velocità delle particelle d'aria aumenta a misura che ci si allontana dalla superficie dell'ala. Grazie a ciò il flus-

so nello strato limite è turbolento e, quindi, comprende una rotazione. Sulla parte superiore dell'ala la rotazione si effettua in senso orario e sulla parte inferiore in senso antiorario (se il flusso del fluido scorre da sinistra a destra). Supponiamo che a causa del distacco una certa massa d'aria, che si trovava dapprima nello strato limite al di sotto dell'ala, sia portata dal flusso principale sotto forma di uno o più vortici. Essendo la massa in rotazione, porterà anche il momento cinetico legato ad essa. Però il momento della quantità di moto dell'aria non può essere modificato. Se il distacco dello strato limite al di sopra dell'ala non si è verificato, l'aria del flusso esterno deve cominciare a ruotare attorno all'ala in senso orario affinché sia conservato il momento della quantità di moto. In altre parole, nel flusso esterno attorno all'ala deve comparire una circolazione della velocità dell'aria in senso orario e questa circolazione andrà a sovrapporsi al flusso principale. Quindi la velocità di flusso al di sotto dell'ala diminuirà, mentre al di sopra di essa aumenterà. Si può applicare l'equazione di Bernoulli al flusso esterno. Ne segue che a causa della circolazione la pressione al di sotto dell'ala aumenta, mentre al di sopra di essa diminuisce. La differenza di pressione che ne risulta si manifesta nella forza di portanza diretta verso l'alto. Al contrario, se i vortici portati via sono creati dalle particelle dello strato limite al di sopra dell'ala, comparirà una circolazione in senso antiorario e la forza di « portanza » sarà diretta verso il basso.

3. Per meglio capire la natura del fenomeno, si consideri una piastra sottile immersa in un flusso di un fluido perfetto. Se la piastra è orientata lungo il flusso, i punti critici in cui la velocità del fluido deve annullarsi si troveranno ai bordi A e B della piastra (fig.276,*a*). Se la piastra è perpendicolare al flusso i due punti critici si spostano al centro della piastra e la velocità di corrente raggiunge il suo massimo ai bordi A e B (fig.276,*b*) della piastra. Se invece il piano della piastra è inclinato rispetto alla direzione del flusso (fig.276,*c*) i punti critici K_1 e K_2 si trovano in una posizione interme-

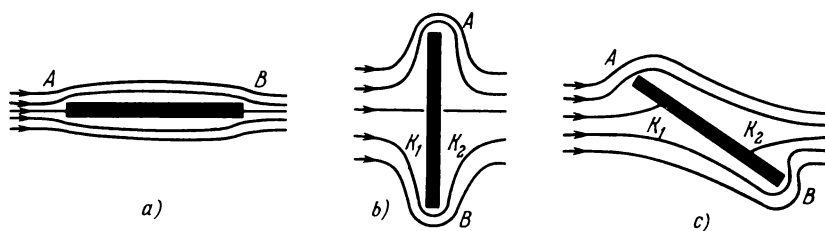



Fig. 276.

dia tra il centro e i bordi della piastra e la velocità di flusso è massima come prima ai bordi della piastra. In prossimità del punto critico K_2 essa è più grande al di sotto di questo punto e più piccola al di sopra perché il flusso inferiore è più vicino al bordo B della piastra di quanto il flusso esterno sia

vicino al bordo A. Un analogo comportamento si osserva nel momento iniziale anche nel caso di un fluido viscoso.

4. Così anche nel caso di un'ala di aereo il flusso d'aria al di sotto dell'ala nel momento iniziale contorna il bordo posteriore dell'ala e incontra lungo la linea KD il flusso che contorna l'ala superiormente. Qui compare una superficie di separazione che forma un vortice ed il cui senso di rotazione è antiorario (fig.277 *a,b*). Tutto ciò si vede nelle figure 279, 280, 281

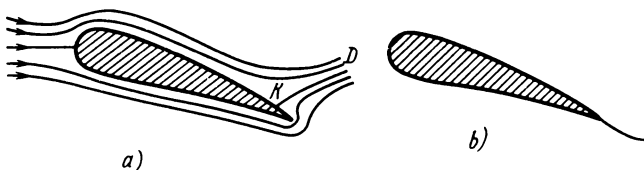



Fig. 277.

(fotografie); le due prime fotografie rappresentano una corrente in un sistema di riferimento in cui l'ala è immobile; la terza fotografia rappresenta una corrente in un sistema di riferimento in cui è immobile il fluido non perturbato. I vortici portano via il momento della quantità di moto e attorno all'ala si stabilisce una circolazione in senso orario. L'aumento della velocità della corrente al di sopra dell'ala e la sua diminuzione al di sotto porta ad uno spostamento della linea di distacco finché essa non raggiunga il bordo inferiore dell'ala (fig.278). Se non ci fossero forze di viscosità, non si

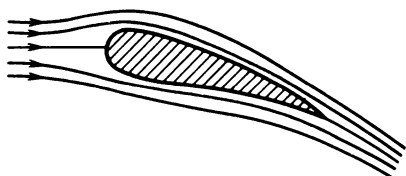



Fig. 278.

formerebbero i vortici e cesserebbe la circolazione dell'aria attorno all'ala. Ma le forze di viscosità cambiano il quadro. Grazie a queste forze la circolazione attorno all'ala diminuisce progressivamente, la linea di distacco si sposta dal bordo dell'ala verso l'alto, cioè si ristabiliscono le condizioni di formazione dei vortici. Questi intensificano di nuovo la circolazione e riportano la linea di distacco al bordo dell'ala. Quando la velocità dell'aereo è costante, il processo descritto è regolare, i vortici si staccano periodicamente dal bordo posteriore dell'ala e mantengono quindi una circolazione praticamente costante.

5. La dipendenza del modulo della forza di portanza dalla circolazione della velocità fu dimostrata indipendentemente da Žukovsij e da Kutta. La loro formula si riferisce ad un'ala d'ampiezza infinita e dà il valore della

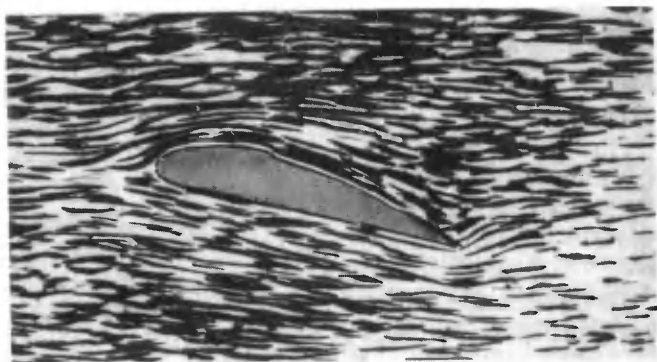



Fig. 279.

Fig. 280.

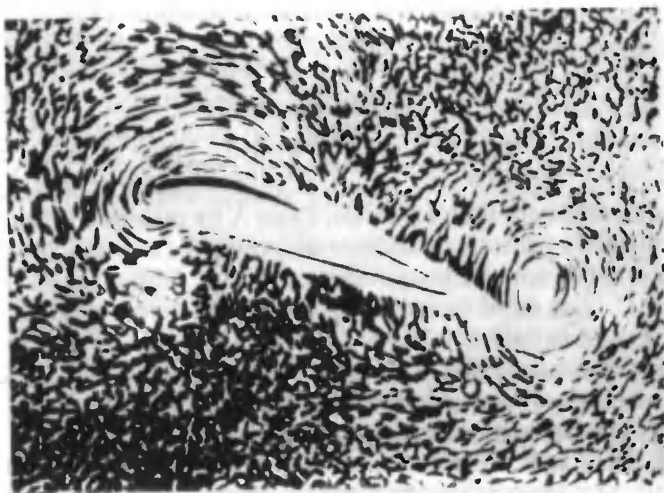



Fig. 281.

portanza per unità di lunghezza dell'ala. La formula è stata stabilita supponendo che l'ala sia in moto uniforme in un fluido perfetto e che attorno all'ala la circolazione della velocità sia costante. Quindi in un sistema di riferimento rispetto al quale l'ala sia immobile, il flusso è potenziale e in circolazione. In un fluido perfetto la circolazione può praticamente avere qualsiasi valore indipendentemente dalla velocità di flusso, dall'angolo d'attacco e da altri parametri. Tuttavia una viscosità, per quanto minima, conduce ad una dipendenza univoca del valore della circolazione rispetto a questi parametri. E poichè la circolazione stessa non dipende dalla viscosità del fluido, la formula di Žukovskij-Kutta costituisce una buona approssimazione per il calcolo della forza di portanza di un'ala nell'aria viscosa.

6. Diamo una semplice dimostrazione della formula di *Žukovskij-Kutta* che permette di chiarire in modo assai evidente perché per la comparsa della forza di portanza la circolazione è essenziale. Supponiamo che il flusso del fluido si estenda su tutti i lati all'infinito. Si supporrà come prima che il

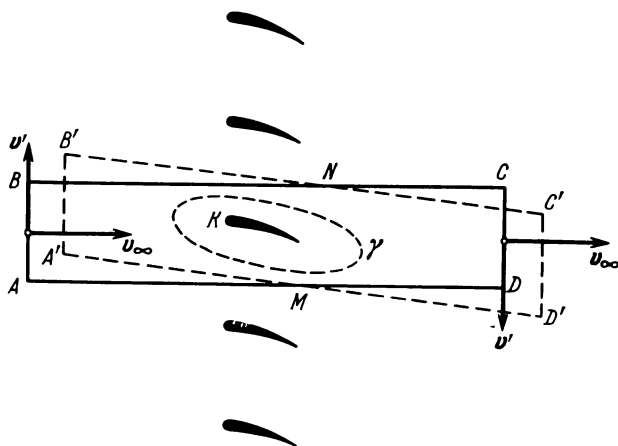



Fig. 282.

flusso non perturbato sia orizzontale; l'asse X sia orientato lungo il flusso e l'asse Y lungo la verticale ascendente perpendicolarmente al flusso. Poniamo l'ala K nell'origine delle coordinate (fig.282). Disponiamo al di sopra e al di sotto dell'ala un numero infinito di ali identiche all'ala K, alla medesima distanza l'una dall'altra. Attorno ad ogni ala si formi la medesima circolazione che attorno all'ala K. In un regime stabilizzato il flusso del fluido sarà allora rigorosamente periodico rispetto a y. Se la distanza tra le ali vicine è molto grande rispetto alle dimensioni trasversali dell'ala, la deformazione del fluido nelle immediate vicinanze dell'ala K, a causa delle ali supplimentari, sarà trascurabilmente piccola. Si osservano deformazioni notevoli solo a grande distanza dall'ala K. Tracciamo un contorno rettangolare

ABCD i cui lati orizzontali taglino le ali vicine. Sia la lunghezza *AD* del contorno infinitamente grande rispetto all'altezza. Sui lati laterali *AB* e *CD* la velocità v è composta dalla velocità orizzontale v_∞ del flusso non perturbato e dalla velocità verticale v' determinata dalla circolazione. Se si prende come positiva la circolazione in senso orario, sul lato *AB* la velocità v' sarà diretta verso l'alto (sarà quindi positiva) e sul lato *CD* sarà diretta verso il basso (sarà cioè negativa). Consideriamo il fluido contenuto in un parallelepipedo rettangolo di base *ABCD* e di altezza unica, perpendicolare al piano della figura. Nel tempo dt del fluido contenuto nel parallelepipedo si sposterà nel volume $A'B'C'D'$. Calcoliamo l'incremento dI della quantità di moto del fluido. In regime stazionario questo incremento sarà uguale alla differenza, in un medesimo istante, tra la quantità di moto del fluido nel nuovo spazio occupato dal fluido nel tempo dt e la quantità di moto nello spazio lasciato libero dal fluido durante lo stesso tempo dt. Dato che il moto del fluido lungo l'asse Y è periodico, la quantità di moto del fluido nei volumi $AA'M$ e $BB'N$ è assolutamente identica. La stessa identità si applica alla quantità di moto del fluido nei volumi MDD' e NCC'. Perciò l'incremento cercato della quantità di moto dI si ottiene se dalla quantità di moto corrispondente al volume $CC'D'D$ si sottrae la quantità di moto corrispondente al volume $AA'B'B$. Ciascuno di questi volumi è uguale a $lv_\infty dt$, dove l è la lunghezza del lato $AB = CD$; le velocità orizzontali v_∞ sono uguali in ambedue i volumi, mentre le velocità v' verticali sono di segno contrario. Perciò è solo la componente verticale della quantità di moto che subisce un incremento uguale a

$$dI_y = -2lv_\infty \rho v' \, dt.$$

Ma $2lv' = \Gamma$ è la circolazione della velocità v' lungo il contorno *ABCD*; i lati *AD* e *BC* non portano nessun contributo alla circolazione, perché la velocità v' è costante su ambedue i lati e nella circolazione lungo il contorno *ABCD* essi sono presenti con segno opposto. La grandezza Γ è allo stesso tempo la circolazione lungo il contorno *ABCD* della velocità totale $v = v_\infty + v'$, perché è evidente che il termine costante v_∞ non può portare nessun contributo alla circolazione. Quindi

$$dI_y = -\Gamma \rho v_\infty \, dt.$$

L'incremento della quantità di moto del fluido è uguale all'impulso delle forze esterne che agiscono sul fluido. Tra queste forze si possono ignorare le forze di pressione che agiscono sulla massa considerata del fluido lungo la superficie *ABCD*, poiché la risultante di tutte queste forze di pressione è uguale a zero. La sola forza che sussiste è quella tramite la quale l'ala agisce sul fluido. Essa è uguale e di segno opposto alla forza di portanza F_y. Applicando il teorema dell'impulso della forza si ottiene

$$F_y = \Gamma \rho v_\infty. \qquad (104.1)$$

Ne deriva evidentemente che con Γ si indica la circolazione lungo il contorno *ABCD*. Ma per un flusso potenziale il contorno della circolazione γ può essere tracciato in modo arbitrario a condizione che contorni soltanto l'ala *K* e non le altre. Considerando γ come contorno arbitrario possiamo ora allontanare all'infinito le altre ali senza toccare il contorno stesso γ. Allora arriveremo al caso limite di una sola ala contornata da una corrente di fluido. In questo caso limite il risultato (104.1) resta valido. La formula (104.1) è proprio la formula di Žukovskij-Kutta.

§ 105. *L'effetto Magnus*

1. Se un cilindro circolare immobile il cui asse sia perpendicolare al flusso viene circondato da un flusso uniforme d'aria, a causa della simmetria compare soltanto una forza di resistenza frontale, senza che si manifesti nessuna forza di portanza. Se però il cilindro ruota intorno al suo asse, si

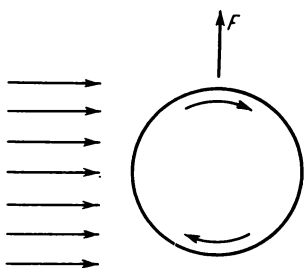
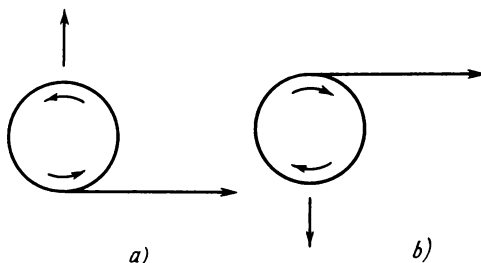



Fig. 283. Fig. 284.

nota la comparsa di una forza di portanza che è perpendicolare al flusso esterno e che fa deviare il cilindro. Questo effetto, per cui sotto l'azione di queste forze il cilindro si sposta da una parte, si chiama effetto Magnus (1802-1870), porta cioè il nome dello studioso che l'ha studiato in via sperimentale. Supponiamo dapprima che il cilindro si giri solo ad una velocità costante, in senso orario ad esempio (fig. 283). Per effetto dell'attrito anche l'aria circonvicina si mette in moto; compare uno strato limite; il flusso è turbolento e si compone di un flusso potenziale cui si sovrappone una rotazione. Dato che la velocità dell'aria diminuisce verso l'esterno, la rotazione nello strato limite avviene in senso orario, cioè in senso opposto alla rotazione del cilindro. Per i numeri grandi di Reynolds, il flusso laminare nello strato limite è instabile e cede il posto ad un flusso turbolento (si veda § 99). Ma anche nello strato limite turbolento la rotazione delle particelle d'aria è in generale diretta in senso inverso a quella del cilindro. Supponiamo ora che il cilindro in rotazione venga sfiorato da una corrente d'aria uniforme da sinistra a destra. Nella parte superiore del cilindro il

senso del flusso coincide con il senso di rotazione del cilindro, mentre nella parte inferiore esso è di senso contrario. Le particelle allo strato limite nella parte superiore del cilindro vengono accelerate dal flusso d'aria, il che ne impedisce il distacco. Al contrario, nella parte inferiore il flusso frena il moto dello strato limite e contribuisce a provocarne il distacco. Le particelle d'aria dello strato limite al momento del distacco vengono portate via dal flusso sotto forma di vortici il cui senso di rotazione è antiorario. In seguito a ciò si stabilisce attorno al cilindro una circolazione di velocità di senso opposto, cioè nel senso di rotazione del cilindro. Alla circolazione si accompagna anche la forza di portanza orientata verso l'alto. Se il senso di rotazione del cilindro cambia, anche la forza di portanza cambierà di segno. Si intende che anche in questo caso, per un cilindro infinitamente lungo, il valore della forza di portanza è definito dalla formula di Żukovskij-Kutta (104.1).

2. L'effetto Magnus può essere dimostrato ponendo un cilindro circolare retto in posizione verticale su un carrello leggero posto su rotaie orizzontali. Per mezzo di un piccolo motore elettrico il cilindro si mette in rotazione e lo si sottopone ad una corrente d'aria. Se la corrente d'aria è perpendicolare alle rotaie, il carello si mette in moto. Lo stesso avviene se la corrente d'aria è obliqua rispetto alle rotaie. Si riesce anche a far muovere il carrello « contro vento » se l'angolo è acuto. Invertendo il senso di rotazione del cilindro, il moto del carrello cambia di senso.

Ecco un'altra dimostrazione dell'effetto Magnus. Su un leggero rocchetto di cartone si arrotola un nastro, la cui estremità libera è attaccata ad un lungo bastone. Si pone il rocchetto in posizione orizzontale in una tavola. Se si tira di colpo il bastone, il rocchetto si mette in rotazione e subito acquista velocità orizzontale. A causa della comparsa della forza di portanza, il rocchetto si solleva (fig. 284*a*). Se si arrotola il nastro come indicato nella figura 284*b*, la « forza di portanza » cambierà di senso e spingerà il rocchetto contro la tavola.

Un cilindro di carta, che rotoli su un piano inclinato, cadendo riceve una spinta indietro. In modo analogo si muove una palla da tennis dopo aver ricevuto un colpo che la fa ruotare. Tutti questi esempi illustrano esaurientemente l'effetto Magnus.

3. Flettner suggerì di utilizzare l'effetto Magnus per mettere in moto le navi sfruttando l'energia del vento. Al posto delle vele ha installato dei cilindri (dei rotori) che metteva in rotazione rapida per mezzo di motori. Sulle estremità dei cilindri poneva poi due dischi di diametro più grande (come nel rocchetto) per diminuire l'aspirazione nociva dell'aria nella zona di pressione minore. Gli esperimenti hanno dimostrato l'effecienza tecnica di tali navi a rotori. Tuttavia essendo economicamente più costose delle navi con motori normali, non sono state commercializzate.

INDICE DEI NOMI

INDICE ANALITICO

Di prossima pubblicazione:

Sivuchin D.
Corso di fisica generale, in 5 volumi, vol. II. **Termodinamica e fisica molecolare.** Vol. III. **Elettricità.**

Il presente libro è scritto sulla base delle conferenze tenute dall'autore nell'Istituto di fisica tecnica. Una grande attenzione è rivolta al significato fisico e al contenuto dei fondamenti e delle nozioni di elettricità, alla determinazione dei limiti di applicabilità delle leggi fisiche, dei campi e schemi idealizzati applicati nella fisica.
Per gli studenti universitari delle facoltà di fisica, di fisica tecnica e di ingegneria.

Distribuito da
Libreria EDEST s.n.c.
Edizioni Estere
16124 Genova
Via Cairoli, 12/4